MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. DUMITRU GHIȚĂU

GEODEZIE ȘI GRAVIMETRIE GEODEZICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Manualul a fost analizat și avizat de colectivul Catedrei de cadastru și măsurători terestre și de Consiliul profesoral al Facultății de căi ferate, drumuri, poduri și geodezie, precum și de Biroul senatului Institutului de Construcții — București.

Redactor: ing. VIRGINIA RUSU
Tehnoredactor: ELENA PETRICĂ
Coperta: VICTOR WEGEMAN

PREFAȚĂ

Lucrarea de față, care este în primul rînd un manual universitar, *poartă titlul disciplinelor prevăzute în planul de învățămînt al* secției de geodezie din Institutul de construcții București, *al căror titular este autorul. Manualul nu va putea cuprinde însă tratarea întregului* domeniu al științei denumită geodezie, *precum și a tuturor implicațiilor de natură tehnică, aplicativă, pe care le presupune. Motivația derivă, în principal, din faptul că în planul de învățămînt, la care ne-am referit, alături de disciplinele* geodezie *și* gravimetrie geodezică *sînt prevăzute și alte discipline de specialitate cum ar fi:* astronomia geodezică, cartografia matematică, măsurători geodezice prin unde, geodezie cosmică *ș.a., care, fiecare în parte, s-ar putea încadra, prin obiectul propriu de studiu, în domeniul denumit sintetic* „geodezie".

În dorința de a elimina suprapuneri extinse, dar fără a neglija racordări necesare cu disciplinele menționate, precum și cu alte cursuri din planul de învățămînt, în special cu topografia *și* teoria erorilor, *în manual sînt tratate aspectele teoretice și practice principale ale următoarelor părți ale geodeziei:*

— *geodezia fizică;*

— *geodezia elipsoidală;*

— *proiectarea și materializarea în teren a rețelelor geodezice;*

— *metode și instrumente folosite la efectuarea observațiilor în rețelele geodezice;*

— *prelucrarea observațiilor efectuate în rețelele geodezice.*

Avînd în vedere poziția disciplinei în planul de învățămînt, în cadrul general al rețelelor geodezice *o atenție deosebită se va acorda* rețelelor geodezice de stat.

Acest manual este destinat în primul rînd studenților secțiilor de geodezie (ingineri) și cadastru funciar (subingineri) din cadrul Institutului de construcții București. *Textul de față va fi util și altor studenți, de la alte institute de învățămînt superior, care audiază lecții de geodezie, precum și inginerilor, subinginerilor și tehnicienilor care activează în sectorul geodezic-topografic-fotogrammetric-cartografic. Structura lucrării este astfel concepută încît să îndeplinească pe de o parte solicitările legate de buna desfășurare a procesului de învățămînt (curs, lucrări practice, proiecte de an și diplomă, atelier de proiectare-cercetare, practică productivă), iar pe de altă parte, să ofere cititorului baza necesară pentru abordarea unor probleme care depășesc, prin amploare și dificultate, cadrul limitat al prelegerilor universitare. Dacă primul deziderat referitor la structura și conținutul lucrării este realizat în întregime, cel de-al doilea va trebui suplinit de către cititor prin lectura suplimentară a unei bibliografii de specialitate, care va fi de altfel indicată în manual.*

Redactarea este astfel realizată încît să se adapteze în mod corespunzător la nivelul de cunoștințe *al studenților secției de geodezie în domeniile matematicilor speciale, mecanicii teoretice, geofizicii ș.a., nivel condiționat de actualul plan de învățămînt.*

Prin conținutul său, manualul va clarifica noțiuni fundamentale și aplicative cu care se operează în cadrul altor discipline geodezice (topografia, carto-

grafia matematică, geodezia cosmică ş.a.), *reprezentînd o sinteză a unor cunoştinţe absolut necesare pentru formarea pregătirii de specialitate a unui inginer geodez. Avînd în vedere solicitările ultimilor ani de activitate, pregătirea acestor cadre trebuie să prevadă şi participarea lor la lucrări de specialitate efectuate în alte ţări, în care reţelele geodezice de stat sînt incomplet realizate, necesitînd refaceri sau dezvoltări corespunzătoare stadiului actual. În aceeaşi ordine de idei am include şi pregătirea în ţara noastră a studenţilor din unele ţări în curs de dezvoltare, care vor avea probleme dificile de rezolvat în ţările din care provin.*

Bucureşti, 1983.

AUTORUL

Geodezia este ştiinţa măsurării şi reprezentării suprafeţei Pămîntului
(F. R. Helmert — 1880)

GEODEZIE — DEFINIŢIE, OBIECT, SCURTĂ PRIVIRE ISTORICĂ

Definiţia dată geodeziei de către *F.R.Helmert* merită toată atenţia, nu numai pentru vechimea sa, cît mai ales pentru calităţile sale, de generalizare şi de exprimare simplă, dar edificatoare, a obiectului de studiu al geodeziei, ca ramură a ştiinţelor care cercetează planeta pe care trăim. De menţionat că definiţia lui *Helmert* este discutată, chiar disputată, în multe cercuri de specialitate, dar acceptată, pînă la urmă, aproape fără excepţii. Tendinţele de modificare existente în trecut, ca şi în prezent, a acestei definiţii, au întrunit la fel de multe contraargumente, astfel încît propunerile respective au fost retrase. În prezent, astfel de „completări" se referă la necesitatea de a cuprinde în definiţia geodeziei şi preocupări caracteristice, prin amploarea lor, pentru ultimele decenii, cum ar fi:

— determinarea potenţialului gravităţii;

— urmărirea variaţiei în timp a parametrilor definitorii pentru forma şi dimensiunile Pămîntului;

— determinarea deplasărilor recente ale scoarţei terestre şi, implicit, variaţia în timp a poziţiei punctelor geodezice;

— cartografierea automată ş.a.m.d.

Dar, după o analiză mai atentă, de conţinut, se constată că definiţia dată de *Helmert* nu exclude aceste aspecte, şi nici altele, de acelaşi ordin. Desigur, evoluţia geodeziei în decursul unui secol, şi mai cu seamă în epoca modernă, este de necontestat, atît prin perfecţionările survenite în dezvoltarea aparaturii şi tehnologiilor proprii sau din domeniul prelucrării datelor, cît şi prin legăturile din ce în ce mai complexe, de natură interdisciplinară, cu multe alte ramuri ale ştiinţei şi tehnicii. Dar, în ultimă instanţă, acestea nu au modificat obiectul de studiu al geodeziei, precizat prin definiţia lui *Helmert*, ci au reprezentat întotdeauna noi posibilităţi, mai profunde şi de multe ori de randament superior, de abordare şi rezolvare a problematicii complexe reprezentate de *măsurarea şi reprezentarea suprafeţei Pămîntului*.

Tratarea problematicii geodeziei în ansamblul său este realizată în context cu celelalte discipline din planul de învăţămînt al secţiei de geodezie, cum ar fi *astronomia geodezică, măsurători geodezice prin unde, cartografia matematică, geodezia cosmică* ş.a., fiecărei discipline revenindu-i, prin programele analitice corespondente, roluri bine determinate în ceea ce priveşte obiectul de studiu şi metodele de rezolvare a problemelor abordate.

Sintetizînd, putem afirma că din multitudinea problemelor ştiinţifice şi tehnice pe care le are de rezolvat geodezia, lucrarea de faţă va trata doar două şi anume:

— elementele de definire a formei şi dimensiunilor Pămîntului;

— crearea reţelelor geodezice de triangulaţie, nivelment şi gravimetrice-geodezice.

de apropiată de valoarea recomandată în anul 1980 de *Asociația Internațională de Geodezie (AIG)* (1 : 298,26), dovedind o tehnică de măsurare și de prelucrare cu totul remarcabile.

Începînd cu anul 1957 în geodezie se folosesc rezultatele obținute cu ajutorul sateliților artificiali, geodezici, ai Pămîntului, pentru determinarea formei și dimensiunilor planetei noastre.

Evoluțiile astronomiei geodezice, ale metodelor geometrice și fizice ale geodeziei din țara noastră, s-au încadrat cu consecvență, prin eforturi demne de remarcat, în dezvoltarea pe care a avut-o geodezia internațională.

În țara noastră începutul utilizării triangulației este legat de desfășurarea lucrărilor de întocmire a hărților diverselor regiuni ale țării. Este de remarcat faptul că învățămîntul geodezic referitor la această metodă a premers acestei lucrări, putîndu-se menționa în acest sens lecțiile de „gheodezie" de la școala lui *Gh. Asachi* (1813) și cea a lui *Gh. Lazăr* (1818). Acestea sînt dezvoltate apoi în școlile conduse de către *I.H. Rădulescu*, *P. Poenaru* ș.a., culminînd cu anul 1864, cînd sub domnitorul *Al.I. Cuza*, prin reorganizarea învățămîntului, se prevăd în cadrul *Facultății de științe* lecții de *topografie, astronomie* și *geodezie teoretică* pînă în anul al III-lea al acestei facultăți.

În *Transilvania* și în *Țara Românească*, primele lucrări de triangulație s-au desfășurat la mijlocul secolului al XIX-lea. Deosebit de interesantă apare triangulația executată în *Țara Românească* în perioada 1856—1867, formată din cinci lanțuri de triangulație primordială, în interiorul cărora s-au efectuat lucrări de triangulație de îndesire, de ordinele II și III, potrivit tehnologiei clasice franceze. Această triangulație a servit ca rețea de sprijin pentru executarea unei hărți fundamentale topografice a *Munteniei* la scara 1 : 57 600, care poate fi considerată ca prima hartă modernă pentru această parte a țării noastre.

Este de menționat că țara noastră făcea parte din anul 1861 din *„Asociația europeană pentru măsurări graduale"*, precursoare a actualei *„Asociații Internaționale de Geodezie"*, sub impulsul căreia s-au desfășurat lucrările de triangulație mai sus amintite, terminate cu rezultate remarcabile pentru acea vreme. Aceste lucrări s-au calculat în *Proiecția pseudoconică echivalentă Bonne, elipsoidul Bessel* (1841).

Despre o activitate geodezică organizată la noi în țară se poate vorbi însă după anul 1861 și, în special, după anul 1868 cînd se înființează „Depositul științific de resbel", care, sub diferite denumiri ulterioare, a fost coordonatorul marilor lucrări geodezice din țara noastră (*Institutul geografic al armatei* în 1895, apoi *Institutul geografic militar* în 1930 și din 1951 *Direcția topografică militară*). Au fost abordate lucrări importante, dintre care planul topografic fundamental la scara 1 : 20 000 și pentru celelalte regiuni ale țării a fost obiectivul principal (*Moldova* între anii 1873—1893, *Dobrogea* 1880—1884, *Muntenia de Est* 1893—1899).

În 1895 se creează, în punctul cel mai înalt din *București, Dealul Piscului*, observatorul astronomic militar, în același an căpitanul *T. Râmniceanu* determinînd latitudinea sa. Puțin mai tîrziu în anul 1898, se determină azimutul fundamental al țării, pe latura *Observatorul astronomic militar-Foișorul de foc*, iar în anul 1900 se realizează determinarea, cu rezultate foarte bune, a diferenței de longitudine față de *Potsdam*. Datorită prestigiului cucerit prin aceste determinări, *Asociația Internațională de Geodezie* stabilește în același an, ca *București să fie punct central în determinările de longitudine efectuate în poligonul internațional Potsdam-Paris-Pulkovo*. Pentru aceeași perioadă de timp se pot menționa următoarele: trecerea la elipsoidul *Clarke* (1880), măsurarea extrem de precisă a unor laturi cu fire de invar și rigle bimetalice, cum ar fi baza *Militari-Ciorogîrla*, triangulațiile și ridicările topografice ale unor orașe etc.

Nivelmentul de ordin superior se începe în anul 1898, cînd se instalează și un medimaregraf în portul Constanța, lucrarea fiind încheiată în linii mari în anul 1918, inclusiv cu racordări la rețelele de nivelment austriacă și bulgară.

Începuturile gravimetriei geodezice pot fi legate de lucrările lui *Gogu Constantin*, profesor la *Școala Națională de Poduri și Șosele*, și anume: „Asupra variației gravității în aceeași localitate" — 1893 și „Asupra variației latitudinilor" — 1896 (*Analele Academici Române*, seria II, vol. XV, *București*, 1893).

Sînt cunoscute în literatura de specialitate determinările efectuate de profesorul *G. Borass* în perioada 1900—1906, pe pilastrul situat în *Observatorul astronomic militar*, la *Galați* — cartierul *Țiglina*, precum și pe alți pilaștri de la capetele bazelor măsurate de *Institutul geografic militar*.

Planul unei triangulații moderne pentru întreaga țară este conceput în anul 1930, prevăzîndu-se printre altele: trecerea la elipsoidul internațional *Hayford* (1909), proiecția stereografică, desfășurarea rețelei de triangulație în lungul meridianelor și paralelelor. În același sens trebuie menționată rețeaua de nivelment realizată după primul război mondial și compensată riguros în anul 1933.

În perioada dintre cele două războaie mondiale lucrările de triangulație geodezică, din acea vreme și unele executate ulterior, sînt legate de numele unor specialiști, conducători de instituții sau profesori universitari: contraamiralul *C. Bucholtzer, I. Vidrașcu, C. Orășanu, I. Klinger, D. Pompei, I. Stamatin, R. Filimon* ș.a.

În anul 1939 a început construcția *Observatorului geofizic de la Căldărușani* (*Surlari*), lîngă *București*, la a cărui modernizare și-a adus o contribuție deosebită *L. Constantinescu*. În aceeași perioadă s-a procurat un aparat de tip *Sterneck* cu care s-a realizat o rețea de stații de pendul, sub conducerea lui *M. Socolescu*. Rețeaua gravimetrică de ord. I a țării noastre s-a realizat între anii 1956—1957 de către *Comitetul geologic*, sub conducerea prof. *R. Botezatu*.

După anul 1951 se poate vorbi de o nouă perioadă în dezvoltarea geodeziei românești. În acest an s-a adoptat elipsoidul *Krasovski* (1942) și sistemul de proiecție *Gauss-Krüger*, creîndu-se o nouă rețea de triangulație de stat de ordinul I-IV și o rețea de ridicare de ordinul V. Rețeaua de triangulație astronomică-geodezică, primordială, a țării a fost continuu îmbunătățită prin efectuarea unor măsurători geodezice, astronomice, gravimetrice de mare precizie, potrivit principiilor moderne de măsurare și compensare a vastelor rețele de triangulație. În aceeași perioadă de timp (1955—1968) s-a creat rețeaua modernă de nivelment geodezic din țara noastră. Coordonatorul și realizatorul principal al acestor ample lucrări a fost *Direcția topografică militară*. Un rol important în dezvoltarea geodeziei contemporane românești revine, de asemenea, *Institutului de geodezie, fotogrammetrie, cartografie și organizarea teritoriului*, înființat în anul 1958.

Ultimele două decenii sînt caracterizate și prin abordarea unor probleme specifice gravimetriei geodezice, la nivel de producție, dintre care menționăm determinările gravimetrice în lungul liniilor de nivelment de ord. I,

Chiar referitor la aceste două probleme mari ale geodeziei, mai există preocupări și completări în interiorul altor discipline din planul de învățămînt, dar baza abordării și rezolvării lor revine disciplinelor *geodezie*, respectiv *gravimetrie geodezică*.

De semnalat că, nu de puține ori, una din problemele fundamentale ale geodeziei, și anume cea legată de determinarea formei și dimensiunilor Pămîntului, a fost prezentată ca *definiție* a geodeziei, ceea ce evident este greșit, deoarece limitează domeniul și obiectul de studiu al acestei științe nepermis de mult. Cu alte cuvinte, prin geodezie nu putem înțelege numai acest aspect, deși este fundamental.

În speranța că obiectul de studiu al geodeziei, în ansamblul său, a fost suficient de clar definit, fiind marcată în același timp și poziția manualului în acest ansamblu, considerăm că este instructiv să prezentăm unele momente din evoluția cunoștințelor referitoare la forma și dimensiunile Pămîntului, pe de o parte, precum și din evoluția creării rețelelor geodezice în general și pe teritoriul patriei noastre în special, pe de altă parte.

Rezolvarea problemei fundamentale a geodeziei și anume determinarea formei și dimensiunilor Pămîntului se poate realiza, în principiu, prin următoarele metode:

— *metode geometrice*, care au constat la început din măsurări de arce de meridian și de paralel, apoi din măsurări complexe în rețele de triangulație, poligonometrice ș.a. în scopul deducerii parametrilor de bază care definesc suprafața de referință;

— *metode dinamice* (*fizice*), care vor fi prezentate în prima parte a manualului;

— *metode astronomo-geodezice și cu sateliți artificiali ai Pămîntului*, care formează obiectul cursului de *geodezie cosmică*.

Este de menționat că aceste trei categorii de metode se întrepătrund, se condiționează reciproc, astfel că programele geodezice vaste, destinate determinării formei Pămîntului, folosesc metodele amintite în mod combinat. Astfel de lucrări complexe presupun înțelegeri și cooperări internaționale, care sînt coordonate de către *Asociația Internațională de Geodezie* din cadrul *Uniunii Internaționale de Geodezie și Geofizică* sau de către alte organisme geodezice internaționale, din care face parte și țara noastră.

Primele afirmații scrise în legătură cu forma Pămîntului (imaginat ca un disc) sînt legate de istoria Mesopotamiei (sec. XXX î.e.n.), forma de disc a Pămîntului fiind întîlnită și în poemele homerice (sec. X î.e.n.). Ipoteza formei sferice a Pămîntului a fost emisă, după unii istoriografi, de *Thales din Milet* (anul 600 î.e.n.), iar după alții, de *Pitagora* (anul 550 î.e.n.). Prima determinare a razei unei sfere care aproximează figura Pămîntului se face mult mai tîrziu, de către *Eratostene* (276—195 î.e.n.), care a determinat raza sferei terestre, după principiul măsurărilor graduale:

— *s-au măsurat*: lungimea arcului de meridian cuprins între *Alexandria* și *Assuan*, precum și diferența de latitudine între aceste localități;

— *s-a calculat* raza Pămîntului ca fiind 7350 km (față de circa 6370 km, cît se acceptă astăzi ca valoare medie, deci o eroare de aproximativ 16%). Desigur, rezultatul obținut de *Eratostene* nu era exprimat în sistemul metric, care a fost fondat mult mai tîrziu (v. cap. 18). Ulterior *Tycho Brahe* (în 1589) și *W. Snellius* (în 1617) fondează *metoda triangulației* care va îndeplini, în continuare, un rol deosebit în cadrul metodelor pentru determinarea formei și dimensiunilor Pămîntului. Primele determinări în acest sens aparțin lui *W. Snellius*, care deduce, din diferența de latitudine

(1°11'30''), măsurată astronomic, între *Bergen op Zoom* și *Alkmaar* (*Olanda*) și distanța corespondentă, calculată dintr-un lanț de triangulație, lungimea sfertului de meridian ca fiind 9 660 km.

În anul 1666 ia ființă *Academia de științe din Paris*, care își propune, printre alte obiective primordiale, determinarea mărimii razei Pămîntului, lucrări pe care le încredințează astronomului *Jean Picard*. Acesta determină, pe baza observațiilor într-o rețea de triangulație desfășurată în *meridianul Parisului*, între *Malvoisine* și *Amiens*, lungimea sfertului de meridian ca fiind 10 009 km. Acest rezultat este considerat *ca prima determinare din istoria geodeziei, care poate fi comparată cu rezultatele actuale, datorită preciziei de măsurare și metodei folosite*.

În această epocă începe o renumită dispută științifică, între adepții concepțiilor aparținînd lui *I. Newton* și respectiv *J.D. Cassini*, în ceea ce privește forma Pămîntului. În anul 1687 *Newton* fundamentează teoria sa asupra atracției universale, pe baza căreia deduce, printre altele, pentru Pămînt, ca un corp omogen în rotație, că forma sa, de echilibru, este reprezentată de un elipsoid cu turtire la poli (turtirea dată de *Newton* 1 : 231).

În schimb, măsurătorile efectuate de *J.D.* și *J. Cassini* (1683—1718), prin prelungirea arcului măsurat de *Picard* pînă la *Dunkerque* și *Collioure* conduc la un rezultat surprinzător pentru lumea științifică de atunci: Pămîntul are forma unui elipsoid, însă cu turtirea la ecuator: $f = -(1 : 95)$.

Aceste rezultate se datorau erorilor sistematice de măsurare și imperfecțiunii metodelor de prelucrare a observațiilor efectuate.

Disputa a fost clarificată mult mai tîrziu, prin efectuarea unor noi măsurători, întreprinse tot la însărcinarea *Academiei de științe din Paris, în cadrul următoarelor două mari expediții* astronomo-geodezice:

— măsurători de arc de meridian ($\Delta B \approx 1°$) în Laponia ($B_{med} = 66°20'$), conduse de către *Clairaut* și *Maupertuis* (în anii 1736—1737);

— măsurători de arc de meridian ($\Delta B \approx 3°$) în Peru ($B_{med} = -1°31'$) conduse de către *Bouguer, Godin, La Condamine* (în anii 1735—1744). Urmarea acestor expediții a fost confirmarea afirmațiilor lui *Newton*, turtirea la pol determinată atunci avînd valoarea 1 : 210.

În această perioadă se pune *fundamentul metodelor dinamice* ale geodeziei, de către *Clairaut*, care publică în anul 1743 lucrarea sa „Teoria figurii Pămîntului" în care expune, printre altele, teorema sa referitoare la legătura dintre turtirea geometrică f și turtirea gravimetrică f^*.

Din această teoremă rezultă că *prin determinări fizice se pot desprinde concluzii de natură geometrică, referitoare la forma și dimensiunile Pămîntului, ceea ce constituie esența ideilor de bază ale geodeziei fizice*.

Măsurătorile graduale au continuat în secolele XVIII-XX prin determinarea, directă sau din rețele de triangulație a unor arce de meridian, de paralel și oarecare, de mari dimensiuni. Dintre acestea, datorită importanței lor istorice, se menționează următoarele:

— remăsurarea *meridianului Parisului* ($B_{med} = 46°12'$; $\Delta B = 9°40'$), între *Dunkerque* și *Barcelona*, de către *Delambre* și *Méchain* (1792—1798), în scopul fundamentării primei definiții a metrului, dată în 1792, ca fiind „a 10-a milioana parte a sfertului de meridian ce trece prin *Paris*". Turtirea determinată, prin combinarea cu măsurătorile din *Peru*, a fost de 1 : 334;

— măsurătorile graduale conduse de *V.I. Struve*, întinse pe o foarte mare lungime: de la *Hammerfest* (în nordul *Norvegiei*) pînă la *gurile Dunării* (între anii 1816—1852) în urma cărora s-a dedus turtirea de 1 : 298,6. Această valoare merită o atenție cu totul deosebită deoarece este extrem

de apropiată de valoarea recomandată în anul 1980 de *Asociația Internațională de Geodezie* (*AIG*) (1 : 298,26), dovedind o tehnică de măsurare și de prelucrare cu totul remarcabile.

Începînd cu anul 1957 în geodezie se folosesc rezultatele obținute cu ajutorul sateliților artificiali, geodezici, ai Pămîntului, pentru determinarea formei și dimensiunilor planetei noastre.

Evoluțiile astronomiei geodezice, ale metodelor geometrice și fizice ale geodeziei din țara noastră, s-au încadrat cu consecvență, prin eforturi demne de remarcat, în dezvoltarea pe care a avut-o geodezia internațională.

În țara noastră începutul utilizării triangulației este legat de desfășurarea lucrărilor de întocmire a hărților diverselor regiuni ale țării. Este de remarcat faptul că învățămîntul geodezic referitor la această metodă a premers acestei lucrări, putîndu-se menționa în acest sens lecțiile de „gheodezie" de la școala lui *Gh. Asachi* (1813) și cea a lui *Gh. Lazăr* (1818). Acestea sînt dezvoltate apoi în școlile conduse de către *I.H. Rădulescu*, *P. Poenaru* ș.a., culminînd cu anul 1864, cînd sub domnitorul *Al.I. Cuza*, prin reorganizarea învățămîntului, se prevăd în cadrul *Facultății de științe* lecții de *topografie*, *astronomie* și *geodezie teoretică* pînă în anul al III-lea al acestei facultăți.

În *Transilvania* și în *Țara Românească*, primele lucrări de triangulație s-au desfășurat la mijlocul secolului al XIX-lea. Deosebit de interesantă apare triangulația executată în *Țara Românească* în perioada 1856—1867, formată din cinci lanțuri de triangulație primordială, în interiorul cărora s-au efectuat lucrări de triangulație de îndesire, de ordinele II și III, potrivit tehnologiei clasice franceze. Această triangulație a servit ca rețea de sprijin pentru executarea unei hărți fundamentale topografice a *Munteniei* la scara 1 : 57 600, care poate fi considerată ca prima hartă modernă pentru această parte a țării noastre.

Este de menționat că țara noastră făcea parte din anul 1861 din *„Asociația europeană pentru măsurări graduale"*, precursoare a actualei *„Asociații Internaționale de Geodezie"*, sub impulsul căreia s-au desfășurat lucrările de triangulație mai sus amintite, terminate cu rezultate remarcabile pentru acea vreme. Aceste lucrări s-au calculat în *Proiecția pseudoconică echivalentă Bonne*, *elipsoidul Bessel* (1841).

Despre o activitate geodezică organizată la noi în țară se poate vorbi însă după anul 1861 și, în special, după anul 1868 cînd se înființează „Depositul științific de resbel", care, sub diferite denumiri ulterioare, a fost coordonatorul marilor lucrări geodezice din țara noastră (*Institutul geografic al armatei* în 1895, apoi *Institutul geografic militar* în 1930 și din 1951 *Direcția topografică militară*). Au fost abordate lucrări importante, dintre care planul topografic fundamental la scara 1 : 20 000 și pentru celelalte regiuni ale țării a fost obiectivul principal (*Moldova* între anii 1873—1893, *Dobrogea* 1880—1884, *Muntenia de Est* 1893—1899).

În 1895 se creează, în punctul cel mai înalt din *București*, *Dealul Piscului*, observatorul astronomic militar, în același an căpitanul *T. Râmniceanu* determinînd latitudinea sa. Puțin mai tîrziu în anul 1898, se determină azimutul fundamental al țării, pe latura *Observatorul astronomic militar-Foișorul de foc*, iar în anul 1900 se realizează determinarea, cu rezultate foarte bune, a diferenței de longitudine față de *Potsdam*. Datorită prestigiului cucerit prin aceste determinări, *Asociația Internațională de Geodezie* stabilește în același an, ca *București*ul *să fie punct central în determinările de longitudine efectuate în poligonul internațional Potsdam-Paris-Pulkovo*. Pentru aceeași perioadă de timp se pot menționa următoarele: trecerea la elipsoidul *Clarke* (1880), măsurarea extrem de precisă a unor laturi cu fire de invar și rigle bimetalice, cum ar fi baza *Militari-Ciorogîrla*, triangulațiile și ridicările topografice ale unor orașe etc.

Nivelmentul de ordin superior se începe în anul 1898, cînd se instalează și un medimaregraf în portul Constanța, lucrarea fiind încheiată în linii mari în anul 1918, inclusiv cu racordări la rețelele de nivelment austriacă și bulgară.

Începuturile gravimetriei geodezice pot fi legate de lucrările lui *Gogu Constantin*, profesor la *Școala Națională de Poduri și Șosele*, și anume: „Asupra variației gravității în aceeași localitate" — 1893 și „Asupra variației latitudinilor" — 1896 (*Analele Academiei Române*, seria II, vol. XV, *București*, 1893).

Sînt cunoscute în literatura de specialitate determinările efectuate de profesorul *G. Borass* în perioada 1900—1906, pe pilastrul situat în *Observatorul astronomic militar*, la *Galați* — cartierul *Țiglina*, precum și pe alți pilaștri de la capetele bazelor măsurate de *Institutul geografic militar*.

Planul unei triangulații moderne pentru întreaga țară este conceput în anul 1930, prevăzîndu-se printre altele: trecerea la elipsoidul internațional *Hayford* (1909), proiecția stereografică, desfășurarea rețelei de triangulație în lungul meridianelor și paralelelor. În același sens trebuie menționată rețeaua de nivelment realizată după primul război mondial și compensată riguros în anul 1933.

În perioada dintre cele două războaie mondiale lucrările de triangulație geodezică, din acea vreme și unele executate ulterior, sînt legate de numele unor specialiști, conducători de instituții sau profesori universitari: contraamiralul *C. Bucholtzer*, *I. Vidrașcu*, *C. Orășanu*, *I. Klinger*, *D. Pompei*, *I. Stamatin*, *R. Filimon* ș.a.

În anul 1939 a început construcția *Observatorului geofizic de la Căldărușani* (*Surlari*), lîngă *București*, la a cărui modernizare și-a adus o contribuție deosebită *L. Constantinescu*. În aceeași perioadă s-a procurat un aparat de tip *Sterneck* cu care s-a realizat o rețea de stații de pendul, sub conducerea lui *M. Socolescu*. Rețeaua gravimetrică de ord. I a țării noastre s-a realizat între anii 1956—1957 de către *Comitetul geologic*, sub conducerea prof. *R. Botezatu*.

După anul 1951 se poate vorbi de o nouă perioadă în dezvoltarea geodeziei românești. În acest an s-a adoptat elipsoidul *Krasovski* (1942) și sistemul de proiecție *Gauss-Krüger*, creîndu-se o nouă rețea de triangulație de stat de ordinul I-IV și o rețea de ridicare de ordinul V. Rețeaua de triangulație astronomică-geodezică, primordială, a țării a fost continuu îmbunătățită prin efectuarea unor măsurători geodezice, astronomice, gravimetrice de mare precizie, potrivit principiilor moderne de măsurare și compensare a vastelor rețele de triangulație. În aceeași perioadă de timp (1955—1968) s-a creat rețeaua modernă de nivelment geodezic din țara noastră. Coordonatorul și realizatorul principal al acestor ample lucrări a fost *Direcția topografică militară*. Un rol important în dezvoltarea geodeziei contemporane românești revine, de asemenea, *Institutului de geodezie*, *fotogrammetrie*, *cartografie și organizarea teritoriului*, înființat în anul 1958.

Ultimele două decenii sînt caracterizate și prin abordarea unor probleme specifice gravimetriei geodezice, la nivel de producție, dintre care menționăm determinările gravimetrice în lungul liniilor de nivelment de ord. I,

determinările gravimetrice pentru calculul deviației verticale, precum și alte lucrări.

În afara rețelelor geodezice de stat, la care ne-am referit mai înainte, se poate remarca realizarea unor rețele de importanță locală, care se desfășoară uneori pe suprafețe de ordinul sutelor sau chiar miilor de km². Acestea au fost necesare realizării marilor construcții hidrotehnice de pe *Argeș, Dunăre, Lotru, Olt* etc., precum și multor altor construcții civile, industriale, lucrări de organizarea teritoriului, lucrări de irigații sau desecări, de sistematizarea localităților ș.a., impuse de ritmul deosebit de ridicat, pe care l-a cunoscut dezvoltarea societății și a economiei naționale în ultimele decenii.

Prin decretul 305 din 15 septembrie 1971, elaborat de *Consiliul de Stat al R.S. România* se reglementează organizarea și desfășurarea activității geodezice, topo-fotogrammetrice și cartografice din țara noastră, stabilindu-se sarcinile ce revin Ministerului Agriculturii, Industriei Alimentare, precum și altor ministere pentru crearea, dezvoltarea și întreținerea rețelei geodezice de stat.

Sistemul de proiecție oficializat este „sistemul de proiecție stereografică 1970", iar punctul zero fundamental al rețelei de nivelment este raportat la nivelul *Mării Negre*.

Partea întîi

INTRODUCERE ÎN GEODEZIA FIZICĂ

Geodezia fizică studiază cîmpul
gravității și figura Pămîntului
(H. Moritz — 1980)

În prima parte a manualului se vor prezenta elementele de geodezie fizică necesare pentru definirea unor suprafețe de referință și sisteme de coordonate folosite curent în geodezie, precum și pentru abordarea rezolvării problemelor geodeziei utilitare. Manualul nu poate aborda tratarea integrală a problematicii extrem de complexe a geodeziei fizice, atît datorită destinației sale, cît și limitelor pe care le poate atinge. Cititorul interesat are la dispoziție o vastă bibliografie în acest domeniu (*Ledersteger* 1968, *Heiskanen* și *Moritz* 1967, *Dragomir* ș.a. 1977, *Moritz* 1980 ș.a.).

Este necesar de arătat, încă de la început, că dezvoltările care se vor efectua în manual se bazează pe ipoteza considerării Pămîntului ca un *corp rigid*. Aspectele deosebite pe care le prezintă introducerea *elasticității în timp a Pămîntului* pot fi urmărite în literatura menționată mai înainte. Deosebirile sînt, în primul rînd, de natură teoretică și pot fi apreciate ca mici pentru marea majoritate a lucrărilor geodezice.

Capitolul 1
ELEMENTE DE TEORIA POTENȚIALULUI

1.1. CÎMPUL GRAVITĂȚII

Un punct material situat pe suprafața Pămîntului este supus acțiunii unor multiple forțe: *gravitația* sau *forța de atracție*, îndreptată spre centrul de masă al Pămîntului, $\vec{F}$, *forța centrifugă* $\vec{q}$ (v. fig. 1-4), forțele de atracție exercitate de alte corpuri cerești (dintre care forțele de atracție ale Soarelui, datorită masei sale și respectiv ale Lunii, datorită apropierii sale de Pămînt, sînt cele mai importante) a căror componentă este *greutatea* sau *gravitatea* $\vec{g}$.

Regiunea din spațiu în care se extinde influența complexă a atracției gravitaționale și a rotației Pămîntului constituie *cîmpul gravității* sau *cîmpul gravific* (*Constantinescu* 1964).

1.1.1. FORȚA DE ATRACȚIE (GRAVITAȚIA)

Potrivit cu legea atracției universale, a lui *Newton*, *forța de atracție reciprocă* $\vec{F}$ dintre două mase punctiforme m_1 și m_2, situate la distanța d este dată de relația:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{d}_0, \tag{1-1}$$

unde: $\vec{d}_0$ este versorul direcției care unește masele m_1 și m_2, iar G — coeficientul de proporționalitate denumit *constanta atracției universale*.

Recomandările *Asociației internaționale de geodezie* (*AIG*) din anul 1980 prevăd pentru această constantă valoarea:

$$G = (6\ 672 \pm 4{,}1) \times 10^{-14}\ \mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}, \tag{1-2}$$

în *sistemul internațional* (*SI*).

Constanta atracției universale este numeric egală cu forța cu care se atrag între ele două corpuri cu masele egale cu unitatea, situate unul față de celălalt la o distanță egală cu unitatea.

Noțiunea de „masă egală cu unitatea", ca și noțiunea de „punct material" sînt convenționale, utile însă în raționamente.

Aceste noțiuni indică faptul că dimensiunile, respectiv masa corpului considerat (de exemplu un punct geodezic situat pe suprafața Pămîntului) sînt neglijabile față de dimensiunile, respectiv masa sistemelor cu care acel corp este în interacțiune (Pămîntul, în exemplul considerat).

Forța de atracție exercitată de Pămînt asupra unui punct de masă egală cu unitatea poate fi evaluată, *aproximativ*, cu relația:

$$F = G \frac{M}{R^2}, \tag{1-3}$$

unde:

M este masa Pămîntului;

R — raza medie a Pămîntului, *de exemplu raza medie Gauss* (vezi partea a doua a manualului);

GM — *constanta gravitațională geocentrică*, pentru care recomandările *AIG* 1980 prevăd:

$$GM = (39\ 860\ 047 \pm 5) \times 10^7\ \mathrm{m^3\ s^{-2}}. \tag{1-4}$$

Se pot deduce și unele valori cu caracter de orientare generală:

— *masa Pămîntului* M:

$$M \approx 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}, \tag{1-5}$$

și, în ipoteza formei sferice a Pămîntului cu $R \approx 6\ 378 \times 10^3$ m (pentru latitudinea $B = 45°$):

— *densitatea medie a Pămîntului*:

$$\rho_m^s \approx 5{,}50 \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}. \tag{1-6}$$

În ipoteza formei elipsoidice a Pămîntului rezultă densitatea medie:

$$\rho_m^e \approx 5{,}52 \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}. \tag{1-7}$$

Caracterul aproximativ al formulei (1-3) este generat de imprecizia cu care se cunosc, sau se pot determina, elementele componente. Această remarcă este valabilă și pentru densitatea medie ρ_m, care, de fapt, este o funcție de mai mulți parametri, dintre care cel mai important este adîncimea față de suprafața terestră.

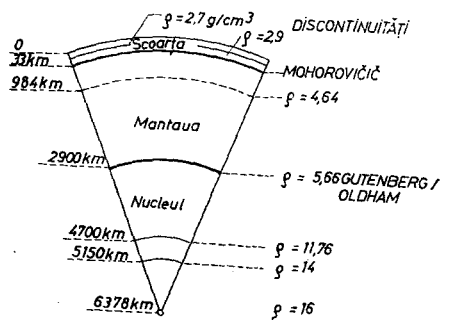


Fig. 1-1. Variația densității (*Socolescu* ș.a. 1975).

Fără a intra în detaliile care interesează în mod deosebit geofizica se prezintă unele informații privind variația în mărimea densității, care se pot urmări și pe figura 1-1 (*Socolescu* ș.a. 1975).

Într-o primă zonare, de ordinul I, structura internă a Pămîntului este reprezentată de trei geosfere: *scoarța*, *mantaua* și *nucleul*. Limitele dintre aceste sfere se numesc *discontinuități de ordinul I*: *discontinuitatea Mohorovičič* (denumită curent *discontinuitatea Moho*) și respectiv *discontinuitatea Oldham* ori *Gutenberg*.

Se apreciază că discontinuitatea *Moho* se află la o distanță medie de 33 km, punctîndu-se însă și variații concave de 40—50 km, sub blocurile continentale, și ondulații convexe de pînă la 5 km, sub zonele oceanice.

Scoarța terestră este constituită din două strate: stratul bazaltic continuu și stratul granitic discontinuu, ambele de grosimi variabile. Deasupra acestor strate urmează depozitele stratului sedimentar, care are, de asemenea, grosimi variabile.

Pentru stratul granitic se acceptă densitatea $\rho_g = 2{,}7$ g/cm³, iar pentru calcule mai precise 2,67 g/cm³.

În continuare pot fi menționate și subîmpărțiri, respectiv *discontinuități de ordinul II*, a căror poziționare pe verticală în raport de scoarța terestră nu este unanim acceptată în lucrările de specialitate.

Pentru a putea exprima mai exact forța de atracție, se consideră un punct $P\ (x,y,z)$ pe suprafața Pămîntului și un punct curent $A\ (a,b,c)$, situat la depărtarea l de punctul P (fig. 1-2).

Pentru simplificarea raționamentelor se acceptă că punctul atras P are masa egală cu unitatea, iar masa punctului atractiv A (denumit și punct sursă) este m.

Într-un sistem de coordonate rectangular XYZ, de exemplu cel descris în Anexa 3, expresia forței de atracție este:

$$\vec{f} = -G \frac{m}{l^2} \vec{l}_0, \tag{1-8}$$

unde: $\vec{l}_0$ este versorul vectorului de poziție $\vec{l}$.

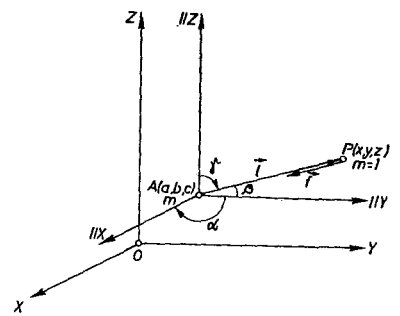


Fig. 1-2. Forța de atracție.

Componentele forței de atracție $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$ vor fi:

$$f_x = f\cos(\vec{f},X) = -G\frac{m}{l^2}\frac{x-a}{l} = -Gm\frac{x-a}{l^3};$$

$$f_y = f\cos(\vec{f},Y) = -Gm\frac{y-b}{l^3}; \qquad (1\text{-}9)$$

$$f_z = f\cos(\vec{f},Z) = -Gm\frac{z-c}{l^3},$$

unde:

$$l = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \qquad (1\text{-}10)$$

Pentru stabilirea influenței de atracție a întregului Glob terestru asupra punctului P, va trebui pusă în evidență variația densității pentru fiecare element de volum dv:

$$\rho = \rho(a,b,c) = \frac{dm}{dv}, \qquad (1\text{-}11)$$

obținînd din relația (1-8) prin integrare de volum expresia căutată:

$$\vec{F} = -G\iiint_v \frac{dm}{l^2}\vec{l}_0 = -G\iiint_v \frac{\rho}{l^2}\cdot\vec{l}_0\,dv. \qquad (1\text{-}12)$$

Componentele pe axele de coordonate vor fi:

$$F_x = -G\iiint_v \frac{x-a}{l^3}\rho\,dv;$$

$$F_y = -G\iiint_v \frac{y-a}{l^3}\rho\,dv; \qquad (1\text{-}13)$$

$$F_z = -G\iiint_v \frac{z-a}{l^3}\rho\,dv,$$

unde:

$$dv = da\,db\,dc. \qquad (1\text{-}14)$$

1.1.2. FORȚA CENTRIFUGĂ

Datorită mișcării de rotație a Pământului în jurul axei sale, punctul P este supus unei forțe centrifuge $\vec{q}$, care acționează în planul paralelului (de rază r) al punctului P (fig. 1-3).

Particularizînd expresia cunoscută, din mecanică, pentru forța centrifugă în cazul punctului P, cu masa egală cu unitatea, în funcție de *viteza liniară pe traiectorie* v, se obține:

$$\vec{q} = \frac{v^2}{r}\vec{r}_0. \qquad (1\text{-}15)$$

Folosind relația de legătură dintre viteza liniară și *viteza unghiulară* ω:

$$v = r\omega, \qquad (1\text{-}16)$$

rezultă:

$$\vec{q} = r\omega^2\vec{r}_0. \qquad (1\text{-}17)$$

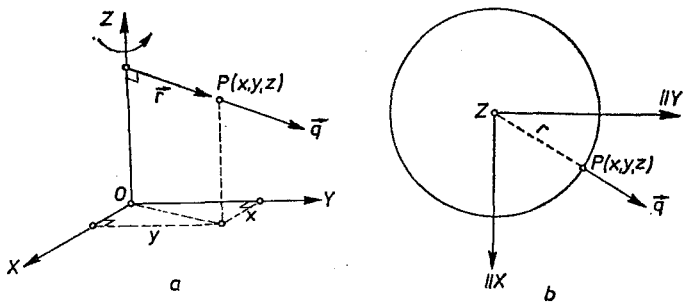


Fig. 1-3. Forța centrifugă.

Viteza unghiulară medie, în cazul Pământului, recomandată de *AIG* — 1980 este:

$$\omega = 7\ 292\ 115 \times 10^{-11}\ \text{rad s}^{-1}. \qquad (1\text{-}18)$$

Din relația (1-17) se observă că forța centrifugă este variabilă pe suprafața Pământului, avînd o valoare maximă pentru punctele situate pe ecuator și fiind nulă pentru poli, unde $r = 0$. Pentru a puncta ordinul de mărime, se poate reține raportul:

$$\frac{q_{ec}}{F_{ec}} \approx \frac{1}{300}. \qquad (1\text{-}19)$$

Componentele forței centrifuge $\vec{q}(q_x, q_y, q_z)$ vor fi:

$$q_x = q\cos(\vec{q},X) = r\frac{x}{r}\omega^2 = x\,\omega^2;$$

$$q_y = q\cos(\vec{q},Y) = y\,\omega^2; \qquad (1\text{-}20)$$

$$q_z = q\cos(\vec{q},Z) = 0.$$

1.1.3. GRAVITATEA (GREUTATEA)

Așa cum s-a arătat anterior, gravitatea este componenta tuturor forțelor care acționează asupra punctului P. În manual, se vor lua în considerație componentele principale examinate anterior (fig. 1-4):

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{q}. \qquad (1\text{-}21)$$

Lucrîndu-se cu puncte de masă egală cu unitatea, gravitatea este numeric egală cu accelerația sa. Unitatea de măsură în sistemul *CGS* este *galul* (cm s^{-2}), denumire adoptată în amintirea marelui învățat italian *Galileo Galilei*. Deoarece la pol mărimea gravitației este aproximativ egală cu 983 gal, iar la ecuator de aproximativ 978 gal, rezultă o variație mult prea nesemnificativă în această

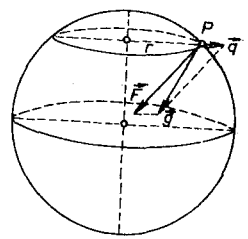


Fig. 1-4. Greutatea.

unitate de măsură. De aceea în geodezia fizică se lucrează în miligali (1 mgal = 10^{-3} gal), instrumentele de măsură actuale avînd o precizie de ordinul a $\pm$ 0,01 mgal sau chiar şi mai bună.

Deoarece relaţia (1-21) se conservă şi prin trecerea la proiecţiile pe cele trei axe, se obţin componentele gravităţii $\vec{g}\,(g_x,\ g_y,\ g_z)$:

$$g_x = F_x + q_x = -G\iiint_v \frac{x-a}{l^3}\rho dv + x\omega^2;$$

$$g_y = F_y + q_y = -G\iiint_v \frac{y-a}{l^3}\rho dv + y\omega^2; \qquad (1\text{-}22)$$

$$g_z = F_z + q_z = -G\iiint_v \frac{z-a}{l^3}\rho dv.$$

1.2. POTENŢIALUL GRAVITĂŢII

Pentru descrierea unui cîmp de forţe se utilizează o funcţie introdusă de *Laplace*, denumită *potenţial*, care poate fi definită atît matematic, cît şi prin semnificaţiile sale fizice. Matematic, se defineşte potenţialul unui cîmp de forţe ca funcţia ale cărei derivate parţiale sînt componentele cîmpului pe axele de coordonate.

1.2.1. POTENŢIALUL DE ATRACŢIE (NEWTONIAN)

Potenţialul cîmpului gravitaţiei numit şi *potenţial de atracţie* sau *potenţial newtonian* are expresia matematică completă în cazul unui *corp solid* de volum v:

$$V\ (x, y, z) = G\iiint_v \frac{\rho(a,\ b,\ c)\ da\ db\ dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}, \qquad (1\text{-}22)$$

sau mai simplu ţinînd seama de (1-10) şi (1-14):

$$V = G\iiint_v \frac{\rho\ dv}{l} = G\iiint_v \frac{dm}{l}. \qquad (1\text{-}23)$$

O b s e r v a ţ i e. Potenţialul V este o funcţie continuă în întregul spaţiu şi tinde către zero la infinit, la fel ca şi funcţia $\frac{1}{l}$, cînd $l \to \infty$.

Prin particularizare, în cazul punctului atras de masă egală cu unitatea, potenţialul de atracţie al unui punct sursă de masă m, situat la distanţa l, va fi:

$$V = \frac{Gm}{l}. \qquad (1\text{-}24)$$

Din definiţia (1-22) se observă apartenenţa funcţiei V la un anumit punct $P\ (x,y,z)$, precum şi rolul punctului sursă $A\ (a,b,c)$.

Derivata parţială în raport cu x a funcţiei V este:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G\iiint_v \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\right)dv. \qquad (1\text{-}25)$$

Deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{1}{l^2}\frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{1}{l^2}\frac{x-a}{l}, \qquad (1\text{-}26)$$

se obţine:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -G\iiint_v \frac{x-a}{l^3}\rho dv = F_x = F\cos(\vec{F},\ X). \qquad (1\text{-}27)$$

În mod analog rezultă:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y = F\cos(\vec{F},\ Y);\quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_z = F\cos(\vec{F},\ Z). \qquad (1\text{-}28)$$

Cînd sînt îndeplinite relaţiile (1-27) şi (1-28) se consideră, că F este gradient de V:

$$\vec{F} = \text{grad}\ V, \qquad (1\text{-}29)$$

sau:

$$F = \nabla V, \qquad (1\text{-}30)$$

unde ∇ este *operatorul lui Hamilton*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad (1\text{-}31)$$

iar $\vec{i}.\ \vec{j},\ \vec{k}$ sînt versorii pe axele de coordonate $x,\ y,\ z$.

Prin urmare ∇V este un vector:

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \vec{F}.$$

Semnificaţia fizică a potenţialului. Elementul diferenţial dV al potenţialului de atracţie, în cazul a două puncte infinit apropiate $P(x,\ y,\ z)$ şi $P(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ de mase egale cu unitatea, situate la distanţa ds este:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz, \qquad (1\text{-}32)$$

unde:

$$dx = ds\cos(\vec{s},\ X);$$

$$dy = ds\cos(\vec{s},\ Y); \qquad (1\text{-}33)$$

$$dz = ds\cos(\vec{s},\ Z).$$

Considerînd şi relaţiile (1-28) şi (1-29) rezultă:

$$dV = ds\,F\ \{\cos(\vec{F},\ X)\cos(\vec{s},\ X) + \cos(\vec{F},\ Y)\cos(\vec{s},\ Y) + \cos(\vec{F},\ Z)\cos(\vec{s},\ Z)\}, \qquad (1\text{-}34)$$

adică:

$$dV = ds\, F \cos(\vec{F}, \vec{s}),$$

sau mai prescurtat:

$$dV = ds F_s, \tag{1-35}$$

unde F_s reprezintă proiecția gravitației pe direcția s oarecare.

Această relație scrisă sub forma:

$$\frac{dV}{ds} = F_s, \tag{1-36}$$

reprezintă proprietatea fundamentală a scalarului potențial (în general) și anume: derivata potențialului după o anumită direcție este egală cu proiecția cîmpului după acea direcție. Relațiile (1-28) și (1-29) sînt, prin urmare, cazuri particulare ale formulei (1-36).

Din expresia (1-35) rezultă că elementul infinit mic de potențial gravitațional dV reprezintă lucrul mecanic pe care îl efectuează forța de atracție $\vec{F}$ pentru deplasarea punctului P, de masă egală cu unitatea, în punctul P, situat la distanța ds.

Observație. Pentru două puncte P (de masă egală cu unitatea) și respectiv S (punct sursă, de masă m), situate la o distanță D oarecare, potențialul cîmpului de atracție va fi reprezentat de lucrul mecanic:

$$L_{P,S} = \int_P^S F \cos(\vec{F}, \vec{D})\, dD = \int_P^S dV = V_S - V_P. \tag{1-37}$$

Presupunînd că $P \to \infty (D \to \infty)$, atunci $V_P \to 0$, rezultînd prin urmare:

$$L_{\infty,S} = V_S. \tag{1-38}$$

Potențialul cîmpului forței de atracție într-un punct este egal cu lucrul mecanic efectuat de forța de atracție pentru deplasarea unității de masă de la infinit în punctul dat.

Această proprietate este specifică potențialului gravitațional, și nu în general; în particular, aceasta nu este valabilă nici pentru potențialul cîmpului gravității W [v. rel. (1—43)].

1.2.2. POTENȚIALUL FORȚEI CENTRIFUGE

Potențialul din care derivă forța centrifugă este reprezentat de următoarea funcție:

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{1-39}$$

În adevăr, se observă că:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q_x; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = q_y; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = q_z = 0, \tag{1-40}$$

adică:

$$\vec{q} = \text{grad } Q = \nabla Q. \tag{1-41}$$

Considerînd relațiile (1-19), (1-29) și (1-41), se obține *expresia matematică a potențialului cîmpului gravității*:

$$\vec{g} = \text{grad } W = \nabla W = \text{grad } V + \text{grad } Q, \tag{1-42}$$

sau:

$$W = V + Q = G \iiint_v \frac{\rho\, dv}{l} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{1-43}$$

1.3. POTENȚIALUL DE ATRACȚIE AL UNOR CORPURI SIMPLE

Corpurile simple sînt corpurile a căror geometrie este definită. Se presupune că aceste corpuri au densitatea ρ omogenă, adică $\rho = \rho(D)$, unde D este distanța de la centrul mase lor sursă la punctul atras.

Pentru simplificarea calculelor se consideră sistemul rectangular de axe x, y, z într-un caz particular, și anume (fig. 1-5) axa z să treacă prin punctul atras P, de masă egală cu unitatea, care va avea, prin urmare, coordonatele $(0, 0, D)$.

1.3.1. STRATUL SFERIC DE RAZE R_1 și R_2. PUNCTUL ATRAS ESTE EXTERIOR STRATULUI SFERIC

Se consideră stratul sferic cu razele R_1 și R_2 $(R_2 > R_1)$, punctul atras fiind situat în afara stratului sferic $(D > R_2)$.

Fie un element de masă dm din stratul sferic, a cărui poziție curentă este definită prin coordonate sferice (raza vectoare R, colatitudinea θ și longitudinea L). Deoarece:

$$dm = \rho\, dv = \rho\, ds_m \cdot ds_p \cdot dR,$$

ds_m și ds_p fiind arcele elementare de meridian și paralel:

$$ds_m = R\, d\theta; \quad ds_p = R \sin\theta\, dL,$$

rezultă:

$$dm = \rho R^2 \sin\theta\, d\theta\, dL\, dR. \tag{1-44}$$

Potențialul de atracție al stratului sferic V_{st} poate fi exprimat în funcție de relația (1-23):

$$V_{st} = G \iiint_v \frac{dm}{l} \tag{1-45}$$

sau, introducînd (1-44) și separînd variabilele:

$$V_{st} = G\rho \int_{R_1}^{R_2} R^2\, dR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{l} \int_0^{2\pi} dL. \tag{1-46}$$

Ultima integrală fiind imediată, rezultă:

$$V_{st} = 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} R^2\, dR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{l}. \tag{1-47}$$

În continuare, calculele se pot desfășura mai ușor dacă se introduce o schimbare de variabilă. Din relația:

$$l^2 = D^2 + R^2 - 2RD\cos\theta,$$

se obține:

$$2l\, dl = 2RD \sin\theta\, d\theta,$$

și deci:

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{l} = \frac{dl}{RD}. \tag{1-48}$$

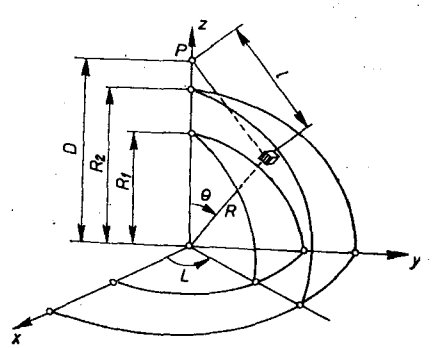


Fig. 1-5. Potențialul de atracție a stratului sferic.

Limitele în schimbarea de variabilă vor fi:

pentru: $\theta = +\pi/2$ corespunde $l = D - R$;

$\theta = -\pi/2$ $l = D + R$.

Cu aceasta, deoarece D = constant, rezultă:

$$V_{st} = \frac{2\pi G\rho}{D} \int_{R_1}^{R_2} R\,dR \int_{D-R}^{D+R} dl; \tag{1-49}$$

$$V_{st} = \frac{2\pi G\rho}{D} \int_{R_1}^{R_2} R \mid D + R - D + R \mid dR; \tag{1-50}$$

$$V_{st} = \frac{4\pi G\rho}{D} \int_{R_1}^{R_2} R^2\,dR,$$

adică:

$$V_{st} = \frac{4\pi G\rho}{3D}(R_2^3 - R_1^3).$$

Deoarece masa stratului sferic este:

$$M_{st} = \frac{4}{3}\pi\rho\,(R_2^3 - R_1^3),$$

rezultă

$$V_{st} = G\frac{M_{st}}{D}. \tag{1-51}$$

Observație. Din relația (1—52) rezultă că potențialul de atracție al stratului sferic poate fi calculat după formula (1—24), valabilă în cazul punctului material de masă m, cu condiția ca masa acestui strat M_{st} să fie concentrată în centrul său.

1.3.2. SFERA DE RAZĂ R. PUNCTUL ATRAS ESTE EXTERIOR SFEREI

Potențialul de atracție V_{st} al unei sfere, cu densitate omogenă, în cazul în care punctul atras se află la distanța D de centrul sferei, poate fi calculat din relația (1-51) prin particularizarea:

$$R_1 = 0 \qquad R_2 = R,$$

rezultînd:

$$V_{sf} = \frac{4\pi G\rho}{3D} R^3. \tag{1-52}$$

Deoarece masa sferei de rază R și densitate omogenă este:

$$M_{sf} = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

rezultă:

$$V_{sf} = G\frac{M_{sf}}{D}. \tag{1-53}$$

Prin urmare, remarca de sub relația (1-51) este valabilă, în mod corespunzător, și în cazul examinat aici.

1.3.3. PUNCTUL ATRAS ESTE SITUAT ÎN INTERIORUL STRATULUI SFERIC, DE RAZE R_1 și R_2

Potențialul de atracție V_i se obține, în acest caz, din particularizarea $D = R$ în integrala (1-50), după care rezultă:

$$V_i = 2\pi G\rho\,(R_2^2 - R_1^2). \tag{1-51}$$

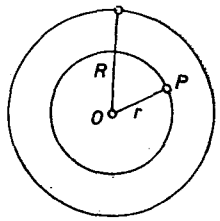


Fig. 1-6. Potențialul de atracție a unei sfere, de rază R, în cazul în care punctul atras se află la distanța r de centru.

1.3.4. PUNCTUL ATRAS SE AFLĂ SITUAT ÎN INTERIORUL UNEI SFERE, DE RAZĂ R, LA O DISTANȚĂ r DE CENTRU

Pentru calculul potențialului de atracție, în acest caz, se duce prin punctul P o sferă auxiliară de rază r (fig. 1-6).

Potențialul de atracție V_I apare format din două componente:

$$V_I = V_{sf} + V_i, \tag{1-55}$$

și anume:

V_{sf} este potențialul de atracție al sferei de rază r și punctul P exterior sferei:

$$V_{sf} = \frac{4\pi G\rho}{3r} r^3 = \frac{4\pi G\rho r^2}{3}; \tag{1-56}$$

V_i — potențialul de atracție al stratului sferic de raze R și r, în cazul în care punctul P se află în interiorul stratului:

$$V_i = 2\pi G\rho\,(R^2 - r^2). \tag{1-57}$$

În acest fel, rezultă din relația (1-55):

$$V_I = \frac{2\pi G}{3}\rho\,(3R^2 - 3r^2 + 2r^2),$$

adică:

$$V_I = \frac{2\pi G\rho}{3}(3R^2 - r^2). \tag{1-58}$$

1.3.5. PUNCTUL ATRAS SE AFLĂ PE SFERA DE RAZĂ R

Potențialul de atracție poate fi determinat din relația (1-58) cu condiția $r = R$:

$$V_{sf} = \frac{4\pi G\rho}{3} R^2 = G\frac{M_{sf}}{R}. \tag{1-59}$$

Aceeași expresie se obține și din formula (1-52) sub condiția $D = R$.

1.4. ECUAȚIILE LAPLACE – POISSON

Produsul scalar dintre un vector oarecare $\vec{\Phi}(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ și operatorul gradient:

$$\nabla\cdot\vec{\Phi} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\Phi_x\vec{i} + \Phi_y\vec{j} + \Phi_z\vec{k}\right),$$

este scalarul:

$$\nabla \cdot \vec{\Phi} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{\Phi},$$

numit divergența vectorului $\vec{\Phi}$, notat div $\vec{\Phi}$.

Rezultă prin urmare:

$$\operatorname{div} \vec{g} = \nabla \cdot \vec{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}, \tag{1-60}$$

iar împreună cu relația (1-42):

$$\operatorname{div} g = \nabla \cdot (\nabla W) = \nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \tag{1-61}$$

Mărimea ∇^2:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-62}$$

se numește *operator Laplace* sau, mai simplu, *laplacian*, și se notează; obișnuit, cu $\triangle$.

Se folosesc uzual și notațiile:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = W_{xx}, \frac{\partial^2 W}{\partial xy} = W_{xy} \text{ ... ș.a.m.d.,} \tag{1-63}$$

astfel că:

$$\triangle W = \nabla^2 W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz}. \tag{1-64}$$

Din relația (1-42) rezultă de asemenea:

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V + \nabla^2 Q. \tag{1-65}$$

Cîmp laplacian este cîmpul care derivă dintr-un potențial al cărui laplacian este nul.

1.4.1. LAPLACIANUL CÎMPULUI GRAVITAȚIONAL

În cazul în care punctul atras este exterior maselor sursă, laplacianul potențialului cîmpului gravitațional este:

$$V_e = G \iiint_v \frac{\mathrm{d}m}{l}, \tag{1-23}$$

și de asemenea:

$$F_x = \frac{\partial V_e}{\partial x} = -G \iiint_v \frac{x-a}{l^3} \mathrm{d}m, \tag{1-13}$$

astfel încît:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \frac{\partial F_x}{\partial x} = -G \iiint_v \left\{ \frac{1}{l^3} - \frac{3(x-a)}{l^4} \cdot \frac{\partial l}{\partial x} \right\} \mathrm{d}m.$$

Deoarece:

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{x-a}{l},$$

rezultă:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = -G \iiint_v \left\{ \frac{1}{l^3} - \frac{3(x-a)^2}{l^5} \right\} \mathrm{d}m;$$

și analog:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = -G \iiint_v \left\{ \frac{1}{l^3} - \frac{3(y-b)^2}{l^5} \right\} \mathrm{d}m;$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = -G \iiint_v \left\{ \frac{1}{l^3} - \frac{3(z-c)^2}{l^5} \right\} \mathrm{d}m.$$

Adunînd ultimele trei relații se obține:

$$\nabla^2 V_e = 0. \tag{1-66}$$

Aceasta este *ecuația Laplace*, din care rezultă că pentru un punct exterior maselor sursă, cîmpul gravitațional este laplacian.

Soluțiile ecuației Laplace se numesc *funcții armonice*. Prin urmare potențialul gravitațional este o funcție armonică în exteriorul maselor sursă.

Funcțiile armonice satisfac ecuația *Laplace* în oricare punct al domeniului V. Se poate arăta că funcțiile armonice sînt funcții analitice, adică sînt continue, împreună cu derivatele lor de orice ordin.

O funcție armonică deosebit de utilă pentru calculele din geodezia fizică este inversul distanței:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

În adevăr, deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{x-a}{l^3}.$$

și

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{-l^2 + 3(x-a)^2}{l^5},$$

împreună cu:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{-l^2 + 3(y-b)^2}{l^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{-l^2 + 3(z-c)^2}{l^5},$$

rezultă:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{l}\right) = 0, \tag{1-67}$$

deci, $\frac{1}{l}$ este o funcție armonică.

Observație. În punctul pentru care $l = 0$ și $1/l = \infty$, nu se poate aplica acest raționament, funcția $1/l$ nefiind armonică în acest singur punct.

Laplacianul cîmpului gravitațional în cazul cînd punctul atras este situat în interiorul maselor sursă este:

$$V_I = \frac{2\pi G\rho}{3}(3R^2 - r^2). \tag{1-58}$$

Ținînd seama că punctul atras este $P\ (x,y,z)$, că raza sferei R este de mărime constantă și că distanța r față de un punct curent $A\ (a,b,c)$ se calculează cu:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

se obține:

$$\frac{\partial V_I}{\partial x} = -\frac{4\pi G\rho}{3} r \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Deoarece:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r},$$

rezultă:

$$\frac{\partial V_I}{\partial x} = -\frac{4\pi G\rho}{3}(x-a)$$

și în continuare:

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial x^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}.$$

În mod analog:

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial y^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}; \qquad \frac{\partial^2 V_I}{\partial z^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3},$$

astfel încît:

$$\nabla V_I = -4\pi G\rho. \tag{1-68}$$

Aceasta este *ecuația Poisson*, dedusă în anul 1813, din care rezultă că potențialul gravitațional nu este o funcție armonică în interiorul maselor sursă.

Observație. Din compararea relațiilor (1—66) și (1—68) se observă că ecuația *Laplace* este un caz particular al ecuației *Poisson*, pentru $\rho = 0$.

1.4.2. LAPLACIANUL CÎMPULUI GRAVITAȚII

Se calculează laplacianul potențialului forței centrifuge. Deoarece:

$$q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = \omega^2 x, \tag{1-20}$$

rezultă:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \omega^2.$$

Analog se obține:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \omega^2; \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

astfel încît:

$$\nabla^2 Q = 2\omega^2. \tag{1-69}$$

Prin urmare, cîmpul forței centrifuge nu este laplacian.

Laplacianul cîmpului gravității, în cazul punctelor atrase exterioare, se obține din însumarea relațiilor (1-66) și (1-69), pe baza observației (1-65):

$$\nabla^2 W_e = 2\omega^2, \tag{1-70}$$

iar în cazul în care punctul atras se află în interiorul maselor sursă, din însumarea relațiilor (1-68) și (1-69):

$$\nabla^2 W_I = 2\omega^2 - 4\pi G\rho. \tag{1-71}$$

Din relațiile (1-70) și (1-71) rezultă: cîmpul gravității nu este laplacian nici în cazul punctelor situate în interiorul maselor sursă, adică potențialul gravității nu este o funcție armonică.

1.5. FORMULE INTEGRALE. PROBLEME LIMITĂ ÎN TEORIA POTENȚIALULUI

Formulele integrale care vor fi prezentate inițial sub forma lor generală și apoi particularizate în cazul potențialului gravitațional sînt cunoscute în numeroase domenii ale tehnicii. Deducerea lor poate fi urmărită în manualele de matematici superioare (*Iacob* 1957, *Șabac* 1964 ș.a.).

1.5.1. FORMULA INTEGRALĂ GREEN-OSTROGRADSKI

Fie un volum v delimitat de suprafața σ și un cîmp de vectori $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, ale cărui componente F_x, F_y, F_z sînt funcții continue, ca și derivatele lor, de ordinul întîi, în v.

Formula *Green-Ostrogradski* (Iacob 1957) cunoscută în unele publicații ca formula *Ostrogradski* (*Grușinskii* 1963) sau în altele (*Heiskanen* 1967, *Sigl* 1973) ca formula *Gauss* poate fi formulată astfel:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dv = \iint_\sigma (F_x\alpha + F_y\beta + F_z\gamma)\, d\sigma, \tag{1-72}$$

unde α, β, γ reprezintă proiecțiile pe axe ale versorului n, al normalei exterioare la suprafața σ. Prima parte a formulei se poate scrie mai concentrat sub forma:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dv = \iiint_v \operatorname{div} \vec{F}\, dv,$$

sau, în cazul în care $\vec{F} = \operatorname{grad} V$:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dv = \iiint_v \nabla^2 V\, dv. \tag{1-73}$$

Prin urmare, o combinație liniară între funcția de determinat și derivata sa normală ia valorile funcției f pe frontiera domeniului D. Atunci cînd unul din parametrii h, respectiv k, ia valoarea zero, această a treia problemă limită devine una din celelalte două probleme menționate.

Cele trei probleme limită au o importanță deosebită în multe domenii ale științei și tehnicii (electrostatică, hidrodinamică ș.a.) printre care și geodezia fizică.

Astfel, trecerea de la formulările generale se poate face, în geodezia fizică, prin următoarele particularizări:

— funcția V este considerată potențial gravitațional terestru, care este o funcție armonică în exteriorul maselor sursă;

— domeniul D este suprafața Pămîntului.

De exemplu, problemele limită ar putea fi enunțate în geodezia fizică în modul următor:

— se cunoaște potențialul gravitațional pe suprafața Pămîntului $f=V|_D$. Se caută V_e, potențialul pentru spațiul exterior suprafeței Pămîntului;

— se cunosc derivatele normale ale potențialului gravitațional pe suprafața Pămîntului $f=\frac{\partial V}{\partial n}\Big|_D$. Se caută V_e;

— se cunosc combinații liniare între potențialul gravitațional și derivatele sale normale $f=\left(hV+k\frac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_D$ pe suprafața Pămîntului. Se caută V_e.

Trebuie făcută observația că suprafața Pămîntului rămînînd necunoscută, în geodezia fizică problemele limită sînt rezolvate pe o suprafață apropiată de aceasta, de obicei pe un elipsoid sau pe sfera de rază medie R.

1.6. FUNCȚII ARMONICE SFERICE. FUNCȚII LEGENDRE

Dintre funcțiile armonice, care au fost definite în 1.4., o importanță deosebită pentru geodezia fizică o au funcțiile armonice sferice.

Legătura dintre coordonatele rectangulare (x,y,z) și coordonatele sferice $(r,\ \theta,\ L)$ ale unui punct P (fig. 1-7) este dată de următoarele grupuri de relații:

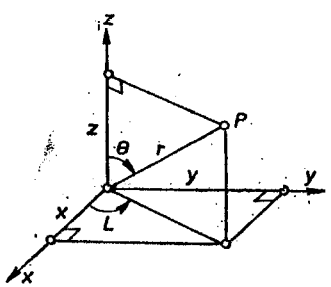


Fig. 1-7. Sistemele de coordonate rectangulare și coordonate sferice.

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta\cos L;\\ x &= r\sin\theta\sin L;\\ z &= r\cos\theta, \end{aligned} \qquad (1\text{-}88)$$

respectiv,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2};\\ \theta &= \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}};\\ L &= \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}. \end{aligned} \qquad (1\text{-}89)$$

Expresia finală a ecuației *Laplace* în coordonate sferice este:

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial L^2}=0. \qquad (1\text{-}90)$$

O funcție omogenă de ordinul n, exprimată în coordonate sferice r, θ, L, poate fi reprezentată sub forma unui produs de două funcții, dintre care una depinde numai de r, iar cealaltă numai de θ și L:

$$V(r,\theta,L)=f(r)\cdot Y(\theta,L).$$

Dacă $V(r,\theta,L)$ este o soluție a ecuației *Laplace*, atunci se numește *funcție armonică sferică de volum*, iar $Y(\theta,L)$ este o *funcție armonică sferică de suprafață*.

În acest caz, se poate scrie ecuația Laplace (1-90) și sub forma:

$$r^2Y\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2rY\frac{\partial f}{\partial r}+f\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+f\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{f}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}=0,$$

sau, după împărțire cu Yf și separarea variabilelor:

$$\frac{1}{f(r)}\left(r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2r\frac{\partial f}{\partial r}\right)=-\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}\right). \qquad (1\text{-}91)$$

Se observă că partea stîngă a relației de mai sus depinde numai de r, iar partea dreaptă doar de θ și L. Aceasta înseamnă că ambele părți sînt egale cu o anumită constantă arbitrară, $n(n+1)$:

$$r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2r\frac{\partial f}{\partial r}-fn(n+1)=0; \qquad (1\text{-}92)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}+Yn(n+1)=0. \qquad (1\text{-}93)$$

Pentru ecuația (1-92) rezultă soluțiile:

$$f(r)=r^n \text{ și } f(r)=r^{-(n+1)}, \qquad (1\text{-}94)$$

care pot fi verificate prin substituție. Notînd soluțiile ecuației (1-93) cu $Y_n(\theta,L)$, care vor fi determinate în continuare, rezultă că ecuația (1-90) admite soluțiile:

$$V=r^nY_n(\theta,L) \text{ și } V=\frac{Y_n(\theta,L)}{r^{n+1}}. \qquad (1\text{-}95)$$

Se poate arăta că n trebuie să fie un număr întreg.

Suma acestor soluții este de asemenea o soluție a ecuației *Laplace*, astfel că forma generală va fi:

$$V_{(r,\theta,L)}=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,L) \text{ și } V_{(r,\theta,L)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\theta,L)}{r^{n+1}}. \qquad (1\text{-}96)$$

Funcția sferică de suprafață $Y_n(\theta,L)$ poate fi descompusă, în mod similar ca pînă acum, în două funcții:

$$Y_n(\theta,L)=g(\theta)\cdot h(L),$$

Deoarece:

$$\alpha = n\cos(\vec{n}, X);\ \beta = n\cos(\vec{n}, Y);\ \gamma = n\cos(\vec{n}, Z), \tag{1-74}$$

se obține, împreună cu relațiile (1-27) și (1-28):

$$F_x\alpha + F_y\beta + F_z\gamma = F\cos(\vec{F}, \vec{n}) = F_n, \tag{1-75}$$

sau, potrivit cu formula (1-36):

$$F_x\alpha + F_y\beta + F_z\gamma = \frac{\partial V}{\partial n}. \tag{1-76}$$

Introducînd formulele (1-73) și (1-76) în relația (1-72) rezultă expresia căutată:

$$\iiint_v \nabla^2 V\, dv = \iint_\sigma \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma. \tag{1-77}$$

1.5.2. FORMULELE INTEGRALE GREEN

Formulele integrale *Green*, cunoscute și sub denumirea de teoreme sau identități, se deduc din transformări ale rețelei (1-77).

Se consideră două funcții U și V de x,y,z, continue împreună cu derivatele lor de ordinul întîi și al doilea în domeniul v. Se introduce substituția:

$$F(F_x, F_y, F_z) = U\nabla V, \tag{1-78}$$

adică:

$$F_x = U\frac{\partial V}{\partial x};\quad F_y = U\frac{\partial V}{\partial y};\quad F_z = U\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{1-79}$$

iar pentru componenta normală:

$$F_n = U\frac{\partial V}{\partial n}. \tag{1-80}$$

Prin urmare:

$$\nabla^2 V = \operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot(U\nabla V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\nabla^2 V. \tag{1-81}$$

Ținînd seama de ultimele relații putem transforma formula (1-77) obținînd *prima identitate Green*:

$$\iiint_v U\nabla^2 V\, dv + \iiint_v \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dv = \iint_\sigma U\frac{\partial V}{\partial n}\cdot d\sigma. \tag{1-82}$$

Schimbînd între ele funcțiile U și V, rezultă o relație similară. Scăzînd această ultimă relație din (1-82) se obține *a doua identitate Green*:

$$\iiint_v (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)dv = \iint_\sigma \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{1-83}$$

Aplicînd cea de a doua identitate *Green* în cazul funcției $U = 1/l$, unde l este distanța dintre punctul sursă și punctul atras P, se consideră pentru început că punctul atras este exterior domeniului v. În acest caz:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{l}\right) = 0. \tag{1-67}$$

Cu aceasta, relația (1-83) devine:

$$\iiint_v \frac{1}{l}\nabla^2 V\, dv = \iint_\sigma \left[\frac{1}{l}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right)\right] d\sigma. \tag{1-84}$$

Relația (1-84) reprezintă un prim aspect al celei de a *treia identități Green*, pentru puncte atrase situate în afara suprafeței σ, de delimitare a volumului v. Se poate demonstra că membrul drept al relației (1-84) trebuie completat cu următoarele valori:

— $4\pi V$, cînd punctul P se află în interiorul domeniului delimitat de suprafața σ;

— $2\pi V$, cînd punctul P se află pe suprafața σ.

Aceste aspecte diferite pe care le ia cea de a treia identitate *Green* sînt datorate discontinuităților ce apar în cazurile menționate cînd funcția $1/l$ poate lua valoarea infinit (cînd $l \to 0$).

1.5.3. DEFINIREA PROBLEMELOR LIMITĂ ALE TEORIEI POTENȚIALULUI

În 1.4. a fost definită funcția armonică, ca o funcție V continuă, împreună cu derivatele sale de ordinul 1 și 2, în domeniul D, care satisface ecuația *Laplace* $\nabla^2 V = 0$. Așa-numitele *probleme limită* constau în determinarea unor funcții armonice V, ca soluții ale ecuației *Laplace*, și care, în mod suplimentar, trebuie să îndeplinească anumite condiții în domeniul D.

Prima problemă limită. Se cunosc valorile pe care le ia o funcție continuă f pe frontiera C a domeniului D. Se cere determinarea unei funcții armonice V, în domeniul D, care la frontiera C ia valorile funcției f date. Această problemă limită se numește și *problema Dirichlet*, putînd fi scrisă concentrat și sub forma:

$$V|_D = f. \tag{1-85}$$

A doua problemă limită. Se caută o funcție armonică V, care îndeplinește pe frontiera domeniului D următoarea condiție:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_D = f. \tag{1-86}$$

Astfel, derivata normală a funcției V ia valorile date ale funcției f pe frontiera domeniului D. Această problemă limită se numește și problema *Neumann*.

A treia problemă limită. Funcția armonică V căutată trebuie să îndeplinească condiția:

$$\left(hV + k\frac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_D = f. \tag{1-87}$$

dependente numai de cîte o singură variabilă. Aceasta trebuie să verifice ecuația (1-93):

$$h\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + h\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{g}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial L^2} + gh\,n(n+1) = 0,$$

sau, după multiplicare cu $\frac{\sin^2\theta}{gh}$ și separarea variabilelor:

$$\frac{\sin\theta}{g}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\sin\theta + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} + gn(n+1)\sin\theta\right\} = -\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial L^2}.$$

Realizîndu-se o separare în două părți a ecuației (1-93), în funcție numai de θ și cealaltă numai de L, se poate egala fiecare parte cu o nouă constantă arbitrară, m^2:

$$\sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} + \left\{n(n+1)\sin\theta - \frac{m^2}{\sin\theta}\right\} g(\theta) = 0, \qquad (1\text{-}97)$$

și respectiv:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial L^2} + m^2 h(L) = 0. \qquad (1\text{-}98)$$

Soluțiile ecuației (1-98) sînt:

$$h(L) = \cos mL \quad \text{și} \quad h(L) = \sin mL, \qquad (1\text{-}99)$$

care pot fi verificate prin substituție.

Deducerea soluțiilor ecuației (1-97) este mai complicată (v. Anexa 1).

Ele sînt numite *funcții Legendre* și sînt notate $P_{nm}(\cos\theta)$. Se demonstrează că m și n trebuie să fie numere întregi și, în plus, $m \leqslant n$. Deci:

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta). \qquad (1\text{-}100)$$

Prin urmare, soluțiile ecuației diferențiale (1-93) sînt:

$$Y_n(\theta, L) = P_{nm}(\cos\theta)\cos mL; \quad Y_n(\theta, L) = P_{nm}(\cos\theta)\sin mL, \qquad (1\text{-}101)$$

împreună cu următoarea combinație liniară:

$$Y_n(\theta, L) = \sum_{m=0}^{n}\{a_{nm}\cos mL + b_{nm}\sin mL\}\,P_{nm}(\cos\theta), \qquad (1\text{-}102)$$

unde a și b sînt constante arbitrare, denumite și *coeficienți armonici*. Dacă se notează:

$$R_{nm}(\theta, L) = P_{nm}(\cos\theta)\cos mL; \qquad (1\text{-}103)$$
$$S_{nm}(\theta, L) = P_{nm}(\cos\theta)\sin mL;$$

relația (1-102) poate fi scrisă și sub forma:

$$Y_n(\theta, L) = \sum_{m=0}^{n}\{a_{nm}R_{nm}(\theta, L) + b_{nm}S_{nm}(\theta, L)\} \qquad (1\text{-}104)$$

Din relațiile (1-96) și (1-104) vor rezulta soluțiile ecuației *Laplace* $\nabla^2 V = 0$ sub forma următoarelor funcții sferice de volum, generalizate:

$$V_i(r, \theta, L) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{\infty}\{a_{nm}R_{nm}(\theta, L) + b_{nm}S_{nm}(\theta, L)\}, \qquad (1\text{-}105)$$

pentru funcții armonice în interiorul unei sfere și:

$$V_e(r, \theta, L) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{1}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty}\{a_{nm}R_{nm}(\theta, L) + b_{nm}S_{nm}(\theta, L)\}, \qquad (1\text{-}106)$$

pentru orice funcție care este armonică în exteriorul unei sfere [așa cum este cazul potențialului gravitațional exterior al Pămîntului — v. relația (1-66)].

O b s e r v a ț i e. Pentru cazul $r = 1$, rezultă că orice funcție arbitrară $f(\theta, L)$, dată pe suprafața unei sfere, poate fi dezvoltată în serie de armonici sferice de suprafață, sub forma:

$$f(\theta, L) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, L) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{a_{nm}R_{nm}(\theta, L) + b_{nm}S_{nm}(\theta, L)\}. \qquad (1-107)$$

Condiția de ortogonalitate a funcțiilor armonice sferice. Fie punctele $P(r, \theta, L)$ și $P'(r', \theta', L')$ situate în domeniul mărginit de sfera de rază R (fig. 1-8). Unghiul dintre razele vectoare r și r', exprimat în radiani, este notat cu Ψ. După cum se știe din trigonometria sferică (Anexa 2) acesta poate fi exprimat în funcție de coordonatele sferice ale celor două puncte:

$$\cos\Psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(L' - L). \qquad (1\text{-}108)$$

Punctul P' poate fi reperat în funcție de punctul P prin coordonatele polare sferice Ψ (distanța sferică) și A (azimutul arcului $\widehat{PP'}$).

Se consideră două funcții armonice sferice, în domeniul limitat de suprafața σ. Atunci formula *Green* (1-83) devine:

$$\iint_{\sigma}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = 0. \qquad (1\text{-}109)$$

Se aleg funcțiile U și V sub forma:

$$U = R^n Y_n(\theta, L); \qquad V = R^m Y_m(\theta, L). \qquad (1\text{-}110)$$

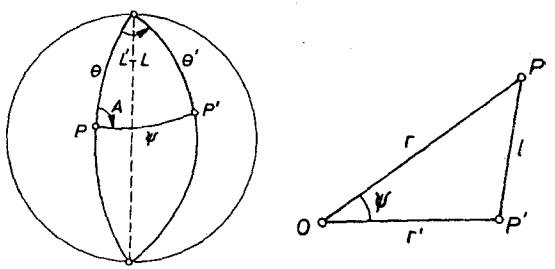


Fig. 1-8. Funcții armonice sferice.

Deoarece n este versorul normalei la suprafața sferei rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}, \tag{1-111}$$

iar elementul de suprafață este:

$$d\sigma = ds_m \cdot ds_p = R^2 \sin\theta \, d\theta \, dL. \tag{1-112}$$

Cu aceasta, expresia (1-109) devine:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [-R^n Y_n \, m \, R^{m-1} Y_m + R^m Y_m \, n \, R^{n-1} Y_n] \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, dL =$$

$$= R^{m+n-1}(n-m) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n \, Y_m \sin\theta \, d\theta \, dL = 0,$$

adică:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta, L) \, Y_m(\theta, L) \sin\theta \, d\theta \, dL = 0. \tag{1-113}$$

Această relație reprezintă condiția de ortogonalitate a funcțiilor armonice sferice Y pe suprafața sferei.

1.7. DEZVOLTAREA POTENȚIALULUI GRAVITAȚII ÎN COORDONATE SFERICE ȘI RECTANGULARE

Se consideră potențialul de atracție al globului terestru, în cazul punctului atras $P\ (x,y,z)$ exterior:

$$V = G \iiint \frac{dM}{l}. \tag{1-114}$$

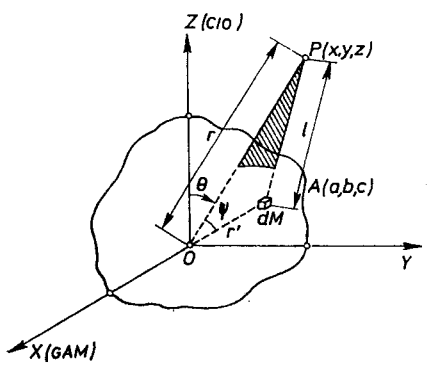


Fig. 1-9. Sistemul de coordonate carteziene global geocentric.

Pentru calculul integralei (1-114) se dezvoltă funcția $1/l$ în polinoame *Legendre*. Această funcție în coordonate sferice este:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\psi + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}},$$

unde:

$$t = r'/r < 1; \qquad \mu = \cos\Psi. \tag{1-115}$$

Funcția armonică sferică $1/l$ [v. relația (1-67)] poate fi dezvoltată în serie de puteri ale lui t, coeficienții pentru t fiind polinoamele *Legendre* $P_n(\mu) = P_n(\cos\Psi)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\mu + t}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\mu) = P_0(\mu) + tP_1(\mu) + t^2 P_2(\mu) + \ldots \tag{1-116}$$

Prin urmare:

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\Psi). \tag{1-117}$$

Deoarece r este o valoare constantă, rezultă din (1-117) și (1-114) o expresie generală a dezvoltării potențialului gravitațional în polinoame *Legendre*:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} G \iiint r^n \cdot P_n(\cos\Psi) \, dM. \tag{1-118}$$

Utilizînd expresiile polinoamelor *Legendre* din Anexa 1, rezultă în continuare:

$$V = G\iiint \frac{dM}{r} + G\iiint \frac{r'\cos\psi}{r^2} dM + G\iiint \frac{r'^2}{2r^3}(3\cos^2\Psi - 1) \, dM +$$

$$+ G \sum_{n=3}^{\infty} \iiint \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\Psi) \, dM. \tag{1-119}$$

Pentru a ușura calculul integralelor din relația (1-119) se folosește *sistemul de coordonate carteziene global geocentric* (fig. 1-9) definit în Anexa 3. De menționat faptul că pentru problema examinată aici ar fi suficiente numai specificațiile privind pozițiile centrului sistemului și respectiv axei Z, poziția axei X putînd fi aleasă arbitrar.

Deoarece r este o mărime constantă, prima integrală din (1-119) este imediată:

$$I_1 = G\iiint \frac{dM}{r} = \frac{GM}{r}. \tag{1-120}$$

Integrala a doua este zero:

$$I_2 = \iiint r' \cos\Psi \, dM = 0. \tag{1-121}$$

Pentru demonstrarea afirmației se notează:

$$\cos\Psi = \frac{a}{r'}\cdot\frac{x}{r} + \frac{b}{r'}\cdot\frac{y}{r} + \frac{c}{r'}\cdot\frac{z}{r} = \frac{ax + by + cz}{rr'},$$

astfel încît:

$$\iiint r' \cos\Psi \, dM = \frac{1}{r}\{x\iiint a \, dM + y\iiint b \, dM + z\iiint c \, dM\}.$$

Deoarece originea sistemului de coordonate coincide cu centrul de masă de coordonate $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \frac{\iiint a\,dM}{\iiint dM} = 0; \quad \bar{b} = \frac{\iiint b\,dM}{\iiint dM} = 0; \quad \bar{c} = \frac{\iiint c\,dM}{\iiint dM} = 0, \tag{1-122}$$

rezultă demonstrația necesară.

Se calculează cea de a treia integrală:

$$I_3 = \frac{G}{2r^3}\iiint r'^2\,(3\cos^2\Psi - 1)\,dM =$$

$$= \frac{G}{2r^3}\iiint \left\{\frac{3}{r^2}(ax + by + cz)^2 - r'^2\right\} dM. \tag{1-123}$$

Deoarece:

$$(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz,$$

în calcule vor interveni și integralele:

$$2xy\iiint ab\,dM;\ 2xz\iiint ac\,dM;\ 2yz\iiint bc\,dM,$$

care sînt egale cu zero, o dată cu momentele de inerție centrifugale (deoarece axele de coordonate coincid cu axele principale de inerție).

În acest fel:

$$I_3 = \frac{1}{2r^5}\iiint (3x^2a^2 + 3y^2b^2 + 3z^2c^2 - r^2r'^2)\,dM =$$

$$= \frac{1}{2r^5}[x^2\iiint (\quad a \quad '^2)\,dM + y^2\iiint (3b^2 - r'^2)\,dM + z^2\iiint (3c^2 - r'^2)dM],$$

sau:

$$I_3 = \frac{1}{2r^5}[x^2\iiint (2a^2 - b^2 - c^2)\,dM + y^2\iiint (2b^2 - c^2 - a^2)\,dM +$$

$$+ z^2\iiint [2c^2 - a^2 - b^2)\,dM]. \tag{1-124}$$

Se introduc momentele de inerție principale, în raport de axele de coordonate x, y, z:

$$A = \iiint (b^2 + c^2)\,dM;\ B = \iiint (a^2 + c^2)\,dM;\ C = \iiint (a^2 + b^2)dM, \tag{1-125}$$

și prin permutări circulare:

$$\begin{aligned} \iiint (2a^2 - b^2 - c^2)dM &= B + C - 2A; \\ \iiint (2b^2 - c^2 - a^2)dM &= C + A - 2B; \\ \iiint (2c^2 - a^2 - b^2)dM &= A + B - 2C, \end{aligned} \tag{1-126}$$

rezultă:

$$I_3 = \frac{1}{2r^5}\{x^2(B + C - 2A) + y^2(C + A - 2B) + z^2(A + B - 2C)\} \tag{1-127}$$

Din (1-88) se obțin:

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2\sin^2\theta\cos^2 L = \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\,(1 + \cos 2L); \\ y^2 &= r^2\sin^2\theta\sin^2 L = \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\,(1 - \sin 2L); \\ z^2 &= r^2\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{1-128}$$

după care:

$$I_3 = \frac{1}{2r^3}\left(C - \frac{A + B}{2}\right)(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{3}{4r^3}(B - A)\sin^2\theta\cos 2L. \tag{1-129}$$

Relațiile (1-120), (1-121) și (1-129) introduse în (1-119) dau expresia potențialului gravitațional în coordonate sferice:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}\left(C - \frac{A + B}{2}\right)(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{3G}{4r^3}(B - A)\sin^2\theta\cos 2L +$$

$$+ G\sum_{n=3}^{\infty}\iiint \frac{r'^n}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos\psi)\,dM. \tag{1-130}$$

Dezvoltarea în coordonate rectangulare se obține din relațiile (1-120), (1-121) și (1-128):

$$V = \frac{G}{r} + \frac{GM}{2r^3}\{(B + C - 2A)\,x^2 + (C + A - 2B)\,y^2 +$$

$$+ (A + B - 2C)\,z^2\} + G\sum_{n=3}^{\infty}\iiint \frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\psi)\,dM. \tag{1-131}$$

În calculele care intervin în geodezia fizică se operează relativ puțin cu momentele de inerție principale A, B și C. În mod curent se folosesc *coeficienții armonici zonali* de forma:

$$J_{20} = \frac{1}{Ma^2}\left(C - \frac{A + B}{2}\right); \quad J_{22} = \frac{1}{4Ma^4}(A - B). \tag{1-132}$$

În cazul corpurilor de rotație, momentele de inerție principale A și B fiind egale rezultă:

$$J_{20} = J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}; \quad J_{22} = 0 \tag{1-133}$$

Observație. În relațiile (1-132) și (1-133) cu a s-a notat semiaxa mare a corpului de rotație avut în vedere în mod concret (de regulă, un elipsoid de rotație, cu turtire mică la poli).

Recomandările *AIG* din anul 1980 prevăd:

$$J_2 = (108\ 263 \pm 0{,}5) \times 10^{-8}. \tag{1-134}$$

Considerînd relația (1-43) și expresiile (1-130), respectiv (1-131) vor rezulta:

— dezvoltarea potențialului gravității în coordonate sferice:

$$W = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}\left(C - \frac{A + B}{2}\right)(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{3G}{4r^3}(B - A)\sin^2\theta\cos 2L +$$

$$+ G\sum_{n=3}^{\infty}\iiint \frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\psi)\,dM + \frac{1}{2}r^2\omega^2\sin^2\theta. \tag{1-135}$$

În ultimul termen al relației (1-135) $r \sin \theta$ reprezintă depărtarea punctului P față de axa z;

— dezvoltarea potențialului gravității în coordonate rectangulare:

$$W = \frac{GM}{r} + \frac{}{2\,r^3}\{(B + C - 2A)\,x^2 + (C + A - 2B)\,y^2 + (A + B - 2C)\,z^2\} +$$

$$+ G \sum_{n=3}^{\infty} \iiint \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n\,(\cos \psi)\,dM + \frac{1}{2}\omega^2\,(x^2 + y^2). \qquad (1\text{-}136)$$

Observații. 1. Expresia dezvoltării potențialului gravității în coordonate sferice permite ca prin comparare cu formulele cunoscute pentru corpuri simple (v. 1.3) să se desprindă unele concluzii preliminare referitoare la forma Pământului, și anume:

● Primul termen este identic cu expresia (1—53), adică exprimă potențialul de atracție al unei sfere formată din straturi concentrice omogene, punctul atras fiind situat la distanța r de centrul sferei. S-a presupus, în paragraful 1.3.4., că masa sferei M este concentrată în centrul sferei. Acest prim termen este acceptat pe deplin în cazul distanțelor foarte mari, interplanetare, cînd orice corp ceresc acționează ca o masă punctiformă, de potențial $\frac{Gm}{r}$.

● Termenul al doilea introduce abaterile, care intervin în potențialul gravității, datorate turtirii la poli a globului terestru. Prin urmare, într-o aproximație îmbunătățită, Pământul are forma unui elipsoid de rotație.

● Cel de-al treilea termen introduce abaterile formei Pământului de la forma unui elipsoid de rotație, în funcție de longitudinea L. Acest termen dispare cînd $A = B$ (elipsoid de rotație) și prin urmare, în acest caz, în termenul doi rezultă $C - A$ în loc de $C - \frac{A+B}{2}$.

● Penultimul termen se încadrează în noțiunea consacrată de *potențial perturbator* T, și exprimă, sub aspect general, faptul că este deosebit de dificil de a se da un răspuns categoric și definitiv în legătură cu forma Pământului. Din dezvoltarea, *teoretic* fără limite, a acestui termen, pot rezulta infinite răspunsuri referitoare la forma planetei noastre.

Din motive de ordin practic, dezvoltarea în serie a potențialului efectiv W este întreruptă după un număr oarecare de termeni, făcîndu-se astfel o distincție între expresia unui *potențial normal* U și *potențialul perturbator* T. Sub forma generală:

$$W = U_j + T_j, \qquad (1\text{-}137)$$

unde:

$$U_j = \sum_{n=0}^{j} \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta; \qquad (1\text{-}138)$$

$$T_j = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}; \qquad (1\text{-}139)$$

$$Y_n = G \iiint r'^n\, P_n\,(\cos \psi)\,dM. \qquad (1\text{-}140)$$

● Ultimul termen al relațiilor (1-135), (1-136) și (1-138) este reprezentat de potențialul forței centrifuge, datorat mișcării de rotație a Pământului.

2. *Accelerația gravității calculată* (denumită, din acest motiv, *valoare teoretică sau normală*) este egală cu derivata normală a potențialului U:

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \approx -\frac{\partial U}{\partial r}. \qquad (1\text{-}141)$$

3. Asupra noțiunii de *potențial normal* se va reveni în 2.3.3. cu precizările și particularizările specifice în geodezie.

Capitolul 2

SUPRAFEȚE ECHIPOTENȚIALE

2.1. SUPRAFEȚE DE NIVEL, GEOID, LINII DE FORȚĂ

Preluînd relațiile (1-34) — (1-36) în cazul potențialului gravității, rezultă următoarele expresii:

$$\frac{dW}{ds} = g_s = g \cos (\vec{g}, \vec{s}), \qquad (2\text{-}1)$$

valabile pentru orice direcție s.

Dacă se consideră:

$$\cos (\vec{g}, \vec{s}) = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

adică, dacă se are în vedere o direcție s perpendiculară pe direcția gravității g, rezultă:

$$dW = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

sau:

$$W\,(x, y, z) = \text{constant} = C. \qquad (2\text{-}4)$$

Expresia (2-4) reprezintă ecuația unei suprafețe echipotențiale, denumită, de către *Laplace*, *suprafață de nivel*. Rezultă că suprafața de nivel este perpendiculară, în oricare din punctele sale, pe direcția gravității.

Schimbîndu-se valoarea constantei C se obțin diverse suprafețe de nivel. Dintre suprafețele de nivel posibile, pentru geodezie prezintă o importanță deosebită suprafața de nivel zero, denumită și *geoid*, noțiune introdusă de către *Listing* în anul 1873. Această suprafață echipotențială a fost propusă de *Gauss* ca „figură matematică a Pământului":

$$W\,(x, y, z) = W_0. \qquad (2\text{-}5)$$

Fiind în permanență perpendicular la direcția gravității, geoidul are o configurație foarte complexă. Modificările de densitate din interiorul Pământului conduc la schimbarea geometriei suprafețelor de nivel (inclusiv a geoidului) deoarece, așa cum se va arăta în 2.1.1., curbura acestora depinde de densitatea ρ. Din acest motiv este imposibilă o formulare analitic-matematică a acestei suprafețe complexe, dependentă în permanență de distribuția și densitatea maselor în interiorul Pământului.

Ecuatorul geoidului este curba definită ca fiind locul geometric al punctelor pentru care latitudinea astronomică Φ este zero. *Paralelul*, respectiv *meridianul geoidului* sînt definite de ecuațiile Φ = constant, respectiv, Λ = = constant, Λ fiind longitudinea astronomică. Datorită structurii interne a Pământului aceste curbe sînt foarte complexe, cu multe ondulații, fără muchii sau vîrfuri.

Geoidul este definit *uzual* ca *suprafața medie a mărilor „liniștite" prelungită pe sub continente*.

H. Bruns a formulat *scopul principal al geodeziei fizice ca fiind determinarea suprafețelor de nivel ale cîmpului gravității*, ceea ce echivalează cu

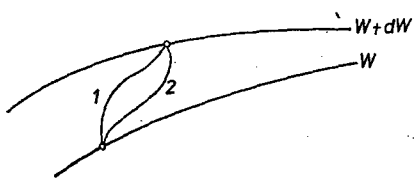


Fig. 2-1. Secțiune prin suprafața de nivel.

determinarea funcției potențial $W(x, y, z)$. În adevăr, cunoscînd expresia potențialului unui corp, se pot face estimări privind forma suprafeței sale (problema inversă, de exemplu, referitoare la aspectele tratate în 1.3.).

Deoarece suprafețele de nivel sînt suprafețe echipotențiale, diferența de potențial dintre două suprafețe de nivel este o mărime constantă. Rezultă că creșterea de potențial (deci de lucru mecanic) nu depinde de drumul parcurs, pentru trecerea unui punct de pe o suprafață de nivel pe alta (traseul *1* sau traseul *2* în figura 2-1).

Prin urmare, *suma* creșterilor de potențial pe un contur închis, indiferent de sensul de parcurgere, este zero:

$$\oint dW = 0. \tag{2-6}$$

O altă direcție importantă pentru geodezie este direcția h, paralelă cu direcția gravității, adică perpendiculară la suprafețele de nivel:

$$\cos(\vec{g}, \vec{h}) = \pm 1. \tag{2-7}$$

Pentru depărtarea dintre suprafețele de nivel se alege sensul crescător spre exteriorul suprafeței Pămîntului (sensul invers forței $\vec{g}$) și ca urmare din relația (2-7) se va lua semnul minus. Cu aceasta, se obține din (2-1):

$$\frac{dW}{dh} = -g, \tag{2-8}$$

sau:

$$dh = -\frac{dW}{g}, \tag{2-9}$$

unde dh reprezintă distanța dintre suprafețele de nivel caracterizate prin potențialele W și respectiv $W + dW$.

Relațiile (2-8) și (2-9) reprezintă un exemplu de legătură dintre aspectul geometric h și cel dinamic W în cadrul problematicii abordate în geodezia fizică.

Deoarece $g_{ec} < g_{pol}$, rezultă că distanța dintre două suprafețe de nivel se micșorează de la ecuator spre pol, deci suprafețele de nivel nu sînt paralele între ele.

Din relația (2-9) se mai poate deduce o proprietate remarcabilă a suprafețelor de nivel. Deoarece între două suprafețe de nivel g nu poate lua niciodată valoarea infinit, rezultă că distanța dh, dintre aceste suprafețe nu poate fi niciodată zero. Aceasta însemnă că suprafețele de nivel nu se ating și nu se întretaie niciodată.

Se poate demonstra că suprafețele de nivel sînt suprafețe continue, închise, fără muchii sau vîrfuri. Rezultă că liniile care intersectează suprafețele de nivel sub unghiuri drepte, vor avea o anumită curbură. Ele se numesc *linii de forță*. Tangenta la linia de forță într-un punct P dă direcția gravității $\vec{g}$, care poate fi materializată prin direcția firului cu plumb. O imagine aproximativă, intuitivă, a suprafețelor de nivel și liniilor de forță este reprezentată în figura 2-2.

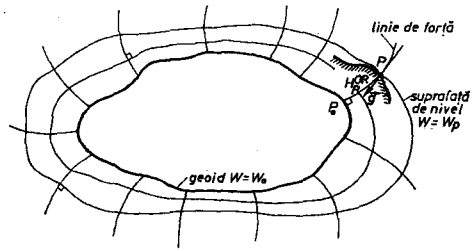


Fig. 2-2. Suprafața de nivel, linii de forță.

Segmentul de linie de forță cuprins între poziția punctului pe suprafața fizică a Pămîntului P și proiecția sa pe geoid P_0 se numește *altitudine ortometrică* H_P^{OR} (fig. 2-2).

2.1.1. SISTEME DE COORDONATE NATURALE

Calificativul *natural* atașat unor sisteme, respectiv unor coordonate, cu care se operează în geodezie, urmărește îndeplinirea unui dublu deziderat: pe de o parte se exprimă modalitatea de definire a sistemului sau coordonatelor respective (în raport de *mărimi naturale*), iar pe de altă parte se indică legăturile directe dintre acestea și *procesele de măsurare* sau, mai general, *de determinare*.

2.1.1.1. **Sistemul cartezian geocentric.** Sistemul natural global cartezian geocentric este considerat drept sistemul fundamental al geodeziei. Coordonatele carteziene X, Y, Z sau diferențe de asemenea coordonate, obținute în *geodezia cu sateliți*, definesc poziția punctului P (fig. 2-3) situat pe suprafața fizică a Pămîntului.

Poziția punctului P poate fi definită, de asemenea, prin alte coordonate globale și anume *coordonatele astronomice* Φ, Λ, completate cu *altitudinea ortometrică* H^{OR}. Aceste coordonate vor fi denumite în manual *coordonate astronomice globale* (deși H^{OR} nu este dedusă prin metode astronomice).

Latitudinea astronomică Φ este unghiul format de verticala punctului P cu planul geoidului.

Longitudinea astronomică Λ este unghiul diedru format de meridianul astronomic al punctului *Greenwich*, cu meridianul punctului P,.

Coordonatele astronomice Φ și Λ determină poziția verticalei în punctul considerat. Prin urmare, odată cu aducerea axei principale a oricărui instrument geodezic în poziție verticală, se încadrează observațiile geodezice în sistemul natural de referință menționat.

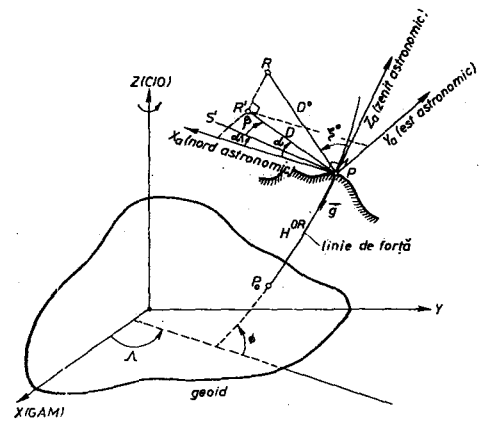


Fig. 2-3. Sisteme de coordonate naturale.

2.1.1.2. **Sistemul astronomic local.** Se consideră un *sistem local* în care punctul de staţie P îndeplineşte rolul de origine a sistemului (*topocentru*). Sensul pozitiv al axelor de coordonate este considerat cînd:

— axa Z_a este îndreptată după tangenta la linia de forţă, către zenitul astronomic;

— planul X_aY_a este perpendicular pe direcţia gravităţii (de aceea este numit *plan orizontal*);

— axa X_a este situată în meridianul astronomic al punctului considerat (direcţia nord), iar axa Y_a este îndreptată spre direcţia estului astronomic.

Evident, fiecărui punct de staţie îi corespunde un alt sistem local astronomic. În raport cu topocentrul, poziţia oricărui punct învecinat poate fi exprimată prin *coordonatele carteziene astronomice* locale $X_aY_aZ_a$.

În sistemul astronomic local poziţia unui punct R, aflat în legătură directă cu punctul de staţie care îndeplineşte rolul de topocentru, poate fi exprimată şi în funcţie de următoarele observaţii geodezice:

— D° — *distanţa înclinată* dintre cele două puncete

— α — *azimutul astronomic*, care este unghiul dintre direcţia PR şi meridianul astronomic al punctului de staţie;

— ζ° — *unghiul zenital*, care este unghiul dintre verticala locului şi direcţia PR.

Observaţie. În multe situaţii, are loc o transmitere de azimut, de exemplu prin intermediul unui alt punct S: direcţia PS este orientată în raport cu direcţia nordului astronomic α_1, în funcţie de care se poate determina, în continuare, orientarea direcţiei PR prin măsurarea unghiului β. De obicei intervin mai multe puncte intermediare S, fiind necesare mai multe unghiuri β. Din cele de mai sus se desprinde motivaţia pentru care măsurătorile unghiulare (sau de direcţii) orizontale se mai numesc şi ***măsurători azimutale*** (a nu se confunda cu ***măsurători sau determinări de azimut***!)

Măsurătorile D°, α, ζ° (completate, după caz, cu β) sînt denumite şi *coordonate astronomice polare locale*.

Legătura dintre cele două categorii de coordonate naturale locale este:

$$\mathbf{X}_a = \begin{Vmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{Vmatrix} = D^\circ \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \cdot \sin\zeta^\circ \\ \sin\alpha \cdot \sin\zeta^\circ \\ \cos\zeta^\circ \end{Vmatrix}. \qquad (2\text{-}10)$$

Transformarea coordonatelor naturale locale în coordonate naturale globale va fi abordată în 24.4.

2.1.2. CURBURA SUPRAFEŢELOR DE NIVEL

Se consideră suprafaţa de nivel care trece prin punctul P_0 (fig. 2-4). Pe domenii limitate, în care se poate accepta că nu se înregistrează salturi în densitatea maselor sursă, geopotenţialul este o funcţie continuă, astfel încît se poate aplica o dezvoltare în serie *Taylor* de forma:

$$W(x,y,z) = W(x_0,y_0,z_0) + W_x(x-x_0) + W_y(y-y_0) + W_z(z-z_0) + \\ + \frac{1}{2}\{W_{xx}(x-x_0)^2 + W_{yy}(y-y_0)^2 + W_{zz}(z-z_0)^2 + \\ + 2W_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + 2W_{xz}(x-x_0)(z-z_0) + \\ + 2W_{yz}(y-y_0)(z-z_0)\} \ldots \qquad (2\text{-}11)$$

Pentru studiul suprafeţelor de nivel se utilizează sistemele naturale locale, astfel încît se poate crie:

$$g_x = 0 = W_x;$$
$$g_y = 0 = W_y;$$
$$g_z = g = -W_z. \qquad (2\text{-}12)$$

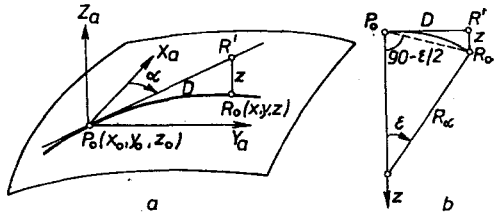


Fig. 2-4. Curbura suprafeţelor de nivel.

Domeniul de referinţă fiind limitat în jurul punctului P_0, se consideră x şi y ca termeni de ord. 1, iar z ca termen de ord. 2, astfel încît:

$$xz = yz = z^2 = 0. \qquad (2\text{-}13)$$

În sfîrşit, deoarece P_0 este şi originea sistemului ales ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), iar punctele P_0 şi R_0 se află pe aceeaşi suprafaţă de nivel [$W(x,y,z) = W(x_0, y_0, z_0)$] se obţine din (2-11), prin considerarea tuturor particularizărilor menţionate:

$$z = \frac{1}{2g}(W_{xx}x^2 + 2W_{xy}xy + W_{yy}y^2). \qquad (2\text{-}14)$$

Presupunînd că se cunosc, distanţa D şi azimutul astronomic α rezultă:

$$x = D\cos\alpha; \quad y = D\sin\alpha,$$

astfel încît se obţine:

$$z = -\frac{D^2}{2g}(W_{xx}\cos^2\alpha + 2W_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + W_{yy}\sin^2\alpha). \qquad (2\text{-}15)$$

În ipoteza unor variaţii uniforme a curburii suprafeţei de nivel în domeniul limitat considerat, $D \approx R_\alpha\varepsilon$, unde R_α este o valoare medie a razei de curbură pe direcţia de azimut α. Deoarece unghiul ε este foarte mic:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{z}{D},$$

se obţine:

$$D^2 = 2R_\alpha z, \qquad (2\text{-}16)$$

rezultînd curbura suprafeţelor de nivel pe o direcţie oarecare, de azimut α:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{g}(W_{xx}\cos^2\alpha + 2W_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + W_{yy}\sin^2\alpha). \qquad (2\text{-}17)$$

Prin particularizări pentru $\alpha = 0°$, şi respectiv $\alpha = 90°$ rezultă curburile principale (de mărime maximă, respectiv minimă):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{W_{xx}}{g}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{W_{yy}}{g}, \qquad (2\text{-}18)$$

precum şi curbura medie J:

$$J = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2g}. \qquad (2\text{-}19)$$

Derivatele parțiale de ordinul doi ale potențialului W_{xx}, W_{yy}, W_{xy} sînt determinabile în teren cu *balanța de torsiune*, astfel încît elementele geometrice examinate pot fi determinate pe cale fizică.

Din ecuația (1-71), valabilă și în sistemul local utilizat pînă acum:

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2 - 4\pi G\rho, \tag{1-71}$$

și relația (2-19) se obține:

$$-2gJ + W_{zz} = 2\omega^2 - 4\pi G\rho.$$

Deoarece:

$$W_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -g,$$

rezultă:

$$W_{zz} = -\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial h},$$

astfel că:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = 4\pi G\rho - 2gJ - 2\omega^2. \tag{2-20}$$

Relația (2-20) aparține lui *H. Bruns* (1878) și exprimă mărimea gradientului vertical al gravității, în funcție de curbura medie J a suprafeței de nivel, ilustrînd încă o dată legăturile dintre aspectele mecanice și geometrice, existente în geodezia fizică.

Mărimea gradientului vertical al gravității nu poate fi determinată direct, ci numai indirect prin calcul, cunoscîndu-se mărimea gravității g_i și g_j în două puncte situate pe aceeași linie de forță, la distanța Δh_{ij}, de asemenea cunoscută.

Relația (2-20) scrisă altfel, furnizează *curbura medie Bruns* a suprafețelor de nivel:

$$J = \frac{1}{g}(2\pi G\rho - \omega^2) - \frac{1}{2g}\cdot\frac{\partial g}{\partial h}, \tag{2-21}$$

prin care se pune în evidență, printre altele, dependența acesteia de densitatea ρ a maselor sursă. În acest mod se demonstrează că modificările, respectiv salturile, în densitatea maselor produc modificări și salturi în curbura suprafețelor de nivel. Acestea sînt, prin urmare, funcții continue numai pentru porțiunile cu densitate constantă sau cu variații continue. Numai în afara globului terestru suprafețele de nivel sînt funcții continue în totalitatea lor.

2.2. SFEROIZI DE NIVEL

În funcție de gradul de aproximare acceptat în dezvoltările în serie (1-139), respectiv (1-140) se obțin diverse expresii ale potențialului gravității, care corespund unor corpuri denumite *sferoizi de nivel*. La fel ca și suprafețele de nivel, sferoizii de nivel sînt suprafețe echipotențiale, însă spre deosebire de acestea pot fi definiți matematic.

2.2.1. SFEROIDUL BRUNS

În cazul neglijării termenilor de ordinul 3 și superiori din dezvoltarea potențialului:

$$G\sum_{n=3}^{\infty}\iiint\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\Psi)\mathrm{d}M = 0, \tag{2-22}$$

se obține potențialul *sferoidului Bruns* 1878. Așa cum rezultă din mai multe lucrări, *Bruns* a dezvoltat, în mod deosebit, forma fără termeni în L, adică cea echivalentă pentru un sferoid de rotație ($A = B$):

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{1}{2}r^2\omega^2\sin^2\theta \tag{2-23}$$

Pentru a simplifica unele demonstrații se acceptă următoarele aproximații:

$$a^2 \approx b^2 \approx r^2, \tag{2-24}$$

și pentru termeni de ordin superior. Cu a și b s-au notat semiaxele sferoidului de rotație. În acest mod relațiile (2-23) și (1-141) pot fi scrise, luînd în considerație și (1-132):

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 + \frac{J_2}{2}(1 - 3\cos^2\theta)\right] + \frac{r^2\omega^2}{2}\sin^2\theta; \tag{2-25}$$

$$\gamma = \frac{GM}{r}\left[1 + \frac{3J_2}{2}(1 - 3\cos^2\theta)\right] - r\omega^2\sin^2\theta. \tag{2-26}$$

Pentru calculele ulterioare este utilă particularizarea relațiilor (2-25) și (2-26) pentru ecuator, respectiv pentru pol:

Pentru ecuator: ($\theta = 90°$; $r = a$)

$$U_e = \frac{GM}{a}\left(1 + \frac{J_2}{2}\right) + \frac{1}{2}a^2\omega^2; \tag{2-27}$$

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{3J_2}{2}\right) - a\omega^2; \tag{2-28}$$

Pentru pol: ($\theta = 90°$; $r = b$)

$$U_p = \frac{GM}{b}(1 - J_2); \tag{2-29}$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{b^2}(1 - 3J_2). \tag{2-30}$$

În unele situații se aproximează:

$$\gamma_e \approx \frac{GM}{a^2}. \tag{2-31}$$

Sferoidul fiind o suprafață echipotențială se pot egala relațiile (2-27) și (2-29) din care rezultă turtirea sferoidului *Bruns*:

$$f = \frac{a - b}{a}; \tag{2-32}$$

$$f = \frac{3J_2}{2} + \frac{a^3\omega^2}{2GM} \approx \frac{3J_2}{2} + \frac{a\omega^2}{2\gamma_e}. \tag{2-33}$$

Din egalarea expresiilor (2-25) și (2-27) se obține:

$$a - r = a \cos^2 \theta \left(\frac{3 J_2}{2} + \frac{a^3 \omega^2}{2 GM} \right),$$

care împreună cu (2-33) oferă ecuația curbei meridiane a sferoidului *Bruns*:

$$r = a(1 - f \cos^2 \theta). \tag{2-34}$$

Pentru comparație, se stabilește ecuația curbei meridiane a elipsoidului de rotație (fig. 2-5), utilizînd coordonatele polare r_E și θ_E.

Ecuația elipsei meridiane exprimată în coordonate carteziene:

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{z_E^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{2-35}$$

în care se introduc coordonatele polare:

$$x_E = r_E \sin \theta_E;$$
$$z_E = r_E \cos \theta_E, \tag{2-36}$$

și turtirea f definită cu relația (2-32) devine:

$$r_E^2 \left\{ \frac{\sin^2 \theta_E}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta_E}{a^2 (1-f)^2} \right\} = 1.$$

Dacă această relație se dezvoltă în ipoteza neglijării termenilor de ordinul doi și superiori ai turtirii f se obține:

$$r_E \approx a (1 - f \cos^2 \theta_E). \tag{2-37}$$

Din compararea relațiilor (2-34) și (2-37) se observă egalitatea dintre ecuațiile elipselor meridiane ale sferoidului *Bruns* și elipsoidul de rotație, în limitele aproximațiilor de ordinul doi ale puterilor turtirii f.

Cititorul interesat va putea găsi în lucrări mai extinse că, în limite de calcul mai precise, diferența dintre razele vectoare ale sferoidului *Bruns* și respectiv ale elipsoidului de rotație este:

$$r - r_E \approx 16{,}7 \cos^2 2\theta \quad [\text{m}]. \tag{2-38}$$

2.2.2. TEOREMA CLAIRAUT

Teorema *Clairaut* are o importanță deosebită pentru geodezia fizică deoarece stabilește o legătură directă între turtirea geometrică f și turtirea gravimetrică notată f^*:

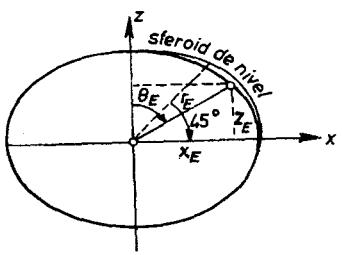


Fig. 2-5. Poziția sferoidului de nivel în raport cu elipsoidul de rotație.

$$f^* = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}. \tag{2-39}$$

Din relațiile (2-39), (2-30) și (2-28) rezultă:

$$f^* \gamma_e = \frac{GM}{b^2} - \frac{3\, GMJ_2}{b^2} - \frac{GM}{a^2} - \frac{3\, GMJ_2}{2\, a^2} + a\, \omega^2,$$

din care se deduce în ipoteza aproximațiilor acceptate anterior:

$$f + f^* = \frac{5}{2} \cdot \frac{a\, \omega^2}{\gamma_e}. \tag{2-40}$$

Dacă se notează:

$$m = \frac{a^2 b\, \omega^2}{GM} \approx \frac{a\, \omega^2}{\gamma_e}, \tag{2-41}$$

rezultă:

$$f + f^* = \frac{5}{2} \text{m}. \tag{2-42}$$

Formula (2-40) sau (2-42) reprezintă forma inițială a teoremei *Clairaut* (1738), cuprinzînd doar termeni de ord. 1.

2.2.3. VARIAȚIA GRAVITĂȚII TEORETICE (NORMALE) PE SFEROIDUL DE NIVEL

Din compararea relațiilor (2-28) și (2-30) se observă că $\gamma_e \neq \gamma_p$, ceea ce indică o variație, în funcție de latitudine a gravității teoretice (normale). Pentru deducerea acestei variații, în limitele aproximațiilor introduse, se folosesc relațiile (2-26) și (2-28):

$$\gamma - \gamma_e = -\frac{9}{2} \cdot \frac{GMJ_2}{a^2} \cos^2 \theta + a\, \omega^2 \cos^2 \theta,$$

din care rezultă după dezvoltări simple:

$$\gamma = \gamma_e (1 + f^* \cos^2 \theta + \ldots). \tag{2-43}$$

Formulele (2-43) și (2-40) exprimă, într-o primă aproximație, una dintre posibilitățile geodeziei fizice de determinare a formei și dimensiunilor Pămîntului, deoarece prin aceste formule se determină legătura dintre valori distribuite pe suprafața Pămîntului și elementele geometrice a și f ale corpului prin care se aproximează forma Pămîntului. Procedeul descris are un caracter de principiu, determinările actuale ale formei și dimensiunilor Pămîntului avînd un caracter mult mai complex.

2.2.4. SFEROIDUL HELMERT

Potențialul sferoidului *Helmert* se deduce prin considerarea:

$$G \sum_{n=4}^{\infty} \iiint \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n (\cos \Psi)\, dM = 0, \tag{2-44}$$

în dezvoltarea potențialului, obținîndu-se:

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \frac{J_{20}}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta) + \frac{r^3 \omega^2}{2\, GM} \sin^2 \theta + \right.$$
$$\left. + \frac{D}{r^4} \cdot \left(\cos^4 \theta - \frac{6}{7} \sin^2 \theta + \frac{3}{35} \right) \right\}, \tag{2-45}$$

unde J_{20} a fost definit cu relația (1-133), iar D/r^4 este un termen de ord. 4 în raport cu $r^3\omega^2/2GM$ care este un termen de ord. 2.

În continuare se prezintă, fără a se demonstra, formele dezvoltate pe care le au formulele stabilite în paragrafele anterioare, pe acest sferoid.

● Turtirea geometrică [a se compara cu (2-33)]:

$$f(1+f) = \frac{3\,J_{20}}{2}(1+2f) + \frac{a^3\omega^2}{2\,GM} - \frac{D}{7\,a^4}. \qquad (2\text{-}46)$$

● Ecuația curbei meridiane [a se compara cu (2-34)]:

$$r_A = a\,\{1 - [f(1+f^*-f) + \delta]\cos^2\theta + [f(f^*-f) + \delta]\cos^4\theta\}. \qquad (2\text{-}47)$$

● Diferența maximă între raza vectoare a sferoidului Helmert r_H și cea a elipsoidului r_E:

$$(r_H - r_E)\ max = 12{,}4\ \text{m}. \qquad (2\text{-}48)$$

● Teorema *Clairaut*, dezvoltată [a se compara cu 2-42)]:

$$f + f^* = \frac{5}{2}m - f\left(f + \frac{m}{2}\right) + \frac{2}{a^4}D. \qquad (2\text{-}49)$$

● Variația gravității teoretice (normale) pe sferoidul *Helmert* [a se compara cu (2-43)]:

$$\gamma = \gamma_e\left(1 + f^*\cos^2\theta - \frac{\beta_4}{2}\cos^2 2\theta\right). \qquad (2\text{-}50)$$

În expresia (2-50), β_4 este un coeficient care poate fi calculat cu formula:

$$\beta_4 = 3\delta - 7f^2 + 4ff^*. \qquad (2\text{-}51)$$

După cum se observă, relațiile sînt mult mai complexe, în comparație cu cele expuse în paragrafele anterioare. Pentru calculele numerice este indicat să se aplice un procedeu *iterativ* deoarece unele elemente care se definesc sînt prezente în ambii membri ai acestora.

2.3. ELIPSOIDUL DE NIVEL

După cum s-a mai menționat, figura Pămîntului poate fi considerată, într-o aproximație de ordinul doi, ca fiind elipsoidul de rotație.

De aceea, se acceptă că figura normală a Pămîntului este un *elipsoid de nivel* (în limba engleză *Level Ellipsoid*), adică un elipsoid de revoluție care este o suprafață echipotențială a unui cîmp gravific normal. Acceptînd această definiție funcția potențială $U(x, y, z)$:

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \qquad (2\text{-}52)$$

este complet determinată în cazul în care se cunosc:

— forma elipsoidului de rotație (de exemplu semiaxele a și b);

— masa totală M;

— viteza unghiulară ω.

2.3.1. PARAMETRII GEOMETRICI AI ELIPSOIDULUI DE ROTAȚIE

Atît pentru prezentarea formulelor din acest capitol, cît și pentru dezvoltările complexe din partea a doua a manualului este necesară prezentarea parametrilor geometrici prin care se poate defini, geometric, un elipsoid de rotație (fig. 2-6):

$a = \overline{OA} = \overline{OB}$ — semiaxa mare (raza ecuatorială);

$b = \overline{OC} = \overline{OD}$ — semiaxa mică;

$f = \frac{a-b}{a}$ — turtirea (geometrică);

$E = \sqrt{a^2 - b^2}$ — excentricitatea liniară; (2-53)

$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ — prima excentricitate (numerică); (2-54)

$e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}$ — a doua excentricitate (numerică); (2-55)

$c = \frac{a^2}{b}$ — raza de curbură polară. (2-56)

Primii trei parametri se mai numesc și *parametri geometrici principali*. În unele calcule se vor folosi și următoarele constante:

$$m' = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}; \qquad n' = \frac{a-b}{a+b}. \qquad (2\text{-}57)$$

Elipsoidul de rotație poate fi definit prin doi parametri geometrici menționați, dintre care unul trebuie să fie liniar.

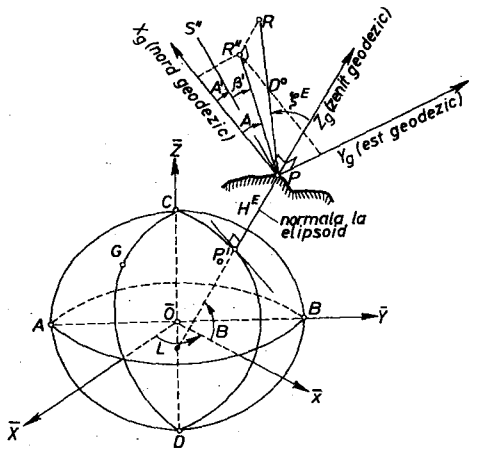


Fig. 2-6. Sisteme de coordonate convenționale.

Între parametrii geometrici ai elipsoidului de rotație se pot stabili cu ușurință următoarele *relații principale de legătură*:

$$b = a(1-f) = a\frac{1-n'}{1+n'}; \tag{2-58}$$

$$b^2 = a^2(1-e^2); \tag{2-59}$$

$$f = 1-\sqrt{1-e^2} = 1-\sqrt{\frac{1}{1+e'^2}}; \tag{2-60}$$

$$e^2 = 2f-f^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}; \tag{2-61}$$

$$e'^2 = \frac{2f-f^2}{(1-f)^2} = \frac{e^2}{1-e^2}; \tag{2-62}$$

$$c = \frac{a}{1-f} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{b}{1-e^2} = b(1+e'^2); \tag{2-63}$$

$$e = \frac{E}{a}; \tag{2-64}$$

$$e' = \frac{E}{b}; \tag{2-65}$$

Prin dezvoltări în serie se obține de asemenea:

$$f = \frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{8}+\ldots = \frac{e'^2}{4}-\frac{3\,e'^4}{8}+\ldots \tag{2-66}$$

2.3.2. SISTEME DE COORDONATE CONVENȚIONALE

Sistemele de coordonate denumite *convenționale* sînt definite în raport cu elipsoidul de referință (fig. 2-6) pe care se proiectează rețelele geodezice de sprijin de ordin superior. În comparație cu sistemele naturale de coordonate, care se raportau direct la procesele de măsurare, se consideră că sistemele convenționale de coordonate se raportează, de regulă, la procesele de calcul.

2.3.2.1. **Sistemul global elipsoidal.** Sistemul cartezian global elipsoidal $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ (fig. 2-6) este omolog cu sistemul cartezian global geocentric. Avînd în vedere modalitatea de determinare a oricărui elipsoid de referință, rezultă o apropiere mare, pînă aproape de coincidență, a originilor $\overline{O}$ și O ale celor două sisteme de coordonate și apoi o asemenea apropiere a axelor de coordonate $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ și X, Y, Z (figurile 2-3 și 2-6).

Referitor la poziția reciprocă a celor două sisteme de coordonate se va reveni mai pe larg în 8.1.2.

Poziția punctului P, situat pe suprafața fizică a pămîntului, poate fi definită prin coordonatele carteziene $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, în raport cu originea $\overline{O}$.

În analogie cu coordonatele naturale Φ, Λ, H^{OR} se definesc *coordonatele elipsoidale* B, L, H^E, prin care se poate descrie, de asemenea, poziția punctului P în sistemul global elipsoidal:

— *latitudinea geodezică* B este unghiul format de normala la elipsoid în punctul P cu planul ecuatorului elipsoidului de referință;

— *longitudinea geodezică* L este unghiul diedru format de meridianul geodezic al punctului P cu meridianul geodezic al punctului Greenwich;

— *altitudinea elipsoidală* H^E este segmentul de normală cuprins între poziția punctului pe suprafața fizică P și proiecția sa pe suprafața elipsoidului P_0'.

Legătura dintre coordonatele elipsoidale B, L, H^E și coordonatele astronomice globale Φ, Λ, H^{OR} va fi dedusă ulterior, prin relațiile (5-43), (5-44) și (4-37).

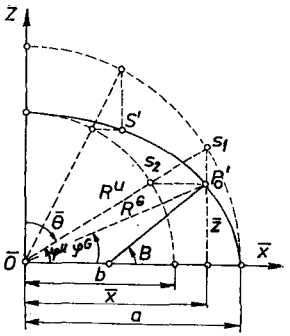


Fig. 2-7. Reprezentarea latitudinilor geodezice B, redusă φ^U și geocentrică φ^G.

Observații. 1. Coordonatele B și L vor fi denumite în manual *coordonate geodezice*. În alte publicații acestea au fost sau sînt încă denumite *coordonate geografice-geodezice* sau pur și simplu *coordonate geografice*, deși determinarea lor constituie una dintre problemele importante ale geodeziei (partea a doua a manualului). Notațiile folosite, în aceste lucrări, pentru coordonatele B și L sînt, de regulă, φ și λ.

2. În geodezie și în cartografia matematică alături de latitudinea geodezică B se mai folosesc (fig. 2-7):

— latitudinea redusă φ^U și complementul său $\overline{\theta}$;

— latitudinea geocentrică φ^G,

rezultînd alte posibilități de descriere a poziției punctului P în sistemul de coordonate global elipsoidal.

3. Din figura 2-7 se observă că:

$$\bar{x} = a\cos\varphi^U; \quad \bar{z} = b\sin\varphi^U. \tag{2-67}$$

Se pot stabili mai multe relații de legătură între latitudinile menționate:

$$\frac{\bar{z}}{\bar{x}} = \frac{b}{a}\ \operatorname{tg}\varphi^U = (1-e^2)\operatorname{tg}B = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}B = \operatorname{tg}\varphi^G$$

și prin urmare:

$$\operatorname{tg}\varphi^U = \frac{b}{a}\operatorname{tg}B; \tag{2-68}$$

sau:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi^U}{\operatorname{tg}B} = \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}}; \tag{2-69}$$

împreună cu:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi^G}{\operatorname{tg}B} = 1-e^2 = \frac{1}{1+e'^2}. \tag{2-70}$$

2.3.2.2. **Sistemul elipsoidal local.** Prin analogie cu sistemul astronomic local descris în 2.1.1.2. se poate defini sistemul elipsoidal local (v. fig. 2-6), în care punctul de stație P îndeplinește rolul de origine, iar axele de coordonate au sensul pozitiv după cum urmează:

— axa Z_g este orientată după normala la elipsoid în punctul P considerat, către zenitul geodezic;

— axa X_a este situată în meridianul geodezic al punctului P (direcția nordului geodezic);

— axa Y_a este orientată spre estul geodezic.

Din compararea figurilor 2-3 și 2-6, rezultă că măsurătorilor α și $\zeta°$ le corespund, în sistemul elipsoidal local:

— azimutul geodezic A;

— unghiul zenital elipsoidal ζ^E.

Distanța înclinată (măsurată) $D°$ este preluată fără modificări și în sistemul elipsoidal local. Prin urmare, poziția punctului R poate fi descrisă în acest sistem prin utilizarea mărimilor A, ζ^E și $D°$. Acestea sînt denumite și *coordonate elipsoidale polare locale*.

Observații. 1. Așa cum s-a menționat (v. 2.1.1.2), în mod obișnuit transmiterea de azimut nu este directă, ci prin intermediul unui punct S (sau chiar a mai multor asemenea puncte). Presupunînd că este cunoscut azimutul direcției PS'' (A_1), transmiterea azimutului geodezic se realizează prin intermediul unghiurilor orizontale β', reduse la normala la elipsoid.

2. Legătura dintre coordonatele locale elipsoidale X_g, Y_g, Z_g și respectiv A, ζ^E și $D°$ este analogă cu legătura dintre coordonatele naturale locale X_a, Y_a, Z_a și respectiv α, $\zeta°$, $D°$, putînd fi reprezentată printr-o formulă de forma (2—10).

3. Transformarea coordonatelor elipsoidale locale în coordonate elipsoidale globale ar putea fi realizată analog cu transformarea care se va prezenta în 24.4. Rezolvările practice folosite pînă în prezent au evitat o astfel de modalitate de calcul.

4. La prelucrarea observațiilor geodezice au fost folosite următoarele soluții:

— s-a separat așa-numita „problemă planimetrică" de „problema altimetrică", motivațiile constînd în influențele negative ale refracției atmosferice, precum și în dificultățile de calcul;

— măsurătorile α, β menționate în sistemul local astronomic sînt transformate în A, β' în sistemul local elipsoidal, prin aplicarea relațiilor (20-11) și (20-18). Pentru distanțele $D°$ nu este necesară această primă transformare.

În continuare, mărimile A, β', $D°$ sînt reduse pe suprafața elipsoidului de referință (v. 20.2), pe care urmează a se efectua prelucrarea. Concomitent, se realizează, așa cum s-a menționat în 2.3.2.1., trecerea de la coordonatele astronomice Φ, Λ la coordonatele geodezice B, L, cu relațiile (5-43) și (5-44), ceea ce conduce la proiectarea punctelor geodezice pe elipsoidul de referință;

— cea de a doua problemă, în altitudine, este rezolvată mai puțin prin utilizarea unghiurilor zenitale, și mai mult prin folosirea nivelmentului geometric, prin metodologia care va forma obiectul capitolelor 4, 5, 16 și 17.

Ca urmare, transformarea unghiurilor $\zeta°$ în ζ^E nu este necesară în această modalitate de prelucrare a observațiilor. Unghiurile $\zeta°$ au fost utilizate în nivelmentul trigonometric geodezic (v. 17.2) pentru rezolvări directe, la distanțe de 1...6 km.

5. O altă categorie de soluții, prin care se obține o *rezolvare unitară* a prelucrării geodezice este reprezentată de așa-numita *rezolvare tridimensională* (v. 24.4).

2.3.3. POTENȚIALUL GRAVITĂȚII NORMALE (AL ELIPSOIDULUI DE NIVEL)

Pentru studierea potențialului gravității W, care este o mărime fizică reală și, ca atare, extrem de complexă, imposibil practic de determinat în totalitatea sa, a fost introdusă noțiunea de *potențial normal* U [v. relația (1-37)], noțiune care va avea în primul rînd un *rol de referință* în diverse analize și determinări. Astfel, cunoscîndu-se expresia generală a

potențialului normal U și presupunînd cunoscute valori ale potențialului perturbator T în anumite puncte pe suprafața Pămîntului [v. relația (5-8)], vor rezulta estimări pentru potențialul gravității W în aceste puncte.

Potențialul normal este raportat, la rîndul său, la o anumită suprafață și la un anumit cîmp de forțe. Deoarece sferoizii de nivel sînt suprafețe relativ dificil de folosit în scopuri practice, *rolul de suprafață normală a Pămîntului este atribuit, de obicei, unui elipsoid de rotație*. Alături de parametrii geometrici de definiție a, f, se consideră și masa totală M a elipsoidului, precum și viteza sa unghiulară de rotație ω. Prin acțiunea de atracție proprie, precum și datorită rotației sale în jurul axei mici, se formează un *cîmp denumit cîmp al gravității normale* sau *cîmp gravific normal* sau mai simplu *cîmp normal*. Dacă se impune condiția ca suprafața elipsoidului să fie în același timp suprafață de nivel în cîmpul normal, rezultă noțiunea cunoscută sub numele de *elipsoid de nivel*.

Deducerea formulelor prin care se exprimă potențialul gravității normale (al elipsoidului de nivel) denumit și *potențial normal* poate fi urmărită în lucrări mai extinse (*Heiskanen* și *Moritz* 1967, *Ledersteger* 1969 ș.a.). Calculele, care nu vor fi prezentate aici, deoarece ar necesita multe dezvoltări suplimentare, nu se bazează pe dezvoltarea potențialului în funcții armonice [(ca în 1.7.)], ci în funcții armonice elipsoidale. În primul caz aproximația de ord. 1 a figurii Pămîntului este sfera, iar în cazul al doilea elipsoidul de rotație.

O primă posibilitate de reprezentare a potențialului gravității normale este (*Heiskanen* și *Moritz* 1967, pag. 67):

$$U = \frac{GM}{E} \operatorname{arc\,tg} e' + \frac{1}{3} a^2\omega^2 =$$

$$= \frac{GM}{b}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e'^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{3} m\right]. \qquad (2\text{-}71)$$

În formula (2-71) singurele necunoscute sînt parametrii geometrici b și e' și constantele fizice GM și ω.

O altă posibilitate de exprimare a potențialului gravific normal este dată de utilizarea coeficienților armonici zonali și a coordonatelor sferice r, θ, L, referite desigur la elipsoidul de nivel:

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\right] + \frac{1}{2} r^2\omega^2 \sin^2\theta, \qquad (2\text{-}72)$$

unde coeficienții armonici zonali sînt determinați cu relația generală:

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3\,e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(1 - n + 5n\,\frac{C-A}{ME^2}\right). \qquad (2\text{-}73)$$

În completare la valorile prezentate cu formulele (1-132) — (1-134) se menționează următoarele recomandări ale *AIG* din anul 1980:

$$J_3 = (-254 \pm 1) \times 10^{-8};\quad J_4 = (-162 \pm 1) \times 10^{-8};$$
$$J_5 = (-23 \pm 1) \times 10^{-8};\quad J_6 = (55 \pm 1) \times 10^{-8}. \qquad (2\text{-}74)$$

2.3.4. GRAVITATEA NORMALĂ

Gravitatea normală γ se poate exprima sub forma generală:

$$\gamma = \text{grad } U, \tag{2-75}$$

rezultînd din relaţia (2-71):

$$\gamma = \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left[\left(1 + \frac{m}{3} \cdot \frac{e' q_0'}{q_0}\right) \sin^2 \beta + \left(1 - m - \right.\right.$$

$$\left. \left. - \frac{m}{6} \cdot \frac{e' q_0'}{q_0}\right) \cos^2 B\right], \tag{2-76}$$

unde β este latitudinea redusă, determinată pe elipsoidul de nivel, cu semiaxa mică u (echivalentele acestor mărimi pe elipsoidul de referinţă au fost notate cu φ^U şi respectiv b). De asemenea se notează:

$$q_0 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{E^2}\right) \text{arc tg } \frac{E}{b} - 3\frac{b}{E}\right];$$

$$q_0' = 3\left(1 + \frac{b^2}{E^2}\right)\left(1 - \frac{u}{E} \text{ arc tg } \frac{E}{u}\right) - 1. \tag{2-77}$$

Prin particularizări pentru $\beta = 0°$ şi respectiv $\beta = 90°$, rezultă:

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab}\left(1 - m - \frac{m}{6} \cdot \frac{e' q_0'}{q_0}\right);$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{m}{3} \cdot \frac{e' q_0'}{q_0}\right), \tag{2-78}$$

astfel încît:

$$f + f^* = \frac{\omega^2 b}{\gamma_e}\left(1 + \frac{e' q_0'}{2 q_0}\right), \tag{2-79}$$

ceea ce reprezintă corespondentul teoremei *Clairaut* (2-40).

Din relaţiile (2-78), (2-72) şi (2-68) se obţine o altă posibilitate de exprimare a gravităţii normale stabilită iniţial de *Somigliana* în anul 1929, în funcţie de latitudinea geodezică B:

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \tag{2-80}$$

În ţara noastră *„Instrucţiunile pentru nivelmentul de ordinele I, II, III, IV, şi cu teodolitul"*, elaborate de *Direcţia topografică militară* în anul 1965, este recomandată calcularea gravităţii normale cu *formula Helmert* (2-50), elaborată în anul 1901, în care singura variabilă este latitudinea geodezică B:

$$\gamma^H = 978\ 030\ (1 + 0{,}0053020 \sin^2 B - 0{,}000\ 000\ 7 \sin^2 2B). \tag{2-81}$$

De menţionat că profesorul *Botezatu* (1963) foloseşte la calculul reducerilor de cîmp normal, necesare la determinarea reţelei gravimetrice de ord. I a ţării noastre, formula *Cassinis-Heiskanen*, recomandată de *AIG* în anul 1930:

$$\gamma^{1930} = 978\ 049\ (1 + 0{,}005\ 288\ 4 \sin^2 B) - 0{,}000\ 005\ 9 \sin^2 2B). \tag{2-82}$$

Mai recent; *Drăghici şi Buşe* (1979) examinează rezultatele diferite care se obţin prin aplicarea unor formule cunoscute pentru calculul gravităţii normale γ specificînd că *Ermeev şi Jurkina* (1974) au recomandat serviciilor geodezice din ţările socialiste utilizarea următoarei formule:

$$\gamma^E = 978\ 030\ (1 + 0{,}005\ 280 \sin^2 B + 0{,}000\ 023 \sin^4 B). \tag{2-83}$$

În această relaţie, $\gamma_e = 978\ 030$ mgal este preluată din formula *Helmert* (2-81), iar ceilalţi coeficienţi, din paranteză, sînt calculaţi prin utilizarea parametrilor geometrici ai elipsoidului *Krasovski*.

Ultimele recomandări ale *AIG*, din anul 1980, prevăd o formulă de calcul al gravităţii normale γ cu o aproximaţie de 10^{-4} m gal:

$$\gamma^{1980} = 978\ 032{,}7\ (1 + 0{,}005\ 279\ 041\ 4 \sin^2 B + 0{,}000\ 023\ 271\ 8 \sin^4 B +$$

$$+ 0{,}000\ 000\ 126\ 2 \sin^6 B + 0{,}000\ 000\ 000\ 7 \sin^8 B),$$

precum şi o formulă pentru uz curent, cu o aproximaţie de calcul de 0,1 mgal:

$$\gamma^{1980} = 978\ 032{,}7\ (1 + 0{,}005\ 302\ 4 \sin^2 B - 0{,}000\ 0005\ 8 \sin^2 2B).$$

Diferenţele care rezultă din aplicarea unor formule menţionate în acest paragraf pentru calculul valorilor gravităţii normale γ, la diverse latitudini corespunzătoare teritoriului ţării noastre, pot fi urmărite în tabelul 2-1. Calculînd diferenţa $\gamma^E - \gamma^{1980}$ se obţine:

$$(\gamma^E - \gamma^{1980}) \text{ mgal} = -2{,}7 + 0{,}923286 \sin^2 B - 0{,}265891 \sin^4 B -$$

$$- 0{,}123428 \sin^6 B,$$

rezultînd pentru ţara noastră:

$$(\gamma^E - \gamma^{1980})_{44°} = 2{,}33 \text{ mgal}; \quad (\gamma^E - \gamma^{1980})_{48°} = 2{,}28 \text{ mgal}.$$

Din datele prezentate în tabelul 2-1 se observă caracterul convenţional al mărimilor γ, care sînt dependente de formula utilizată la calculul lor. Este necesar un consens în aplicarea unei anumite formule în lucrările gravimetrice şi respectiv gravimetrice-geodezice din ţara noastră.

Tabelul 2–1

Latitudinea geodezică B	Formula Cassinis (2–82)	Formula Helmert (2–81)	Formula Eremeev (2–83)	Sistemul geodezic de referinţă 1980
	Gravitatea normală γ [mgal]			
44°00′	980 539,1	980 528,4	980 529,5	980 527,1
44°30′	584,3	573,6	574,7	572,4
45°00′	629,4	618,9	619,9	617,6
45°30′	674,5	664,1	665,2	662,9
46°00′	719,7	709,4	710,4	708,1
46°30′	764,8	754,6	755,7	753,4
47°00′	809,8	799,8	800,8	798,5
47°30′	854,8	844,9	846,0	843,7
48°00′	980 899,8	980 890,0	980 891,0	980 888,8

2.3.5. VARIAȚIA GRAVITAȚII NORMALE DEASUPRA ELIPSOIDULUI

Pentru o cotă mică H deasupra elipsoidului (de ordinul celor întîlnite în geodezie) se poate aplica formula *Bruns* (2-20), sub condiția $\rho = 0$:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2, \tag{2-85}$$

unde, de această dată, curbura medie J_0, exprimată în funcție de razele de curbură principale $R_1 = M$, $R_2 = N$ va fi:

$$J_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right), \tag{2-86}$$

în care M este raza de curbură a elipsei meridiane, iar N — raza de curbură a primului vertical (marea normală).

Pentru a calcula mărimea gradientului gravității normale în limita neglijării termenilor de ord. 2 și superiori pentru turtirea f, se folosesc următoarele formule ce se vor demonstra în 6.2.1 și 6.3:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{c}{a^2}(1 + e'^2\cos^2 B)^{3/2} \approx \frac{c}{a^2}\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\cos^2 B + \ldots\right); \\ \frac{1}{N} &= \frac{c}{a^2}(1 + e'^2\cos^2 B)^{1/2} \approx \frac{c}{a^2}\left(1 + \frac{1}{2}e'^2\cos^2 B + \ldots\right), \end{aligned} \tag{2-87}$$

unde:

$$e'^2 \approx 2f. \tag{2-65}$$

În acest fel rezultă:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \approx \frac{2c}{a^2}(1 + e'^2\cos^2 B) \approx \frac{2c}{a^2}(1 + 2f\cos^2 B),$$

încît se poate scrie:

$$J_0 = \frac{1-f}{a}(1 - 2f - 2f\sin^2 B). \tag{2-88}$$

Considerînd relațiile (2-41) și (2-43):

$$\omega^2 = \frac{m\gamma_e}{a}; \quad \gamma \approx \gamma_e(1 - f\sin^2 B),$$

rezultă:

$$\omega^2 \approx \frac{m}{a}\gamma(1 + f\sin^2 B). \tag{2-89}$$

Cu aceasta, mărimea gradientului vertical al gravității normale va fi:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -2\gamma\frac{1-f}{a}(1 - 2f - 2f\sin^2 B) - 2\frac{m}{a}\gamma(1 + f\sin^2 B),$$

sau în limita aproximației menționate:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -\frac{2\gamma}{a}(1 + f + m - 2f\sin^2 B). \tag{2-90}$$

Gravitatea normală la cota H poate fi calculată printr-o dezvoltare în serie *Taylor*:

$$\gamma_H = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial H}H + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2}H^2 + \ldots \tag{2-91}$$

Calculul derivatei de ord. 2 se poate face aproximativ, în funcție de relația:

$$\gamma \approx \frac{GM}{a^2},$$

de unde:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial a} = -\frac{2GM}{a^3} \text{ și } \frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \approx \frac{6GM}{a^4} \approx \frac{6\gamma}{a^2}. \tag{2-92}$$

Din expresiile (2-89) — (2-92) se obține relația:

$$\gamma_H = \gamma\left[1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f\sin^2 B)H + \frac{3}{a^2}H^2\right]. \tag{2-93}$$

În cadrul acelorași recomandări ale lui *Ermeev* (1974), menționate în paragraful anterior, se prezintă următoarea formulă de calcul:

$$\begin{aligned} \gamma_H^E = \gamma^E &- 0{,}308\ 774\ (1 - 0{,}001\ 4196\ \sin^2 B - \\ &- 0{,}000\ 0065\ \sin^4 B)H + 0{,}000\ 0724 \cdot 10^{-6} \cdot H^2, \end{aligned} \tag{2-94}$$

în care valorile γ se exprimă în mgal, iar altitudinile H, în m.

Recomandările *AIG* din anul 1930 prevăd:

$$\gamma_H^{1930} = \gamma^{1930} - (0{,}30877 - 0{,}00045\sin^2 B)H + 0{,}000072 \cdot 10^{-6}H^2. \tag{2-95}$$

Deoarece recomandările *AIG* din anul 1980 nu prevăd explicit formula corespondentă pentru (2-95), în calcule se poate folosi o relație analoagă cu aceasta, cu diferența că se va uza de expresia γ^{1980}. Diferența $\gamma_H^E - \gamma_H^{1980}$ ar avea prin urmare expresia:

$$\begin{aligned} \gamma_H^E - \gamma_H^{1980} = (\gamma^E - \gamma^{1980}) &- 0{,}000\ 004\ H - 0{,}000\ 011\ 664\ H\sin^2 B + \\ &+ 0{,}000\ 002\ 007\ H\sin^4 B + 0{,}000\ 000\ 4 \cdot 10^{-6}H^2. \end{aligned}$$

Se observă că altitudinea H nu influențează semnificativ (pentru altitudinile întîlnite în țara noastră) diferența avută în considerație.

În calcule uzuale se poate folosi o expresie simplificată:

$$\gamma_H \approx \gamma - 0{,}3086\ H, \tag{2-96}$$

gradientul aproximativ al gravității normale fiind considerat:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} \approx -0{,}3086 \text{ mgal/m}. \tag{2-97}$$

Observație. În aproximația $J \approx J_0$, relația (2-20) se poate scrie în funcție de formula (2-85):

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G\rho. \tag{2-98}$$

Folosind valorile medii cu care s-a operat pînă acum, rezultă:

$$\frac{\partial g}{\partial h} \approx -0{,}3086 + 0{,}2238 = -0{,}0848 \text{ mgal/m.} \qquad (2\text{-}99)$$

În acest fel se exprimă valoarea gravității g_0 la nivelul geoidului în raport de valoarea măsurată g și gradientul vertical mediu (2-99) și altitudinea H (în metri) a punctului considerat:

$$g_0 \approx g + 0{,}0848\ H. \qquad (2\text{-}100)$$

Capitolul 3
ANOMALIILE CÎMPULUI GRAVITĂȚII

După cum s-a arătat în cap. 2 valoarea normală a accelerației gravității γ se referă la suprafața elipsoidului de referință folosit într-o anumită perioadă, putînd fi calculată cu o formulă, care se adoptă odată cu parametrii elipsoidului.

Pentru diverse scopuri geofizice și geodezice este necesară compararea valorilor normale cu valorile măsurate, efective ale accelerației gravității după ce se realizează, în prealabil, reducerea acestora din urmă la suprafața geoidului.

Din dorința de simplificare a expunerii se va utiliza în continuare doar noțiunea de reducere la geoid, deși, riguros, ar trebui folosit fie reducerea la geoid, fie reducerea la cvasigeoid, funcție de sistemul de altitudini adoptat oficial într-o anumită țară (v. cap. 4).

Reducerile, care sînt de natură geofizică, se determină prin acceptarea unor ipoteze simplificatoare, care corespund doar parțial realității.

Anomalia gravității Δg_r^P în punctul P este dată de relația:

$$\Delta g_r^P = g_r^P - \gamma^P, \qquad (3\text{-}1)$$

ndicele r indicînd reducerea geofizică ce s-a aplicat la calculul gravității eduse g_r^P.

3.1. REDUCEREA ÎN AER LIBER (FAYE)

Principiile care stau la baza determinării reducerii *Faye* sînt următoarele:

— geoidul este aproximat, ca suprafață, cu elipsoidul de referință sau, mai frecvent, cu o sferă de rază medie $R \approx 6\,378$ km (pentru latitudinea $B = 45°$). Altitudinea H folosită este însă cunoscută din determinările geodezice, adică se referă la geoid;

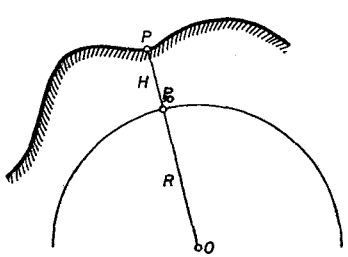


Fig. 3-1. Reducerea în aer liber (*Faye*).

— masa Pămîntului este concentrată în interiorul geoidului, ca și cum între punctele P și P_0 ar fi „aer liber" (fig. 3-1). În aceste condiții, gravitatea redusă în punctul P_0 se poate calcula prin folosirea gradientului normal al greutății dat de formula (2-97).

Dacă altitudinea H este exprimată în metri, termenul corectiv rezultă în mgal, iar *gravitatea redusă în aer liber* se calculează, în mod curent, cu relația:

$$g_F^P = g^{P_0} \approx g^P + 0{,}3086\ H. \qquad (3\text{-}2)$$

Anomalia în aer liber, denumită și *anomalia în reducerea Faye*, a gravității va fi:

$$\Delta g_F^P = g^P + 0{,}3086\ H - \gamma^P. \qquad (3\text{-}3)$$

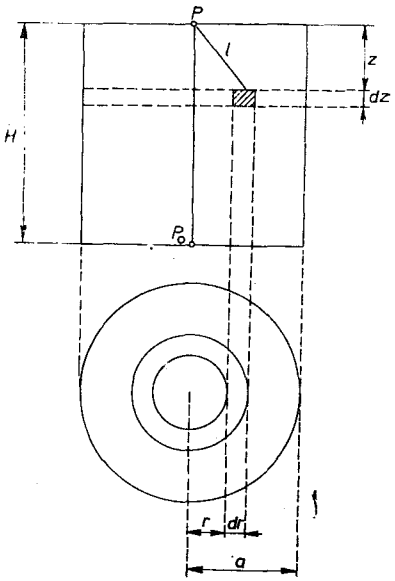


Fig. 3-2. Reducerea de strat intermediar.

3.2. REDUCEREA DE STRAT INTERMEDIAR

Prin aplicarea acestei reduceri se urmărește eliminarea influenței de atracție exercitată de stratul intermediar, de grosime H, delimitat de două plane paralele, care trec prin punctele P și P_0, planul din P_0 fiind tangent la geoid (fig. 3-2). Se presupune, prin urmare, că terenul din jurul stației P este complet plan.

Masele situate între suprafața fizică a Pămîntului și geoid, comprimate în cadrul reducerii *Faye* în interiorul geoidului, sînt „readuse" în apropierea poziției inițiale, considerîndu-se că formează stratul intermediar menționat. Rezultă că semnul reducerii de strat intermediar va fi negativ.

Întinderea stratului intermediar poate fi, în principiu, foarte mare, în acest caz putîndu-se imagina și o compensație între masele situate deasupra planului care trece din punctul P și masele aflate sub acest plan. S-a constatat că efectul maselor dispuse la distanțe de 10 H de punctul P este de aproximativ 10% din efectul total și de aceea, în mod obișnuit, întinderea stratului este o mărime finită, stabilită în funcție de altitudinea H a punctului de stație (*Constantinescu* ș.a. 1964).

În aceste condiții, stratul intermediar poate fi înlocuit cu un cilindru vertical, de dimensiunile indicate în figura 3-2, al cărui potențial de atracție va fi:

$$V_c = G \iint \frac{dm}{l},$$

unde:

$$dm = 2\,r\,dr\,dz. \qquad (3\text{-}4)$$

Notînd că:

$$l^2 = r^2 + z^2,$$

se obține după separarea variabilelor:

$$V_c = 2\pi G\rho \int_0^H dz \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\,\pi G\rho \int_0^H \left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right) dz. \qquad (3\text{-}5)$$

Considerînd că distanța z este măsurată în sensul crescător al diferențelor de nivel, forța de atracție a întregului cilindru se poate determina cu o relație analogă cu formula (2-8):

$$F = -\frac{dV}{dz} = 2\pi G\rho \left| z - \sqrt{a^2 + z^2} \right|_0^H = 2\pi G\rho \left(H - \sqrt{a^2 + H^2} + a\right) =$$

$$= 2\pi G\rho \left\{H + a\left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{H}{a}\right)^2}\right)\right\}. \qquad (3\text{-}6)$$

Dacă se aplică o dezvoltare în serie și se opresc doar termenii de ord. 1, rezultă:

$$F \approx 2\pi G\rho H \left(1 - \frac{H}{2a}\right). \qquad (3\text{-}7)$$

De obicei termenul din paranteză se neglijează, astfel că atracția stratului intermediar poate fi reprezentată sub forma:

$$F \approx 0{,}04191\ \rho H. \qquad (3\text{-}8)$$

Densitatea medie a stratului intermediar ρ poate fi determinată direct, ceea ce evident conduce la costuri suplimentare pentru lucrările respective, sau se interpolează de pe hărțile geologice ale zonei considerate. Dacă se lucrează cu valoarea medie:

$$\rho = 2{,}67\ \text{g/cm}^3,$$

se obține:

$$F \approx 0{,}1119\ H. \qquad (3\text{-}9)$$

Reducerea de strat intermediar, numită și *reducerea Bouguer incompletă* ΔF_B este numeric egală cu forța de atracție F a stratului intermediar. Prin scăderea sa din mărimea măsurată se obține valoarea redusă corespunzătoare:

$$g_B^P = g^P - \Delta F_B^P. \qquad (3\text{-}10)$$

În mod curent se aplică o grupare a celor două reduceri examinate pînă acum, rezultînd *reducerea de elevație*, numită și *reducerea Bouguer completă*. Gravitatea redusă în acest mod va fi:

$$g_E^P = g^P + \Delta F_F^P - \Delta F_B^P = g^P + (0{,}3086\ H - 0{,}4191\ \rho)\ H \qquad (3\text{-}11)$$

sau în funcție de valoarea medie $\rho \approx 2{,}67$ g/cm³:

$$g_E^P = g^P + 0{,}1967\ H. \qquad (3\text{-}12)$$

3.3. REDUCEREA DE RELIEF

Această reducere urmărește eliminarea aproximației principale introdusă în calculul reducerii de strat intermediar, unde s-a considerat că terenul din jurul stației P este complet plan. În realitate, suprafața fizică a Pămîntului prezintă excese și deficite de masă în raport de stratul intermediar (fig. 3-3, *a*), care exercită o influență de atracție, cuprinsă în valoarea măsurată în stația P.

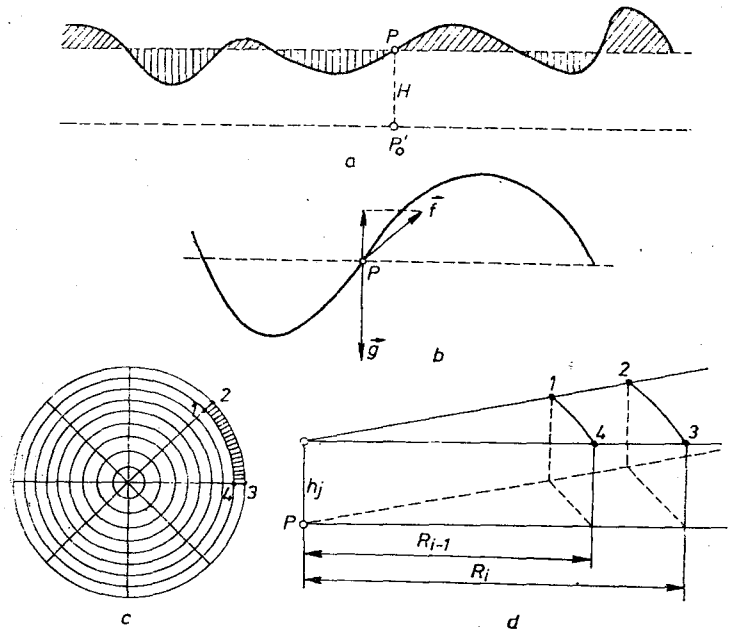


Fig. 3-3. Reducerea de relief.

Semnul reducerii de relief va fi întotdeauna pozitiv deoarece:

— în cazul unui deficit de masă, înseamnă că la reducerea de strat intermediar s-a scăzut, nejustificat, o anumită cantitate, ce urmează să fie completată prin reducerea de relief;

— în cazul unui excedent de mase (fig. 3-3, *b*), valoarea gravității măsurată în punctul de stație P este micșorată cu o cantitate egală cu proiecția forței $\vec{f}$ pe direcția gravității. Pentru a înlătura efectul de atracție al excesului de mase va fi deci necesar să se aplice corecția de relief tot cu semn pozitiv. De-abia după aplicarea acestei corecții, suprafața superioară a stratului intermediar poate fi considerată aproximativă plană.

Pentru calculul complet al acestei corecții se apelează la geometrizări ale terenului din jurul punctului de stație, care va fi reprezentat sub forma unor sectoare de inel cilindrice, pentru care efectul de atracție se poate calcula pe baza relațiilor cunoscute din paragraful anterior (fig. 3-3, *c*).

Pentru fiecare sector se determină o diferență de nivel medie h_j, în raport cu cota punctului P. Deoarece semnul reducerii de relief este întotdeauna pozitiv, semnul diferenței de nivel h_j nu are, în acest caz, nici o importanță.

Pentru a calcula această influență pentru sectorul *1—2—3—4* din figura 3-3, *c,d* se aplică formula (3-6), considerînd cilindrul de rază R_i și înălțime h_j:

$$F_i = 2\pi G\rho \left(h_j - \sqrt{R_i^2 + h_j^2} + R_i\right) \qquad (3\text{-}13)$$

și, în mod analog, pentru cilindrul de rază R_{i-1} și aceeași înălțime h_j:

$$F_{i-1} = 2\pi G\rho \left(h_j - \sqrt{R_{i-1}^2 + h_j^2} + R_{i-1}\right). \qquad (3\text{-}14)$$

Efectul de atracție al inelului cilindric considerat va fi prin urmare:

$$F_{i-1,\,i} = 2\,\pi G\rho\,(R_i - R_{i-1} + \sqrt{R_{i-1}^2 + h_j^2} - \sqrt{R_i^2 + h_j^2}). \qquad (3\text{-}15)$$

Notînd cu n numărul sectoarelor de inel cilindric, efectul de atracție, adică reducerea de relief, corespunzătoare sectorului de cotă h_j va fi:

$$\Delta F_j = \frac{1}{n}\,2\,\pi G\rho\,(R_i - R_{i-1} + \sqrt{R_{i-1}^2 + h_j^2} - \sqrt{R_i^2 + h_j^2}), \qquad (3\text{-}16)$$

iar reducerea de relief ΔF_R va rezulta ca o sumă a efectelor de atracție din sectoarele considerate:

$$\Delta F_R = \sum \frac{1}{n}\,2\,\pi G\rho\,(R_i - R_{i-1} + \sqrt{R_{i-1}^2 + h_j^2} - \sqrt{R_i^2 + h_j^2}). \qquad (3\text{-}17)$$

Pentru ilustrarea ordinului de mărime, se menționează cîteva valori ale corecției de relief: pe Vîrful Omul 34,65 mgal, pe Caraiman 38,62 mgal, pe Doamnele 13,08 mgal.

Această muncă laborioasă de determinare a corecțiilor de relief, bazată pe interpolări și calcule numeroase, a fost înlocuită în ultimii ani de metode numerice, exploatate la calculatoare electronice. Astfel de metode de calcul permit adoptarea unui model de calcul perfecționat: considerarea formei elipsoidice a suprafeței de referință, modificarea limitelor sectoarelor utilizate (pînă la 500—1000 km) ș.a.m.d.

Valoarea gravității corectată cu reducerile de elevație și de relief se numește *gravitate Bouguer perfecționată* (*Heiskanen* 1967):

$$g_B^P = g^P + \Delta F_F^P - \Delta F_B^P + \Delta F_R^P. \qquad (3\text{-}18)$$

3.4. REDUCEREA DE VARIAȚIE DIURNĂ

În lucrările gravimetrice de înaltă precizie se ține seamă de influențele de atracție exercitate de Soare (datorită masei sale) și de Lună (datorită apropierii sale față de Pămînt) asupra unui punct P situat pe suprafața Pămîntului.

La noi în țară se folosește în acest scop metoda elaborată de profesorii *L. Constantinescu* și *R. Botezatu* (1963) care au întocmit grafice și tabele corective corespondente cu ajutorul cărora se determină reducerea de variație diurnă ΔF_{VD}.

3.5. ANOMALIA CÎMPULUI GRAVITĂȚII ÎN REDUCEREA BOUGUER

Anomalia în reducerea Bouguer este dată de relația:

$$\Delta g_B^P = g^P + \Delta F_F^P - \Delta F_B^P + \Delta F_R^P + \Delta F_{VD}^P - \gamma^P. \qquad (3\text{-}19)$$

În unele lucrări din expresia de mai sus lipsește reducerea de variație diurnă:

$$\Delta g_B^P = g^P + \Delta F_F^P - \Delta F_B^P + \Delta F_R^P - \gamma^P. \qquad (3\text{-}20)$$

Această omitere este justificată de faptul că reducerile de variație diurnă sînt mici, în comparație cu celelalte reduceri.

3.6. REDUCEREA IZOSTATICĂ

Încă din timpul determinărilor cu pendulul efectuate de *Bouguer* în *Peru* în anul 1749 a rezultat că atracția exercitată efectiv de *Munții Anzi* este mult mai mică decît cea rezultată din calcule.

Aceste constatări s-au verificat în determinările gravimetrice ulterioare, rezultînd pentru anomaliile în reducerea *Bouguer* valori puternic negative în regiunile muntoase (40—90 mgal/km), puternic pozitive în regiunile oceanice ($\approx$ 70 mgal/km) și valori mici (oscilînd în jurul valorii zero) în regiunile continentale. Concluzia a fost că există o compensație între relief și distribuția de masă din interiorul Pămîntului, starea generală de echilibru a maselor crustale în raport cu substratul care suportă crusta fiind denumită *izostazie*. Echilibrul izostatic nu trebuie înțeles decît în mod general, pentru zone foarte mari, chiar pentru întreaga suprafață a Pămîntului, pentru care suma anomaliilor gravimetrice este aproximativ zero.

Dintre ipotezele utilizate pentru calculul reducerilor izostatice, se remarcă cele dezvoltate de *Pratt-Hayford* și respectiv *Airy-Heiskanen*. În prima ipoteză se presupune că în raport cu un anumit nivel de compensație, situat la circa 113 km sub nivelul mării, masa coloanelor verticale, cu baze egale, este uniformă și constantă în orice parte a Pămîntului (fig. 3-4, *a*). În cea de a doua ipoteză se presupune că masele topografice, de densitate constantă $\rho_0 = 2{,}67$ g/cm³, plutesc pe o magmă de densitate mai mare $\rho = 3{,}27$ g/cm³. Cu cît masa topografică este mai mare, cu atît ea se afundă mai mult în magmă. În acest model izostatic scoarța terestră are, prin urmare, grosimi variabile și anume în zonele muntoase aceasta pătrunde mai adînc în substratul pe care se sprijină, în timp ce în zonele oceanice această pătrundere este mai mică (fig. 3-4, *b*).

Reducerea izostatică se determină în funcție de modelul izostatic acceptat, în mod analog cu reducerea de relief, avîndu-se în vedere sectoare de inel cilindric.

Ca urmare, *anomalia izostatică* Δg_I este:

$$\Delta g_I^P = g^P + \Delta F_F^P - \Delta F_B^P + \Delta F_R^P + \Delta F_{VD}^P + \Delta F_I^P - \gamma^P. \qquad (3\text{-}21)$$

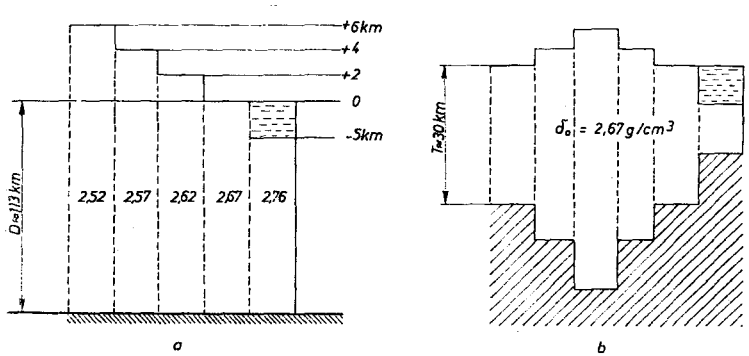


Fig. 3-4. Ipoteze de reducere izostatică.

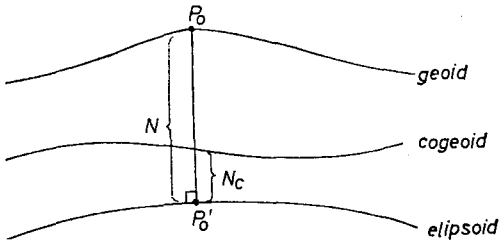


Fig. 3-5. Efectul indirect al reducerilor gravității.

3.7. EFECTUL INDIRECT. COGEOID

Anomaliile gravimetrice sînt utilizate în geodezie și la studiul formei geoidului. Operațiunile de îndepărtare sau deplasare pe verticală a maselor, efectuate la calculul reducerilor geofizice, modifică valoarea potențialului și, ca urmare, rezultă o modificare, indirectă, a figurii geoidului. Prin utilizarea unui anumit gen de anomalii se va obține, în consecință, o figură mai mult sau mai puțin apropiată de geoid, care a primit denumirea de *cogeoid*. Modificarea formei geoidului este denumită *efectul indirect* al reducerilor gravității. Depărtarea dintre geoid și elipsoid, denumită *ondulația geoidului* N, se va deosebi de *ondulația cogeoidului* N_c în funcție de anomaliile folosite (fig. 3-5):

$$N = N_c + \delta N. \tag{3-22}$$

Pentru reducerile examinate pînă acum ordinul de mărime al abaterilor δN este următorul:

$$\begin{aligned} \Delta F_F &\rightarrow \delta N \approx 0; \\ \Delta F_B &\rightarrow \delta N \approx \text{cîteva sute de metri}; \\ \Delta F_I &\rightarrow \delta N \approx \text{cîțiva zeci de metri}. \end{aligned} \tag{3-23}$$

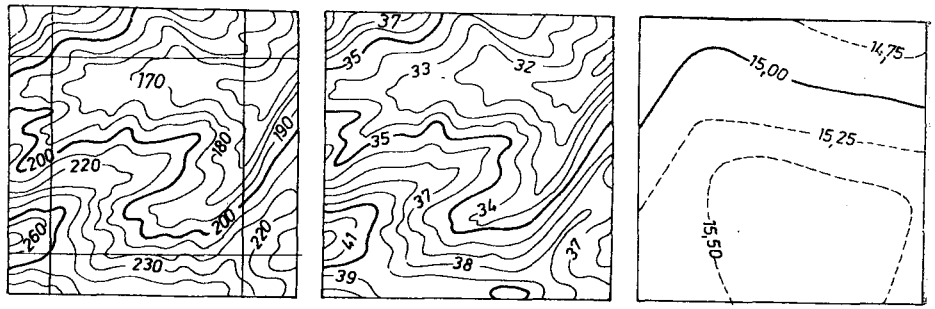
Efectul indirect al anomaliilor *Bouguer* este de circa 10 ori mai mare decît ondulația geoidului însăși și de aceea anomaliile *Bouguer* nu pot fi folosite pentru determinarea geoidului.

În schimb, anomaliile în aer liber și anomaliile izostatice corespund mult mai bine acestui scop.

3.8. REPREZENTAREA GRAFICĂ A ANOMALIILOR CÎMPULUI GRAVITAȚII

Pentru a putea fi utilizate în multiple lucrări geofizice, geodezice, anomaliile gravimetrice sînt reprezentate pe hărți.

Pentru ilustrarea didactică a aspectului pe care îl au hărțile de egală anomalie se prezintă în figura 3-6 un extras din manualul profesorului *Lichte* (1973), care se referă la o zonă din regiunea orașului *Karlsruhe* (*R.F.G.*). În figura 3-6, *a* sînt reprezentate curbele de nivel (echidistanța 10 m). În figura 3-6, *b* sînt reprezentate curbele de egală anomalie în aer liber (echidistanța egală cu 1 mgal) pentru aceeași zonă. Se observă asemănarea dintre reprezentările din primele două planșe, fiind de reținut, prin urmare, variațiile destul de mari ale curbelor de egală anomalie în aer liber. În



a *b* *c*

Fig. 3-6. Exemple de hărți de egală anomalie.

figura 3-6, *c* sînt reprezentate curbele de egală anomalie în reducerea *Bouguer* pentru aceeași zonă (echidistanța curbelor 0,25 mgal). Toate planșele sînt reprezentate la scara 1 : 25 000.

Este de reținut variația mult mai lentă a anomaliei *Bouguer*, în comparație cu variația anomaliei în aer liber, aspect care se are în vedere în rezolvările practice, deoarece erorile de interpolare sînt, în consecință, mai mici.

Principial, la redactarea hărților de anomalii pentru scopurile geodezice s-ar putea folosi oricare din reducerile, respectiv anomaliile geofizice, prezentate în acest capitol, cu condiția de a se ține însă seama și de efectul indirect.

Din acest punct de vedere, reducerile geofizice și respectiv anomaliile gravimetrice prezintă următoarele caracteristici principale:

— reducerile în aer liber conduc la anomalii ușor de calculat, au un efect indirect mic, calități care le recomandă spre folosire în scopuri geodezice. Deoarece depind în mod deosebit de relief, este foarte dificil să se întocmească hărți (la scări mari) cu anomalii în aer liber pentru teritorii întinse, interpolarea directă de pe asemenea hărți fiind caracterizată printr-un grad mic de precizie;

— anomaliile *Bouguer* sînt relativ ușor de calculat, se pretează foarte bine la interpolare, deoarece variațiile sînt mici, chiar pentru zone mai întinse. În schimb, efectul indirect este mare;

— anomaliile izostatice însumează calitățile principale examinate anterior: variații mici (deci posibilitatea de interpolare și exploatare foarte bune) și efect indirect mic. Calculul reducerilor izostatice este însă laborios, și de aceea hărțile cu anomalii izostatice sînt redactate, în general, la scări mici.

La noi în țară se folosește curent un procedeu de interpolare indirectă, constînd din următoarele etape:

— de pe hărți ale anomaliei *Bouguer* se calculează anomalia medie Δg_B^m pentru zona considerată;

— anomalia medie în aer liber pentru această zonă se calculează cu relația:

$$\Delta g_F^m = \Delta g_B^m + 0{,}04191\ \rho H^m, \tag{3-24}$$

unde H^m reprezintă cota medie caracteristică zonei considerate.

Metodele grafice de interpolare a anomaliilor gravității prezintă unele avantaje, care derivă în primul rînd din ușurința cu care se pot face interpolările.

În același timp asemenea categorii de determinări prezintă și importante impedimente, cum ar fi: precizie scăzută în zonele în care determinările efective au fost mai puțin dense (și acest lucru rămîne necunoscut utilizatorului), transmiterea erorilor de reprezentare grafică și de redactare, multiplicare și păstrare a hărților asupra rezultatelor interpolării ș.a.

Din acest motiv interpolările pe cale grafică a anomaliilor cîmpului gravific sînt folosite, în general, pentru zone de șes, unde erorile menționate sînt ceva mai mici, existînd o tendință generală actuală de înlocuire a metodelor grafice prin metode numerice de interpolare.

3.9. INTERPOLAREA NUMERICĂ A ANOMALIILOR CÎMPULUI GRAVITĂȚII

Deoarece descrierea completă a metodelor de interpolare numerică depășește cadrul unui manual universitar în continuare se vor expune numai principiile care stau la baza celor mai cunoscute metode.

3.9.1. INTERPOLAREA ANALITICĂ

Valoarea interpolată a anomaliei gravimetrice într-un punct oarecare P, notată $\widetilde{\Delta g}_P$ poate fi exprimată ca o funcție liniară de valorile anomaliei gravimetrice Δg_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cunoscute din determinări gravimetrice în n puncte învecinate:

$$\widetilde{\Delta g}_P = a_1\Delta g_1 + a_2\Delta g_2 + \ldots + a_n\Delta g_n = \sum_1^n a_i\Delta g_i. \qquad (3\text{-}25)$$

Coeficienții a, care urmează a se determina, au o dependență pronunțată față de relief și de aceea relația (3-25) poate fi folosită în cazul anomaliilor *Bouguer* și izostatice și doar parțial, în terenuri plane, în cazul anomaliei în aer liber.

Pentru a determina acești coeficienți, se acceptă de exemplu încadrarea punctului în care se interpolează valoarea anomaliei gravității numai în interiorul unui triunghi, determinat de trei puncte în care se cunosc valorile anomaliilor Δg. În acest caz relația (3-25) se simplifică:

$$\widetilde{\Delta g}_P = a_1\Delta g_1 + a_2\Delta g_2 + a_3\Delta g_3. \qquad (3\text{-}26)$$

Planul care trece prin cele trei puncte (fig. 3-7) are ecuația:

$$z = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3, \qquad (3\text{-}27)$$

unde:

$$a_1 = \frac{(x_2 - x)(y_3 - y_2) - (y_2 - y)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)}, \qquad (3\text{-}28)$$

iar a_2 și a_3 se deduc din relația anterioară, prin premutări circulare.

Comparînd relațiile (3-26) și (3-27) se observă, că în cazul în care coordonata z este înlocuită cu anomalia Δg, relațiile sînt identice. Soluția de

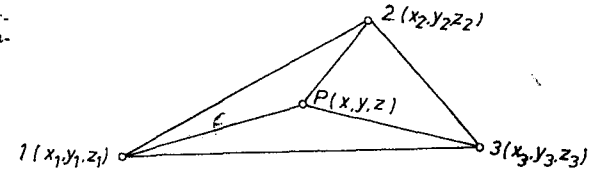


Fig. 3-7. Metodă de interpolare a anomaliilor gravității.

interpolare este dată prin urmare de formula (3-26) unde coeficienții necesari se calculează cu relații de tipul (3-28), în funcție de coordonatele plane x,y ale celor patru puncte considerate.

3.9.2. DETERMINAREA FUNCȚIILOR DE INTERPOLARE

Se caută determinarea unor funcții de interpolare, de un grad oarecare, de forma:

$$\Delta g_A + v_{\Delta g_A} = K_{00} + K_{10}x_A + K_{01}x_B + K_{20}x_A^2 + K_{02}x_B^2 + \\ + K_{11}x_Ax_B + \ldots, \qquad (3\text{-}29)$$

unde:

Δg_A este anomalia cunoscută în punctul A;

$v_{\Delta g_A}$, K — corecția specifică anomaliei considerate, respectiv coeficienți (necunoscute) care urmează a se determina în procesul de compensare;

x_A, x_B, ... — coordonatele stațiilor gravimetrice din zona în care se execută interpolarea.

Forma ecuației (3-29) poate fi foarte complexă (de exemplu *Wolf* (1967) a folosit o funcție de gradul 4, cu 15 necunoscute). În cadrul compensării după metoda celor mai mici pătrate se determină coeficienții K, ce vor putea fi utilizați în oricare din punctele din zonă în care se va face ulterior interpolarea anomaliei gravimetrice.

Trebuie menționat că anomaliile Δg, care sînt supuse unor asemenea prelucrări, posedă o dublă corelație statistică și anume: de o parte sînt corelațiile datorate procesului de măsurare propriu-zis, iar pe altă parte corelațiile datorate dependențelor dintre anomaliile Δg și cotele H.

3.9.3. METODA COLOCAȚIEI – PREDICȚIEI

Metoda colocației a cunoscut în ultimii ani o dezvoltare deosebită în geodezie.

În continuare se prezintă succint principiul metodei, urmînd ca pentru clarificarea completă cititorul interesat să consulte literatura din domeniu (*Heiskanen* și *Moritz* 1967, *Moritz* 1970, 1980 *a*, *b*, *Wolf* 1975, 1977, *Dragomir* ș.a. 1977 ș.a.).

În această metodă se operează cu următoarele categorii de mărimi (*Wolf* 1977):

— *măsurători* M_1^0, ... M_n^0, caracterizate prin matricea de covarianță $\mathbf{C}_M$;

— *corecții* v_1, v_2, ... v_n, care intervin ca urmare directă a procesului de măsurare;

— *corecții suplimentare* s'_1, s'_2, ... s'_t, care intervin ca urmare a unor ipoteze specifice folosite în modelul de prelucrare, cum ar fi de exemplu: variații neregulate ale driftului instrumental (*Serbetçi* 1968), componente de natură iregulară, în variația seculară a cotelor punctelor rețelelor de nivelment repetat (*Ghițău* 1970), influențe ale azimutelor *Laplace* la compensarea componentelor deviațiilor verticalei (*Wolf* 1949) ș.a. Acestor corecții le corespunde matricea de covariață $\mathbf{C}_{s'}$;

— *necunoscute* x_1, x_2, ..., x_n, care intervin în modelul funcțional.

Cu aceste notații, modelul funcțional specific metodei colocației are forma:

$$\mathbf{M}^\circ + \mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Rs}'. \tag{3-30}$$

Metoda predicției își propune ca scop principal determinarea în procesul de prelucrare a unor mărimi suplimentare, de aceeași natură cu măsurătorile propriu-zise, reușind în acest fel prin interpolare + extrapolare o îndesire a măsurătorilor în zone greu accesibile (uneori chiar imposibil). Acest lucru este realizat prin determinarea unor funcții de forma:

$$\mathbf{f} = \mathbf{Gx} + \mathbf{Ms}, \tag{3-31}$$

în care mărimile s au aceeași semnificație cu s' însă se referă la punctele în care se realizează predicția. Notînd matricea de covariață a mărimilor s cu $\mathbf{C}_s$, rezultă matricea de covariață generală a procesului de compensare, notată $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{C}_{s's'} & \mathbf{C}_{s's} & 0 \\ \mathbf{C}^T_{ss'} & \mathbf{C}_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_M \end{Vmatrix}, \tag{3-32}$$

din care poate fi dedusă matricea cofactorilor $\mathbf{Q}$ (v. cap. 9.1).

În acest fel modelul funcțional al prelucrării va fi:

$$\mathbf{v}^{*T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}^* = \text{minim}, \tag{3-33}$$

unde:

$$\mathbf{v}^* = \| \mathbf{v}^T, \ \mathbf{s}'^T, \ \mathbf{s}^T \|^T. \tag{3-34}$$

O b s e r v a ț i e. O bună perioadă de timp, metoda colocației a fost „opusă" metodei celor mai mici pătrate. Este meritul profesorului *Wolf* (1975, 1977, 1979 ș.a.) de a fi demonstrat egalitatea rezultatelor obținute prin cele două metode, cu condiția evidentă de a se folosi același model stochastic. În adevăr, cu notațiile folosite mai înainte, metoda colocației apare identică cu metoda cunoscută de la cursul de teoria erorilor sub denumirea de prelucrarea măsurătorilor prin metoda observațiilor condiționate cu necunoscute suplimentare, ecuațiile (3-30) și (3-34).

În situația concretă avută în vedere în acest paragraf ecuațiile de bază din metoda colocației au ca formă generală:

$$\Delta g_{ij} + v_{ij} = (H_j - H_i)\, x_a + s'_j - s'_i, \tag{3-35}$$

pentru fiecare anomalie a gravității, cunoscută în zona considerată, urmînd a se scrie o ecuație de forma (3-35).

Predicția valorilor Δg în alte puncte din zonă, unde nu s-au făcut determinări gravimetrice, se realizează prin funcții de forma (3-31).

Capitolul 4
SISTEME DE ALTITUDINI

4.1. CONSECINȚELE NEPARALELISMULUI SUPRAFEȚELOR DE NIVEL

Definirea unui sistem de altitudini constă, în principiu, în:

— alegerea unei suprafețe de referință;

— adoptarea unei definiții, cu semnificație fizică sau geometrică, prin care să se descrie poziția punctelor de pe suprafața Pămîntului în raport cu suprafața de referință.

După cum s-a stabilit în cap. 2, suprafețele de nivel nu sînt suprafețe paralele. În fiecare punct din spațiu se poate scrie ecuația fundamentală:

$$dW = -g\, dh, \tag{2-8}$$

prin care se stabilește dependența dintre depărtarea dh și diferența de potențial dW existente între două suprafețe de nivel infinit apropiate.

Pentru a urmări unele dintre consecințele neparalelismului suprafețelor de nivel pentru lucrările geodezice, ne vom referi la *sistemul de altitudini ortometrice*, în care *geoidul este suprafața de referință, iar altitudinea ortometrică este segmentul de linie de forță cuprins între poziția punctului pe suprafața terestră și respectiv pe geoid*. Din figura 4-1, *a* se observă că suma diferențelor de nivel elementare, măsurate pe traseul cuprins între punctele A și B, notată $\sum_A^B \Delta h = \Delta h_{AB}$, nu este egală cu diferența altitudinilor ortometrice ale punctelor A și B, notate H_A^{OR} și H_B^{OR}.

Cu această remarcă se pune în evidență faptul că rezultatul obținut direct prin lucrările de nivelment geometric $\sum_A^B \Delta h$ este dependent de traseul parcurs.

Generalizînd (fig. 4-1, *b*), rezultă că sumele diferențelor de nivel elementare măsurate pe traseele *1* și *2* nu vor fi egale între ele, nici chiar în cazul ideal, al observațiilor geodezice perfecte, fără erori de măsurare. În consecință, în poligonul format, va rezulta o neînchidere, care se mai numește și *eroare de principiu* a nivelmentului geometric geodezic.

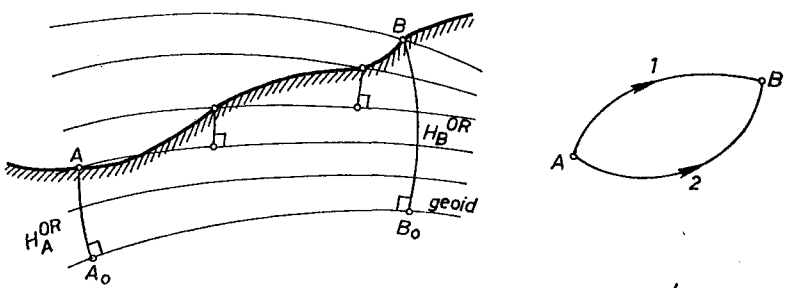


Fig. 4-1. Consecințele neparalelismului suprafețelor de nivel asupra determinărilor nivelitice pe linii și poligoane de mari dimensiuni.

Pentru a obține un control corect în lucrările de nivelment geometric de ordin superior este necesar ca în paralel să se efectueze și determinări gravimetrice, pentru calculul diferențelor de potențial:

$$\int_A^B g\,dh = -\int_A^B dW = W_A - W_B \qquad (4\text{-}1)$$

sau, într-o aproximație impusă de posibilitățile practice:

$$W_A - W_B = \sum_A^B g\Delta h. \qquad (4\text{-}2)$$

Pe un contur închis:

$$\oint g\,dh = W_A - W_A = 0. \qquad (4\text{-}3)$$

Nivelmentul geometric superior fără determinări gravimetrice este lipsit de rigoarea necesară unor astfel de lucrări, controlul efectuat prin calcularea neînchiderilor în poligoane fiind afectat de erorile de principiu menționate anterior:

$$\oint dh \neq 0. \qquad (4\text{-}4)$$

Pentru liniile și poligoanele de nivelment de mari dimensiuni, specifice rețelelor de nivelment geodezic de stat, simpla însumare a diferențelor de nivel măsurate nu este suficientă pentru transmiterea altitudinilor. Este necesar să se lucreze cu mărimi derivate corectate, în funcție de sistemul de altitudini adoptat.

4.2. SISTEMUL DE ALTITUDINI DINAMICE

4.2.1. NUMERE GEOPOTENȚIALE

Notăm cu *O punctul inițial* (*fundamental*) în rețeaua de nivelment, de la care pornește o linie de nivelment spre punctul P, în lungul căreia s-au măsurat atît diferențe de nivel cît și accelerațiile greutății. Din formula fundamentală (4-1) se obține:

$$\int_0^P g\,dh = -\int_0^P dW = W_0 - W_P = C_P. \qquad (4\text{-}5)$$

Diferența C_P dintre potențialul geoidului W_0 și potențialul suprafeței de nivel W_P a punctului P este numărul geopotențial al punctului P, noțiune introdusă în anul 1955 în cadrul *Asociației Internaționale de Geodezie*. Deși nu are dimensiuni metrice, numărul geopotențial caracterizează, în mod natural, o suprafață de nivel, fiind același pentru toate punctele situate pe această suprafață.

În cadrul *Sistemului geodezic de referință 1980* se recomandă următoarea valoare pentru potențialul geoidului:

$$W_0 = (6\ 263\ 686 \pm 3) \times 10\ \mathrm{m^2 s^{-2}}. \qquad (4\text{-}6)$$

4.2.2. ALTITUDINEA DINAMICĂ

Noțiunea de altitudine dinamică a fost introdusă de *Helmert* în anul 1873. Dacă ne referim însă la numărul geopotențial C_P, altitudinea dinamică notată H^D se obține prin împărțirea numărului geopotențial cu o valoare constantă și anume cu valoarea gravității normale, la altitudinea de 45°, raportată la elipsoidul de referință:

$$H^D_P = \frac{C_P}{\gamma_{45^\circ}}. \qquad (4\text{-}7)$$

Din punct de vedere dimensional altitudinile dinamice sînt exprimate în metri, însă ele nu au o semnificație geometrică. Astfel, altitudinea dinamică a unui punct nu poate fi reprezentată ca o distanță de la o anumită suprafață la punctul considerat. Aceste altitudini păstrează, în continuare, semnificația fizică generată de împărțirea numerelor geopotențiale cu o constantă aleasă în mod convențional.

Sistemul de altitudini dinamice este caracterizat printr-o proprietate deosebită și anume: punctele situate pe o anumită suprafață de nivel au aceeași altitudine dinamică.

4.2.3. CORECȚIA DINAMICĂ

Pentru două puncte A și B diferența de altitudini dinamice poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta H^D_{AB} = H^D_B - H^D_A = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}}(C_B - C_A)$$

sau, prin intermediul relației (4-5):

$$\Delta H^D_{AB} = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B g\,dh.$$

Se poate transforma această relație în continuare:

$$\Delta H^D_{AB} = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B (g - \gamma_{45^\circ} + \gamma_{45^\circ})\,dh = \int_A^B dh + \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,dh,$$

astfel încît:

$$\Delta H^D_{AB} = \Delta h_{AB} + \delta^D_{AB}, \qquad (4\text{-}8)$$

unde:

Δh_{AB} — diferența de nivel măsurată:

$$\Delta h_{AB} = \int_A^B dh \approx \sum_A^B \Delta h; \qquad (4\text{-}9)$$

δ^D_{AB} — corecția dinamică pe traseul AB:

$$\delta^D_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,dh \simeq \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,\Delta h. \qquad (4\text{-}10)$$

Sistemul de cote dinamice a stat la baza creării rețelei de nivelment din Europa de vest (*Réseau Européen Unifié de Nivelment*, prescurtat *REUN*).

4.3. SISTEMUL DE ALTITUDINI ORTOMETRICE

4.3.1. ALTITUDINEA ORTOMETRICĂ

Deoarece definiția numărului geopotențial nu depinde de traseul utilizat, se presupune că integrarea se efectuează în lungul liniei de forță (fig. 4-1, *a*):

$$C_P = \int_0^{H_P^{OR}} g\,dH, \tag{4-11}$$

sau:

$$C_P = H_P^{OR}\,\frac{1}{H_P^{OR}}\int_0^{H_P^{OR}} g\,dH.$$

Această relație poate fi scrisă și sub forma:

$$C_P = \bar{g}\cdot H_P^{OR}, \tag{4-12}$$

unde $\bar{g}$ reprezintă media valorilor gravității în lungul liniei de forță P_0P (în sensul unei medii ponderate generalizate):

$$\bar{g} = \frac{1}{H_P^{OR}}\int_0^{H_P^{OR}} g\,dH. \tag{4-13}$$

Relația (4-12) reprezintă în același timp și legătura dintre altitudinile ortometrice și numerele geopotențiale:

$$H_P^{OR} = \frac{1}{\bar{g}}\cdot C_P. \tag{4-14}$$

4.3.2. CORECȚIA ORTOMETRICĂ

Asemănător cu situația din cadrul sistemului de altitudini dinamice, este necesar să se stabilească o corecție care să se adauge la diferențele de nivel măsurate direct, în scopul deducerii diferențelor de altitudini ortometrice.

Ținînd seama de figura 4-1, se poate scrie:

$$\Delta H_{AB}^{OR} = H_B^{OR} - H_A^{OR} = \Delta H_{AB}^{D} - (H_B^{D} - H_A^{D}) + H_B^{OR} - H_A^{OR}$$

sau, sub o altă formă:

$$\Delta H_{AB}^{OR} = \Delta H_{AB}^{D} + (H_B^{OR} - H_B^{D}) - (H_A^{OR} - H_A^{D}). \tag{4-15}$$

Diferența de altitudini dinamice ΔH_{AB}^{D} a fost determinată, în funcție de diferența de nivel măsurată Δh_{AB}, cu relația (4-8). Pentru a calcula diferența existentă între altitudinile ortometrică și dinamică ale punctului A, se imaginează un traseu de nivelment geometric care pleacă din A_0, exact

în lungul liniei de forță, ajungînd în A. Evident că, în acest caz, suma diferențelor de nivel măsurate va fi egală cu cota ortometrică a punctului A:

$$\sum_{A_0}^{A} \Delta h = H_A^{OR}. \tag{4-16}$$

Pe același traseu imaginar A_0A, aplicînd relația (4-8) se obține:

$$\Delta H_{A_0A}^{D} = H_A^{D} = \sum_{A_0}^{A} \Delta h + \delta_{A_0A}^{D}, \tag{4-17}$$

sau împreună cu (4-16):

$$H_A^{D} = H_A^{OR} + \delta_{A_0A}^{D},$$

adică:

$$H_A^{OR} - H_A^{D} = -\,\delta_{A_0A}^{D}; \tag{4-18}$$

și analog pentru punctul B:

$$H_B^{OR} - H_B^{D} = -\,\delta_{B_0B}^{D}. \tag{4-19}$$

Corecțiile dinamice din ultimele două expresii se calculează cu ajutorul relației (4-10):

$$\delta_{A_0A}^{D} = \int_{A_0}^{A} \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,dH; \qquad \delta_{B_0B}^{D} = \int_{B_0}^{B} \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,dH,$$

sau, prin introducerea unor valori medii, constante, $\bar{g}_A$ și $\bar{g}_B$, calculate în lungul liniilor de forță AA_0 și BB_0, cu relațiile:

$$\delta_{A_0A}^{D} = \frac{\bar{g}_A - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,H_A; \qquad \delta_{B_0B}^{D} = \frac{\bar{g}_B - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,H_B. \tag{4-20}$$

Aici pentru H_A și H_B pot fi folosite valori aproximative ale cotelor punctelor A și B.

Introducînd relațiile (4-8), (4-9), (4-10) și (4-20) în (4-15) rezultă:

$$\Delta H_{AB}^{OR} = \Delta h_{AB} + \delta_{AB}^{OR}, \tag{4-21}$$

unde δ_{AB}^{OR} reprezintă corecția ortometrică pe traseul AB:

$$\delta_{AB}^{OR} = \sum_{A}^{B} \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,\Delta h + \frac{\bar{g}_A - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}\,H_B. \tag{4-22}$$

4.3.3. ALTITUDINEA HELMERT

Valoarea medie $\bar{g}$, din relația (4-14), prin care se definește altitudinea ortometrică în funcție de numărul geopotențial, nu poate fi determinată practic, în mod riguros. De aceea, în locul acestei mărimi s-au introdus alte valori, în funcție de anumite ipoteze, rezultînd diverse sisteme de altitudini.

Utilizînd formula (2-100) în care se operează cu un gradient mediu rezultă:

$$\bar{g} = g + 0{,}0424\ H, \tag{4-23}$$

astfel încît altitudinea ortometrică definită de (4-14) poate fi scrisă şi sub forma:

$$H_P^{OR} = \frac{C_P}{g + 0{,}0424\ H}. \tag{4-24}$$

Această relaţie a fost dedusă de *Helmert* în anul 1890 şi de aceea altitudinile corespondente poartă numele său.

4.3.4. ALTITUDINEA ORTOMETRICĂ SFEROIDICĂ

Sistemul de altitudini sferoidice este unul dintre cele mai folosite sisteme. Dacă în relaţia (4-22) se introduce $g \equiv \gamma$, se obţine expresia corecţiei ortometrice sferoidice:

$$\delta_{AB}^{ORS} = \sum_A^L \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta h + \frac{\bar{\gamma}_A - \bar{\gamma}_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_B. \tag{4-25}$$

Formula de calcul practic al corecţiei ortometrice sferoidice, folosită şi în ţara noastră în trecut, precum şi în multe alte ţări din *Europa* s-a dedus prin considerarea neparalelismului suprafeţelor de nivel şi a aproximaţiei menţionate $g \equiv \gamma$. Astfel, pentru trasee de nivelment care merg dinspre sud spre nord, rezultă din (4-24):

$$dH \approx -\frac{H}{\gamma} d\gamma. \tag{4-26}$$

Pentru calculul acceleraţiei normale γ_P s-a aplicat formula (2-43), astfel încît:

$$d\gamma = f^* \gamma_e \sin 2B\ dB. \tag{4-27}$$

Acceptîndu-se raportul $\gamma_e/\gamma \approx 1$, rezultă expresia corecţiei ortometrice sferoidice:

$$\delta_{AB}^{ORS} = -f^* H_{med}\ \Delta B^{rad} \cdot \sin 2B_{med}. \tag{4-28}$$

Pentru calculul practic în ţara noastră s-au considerat tronsoane în lungime de 1 km (ceea ce corespunde, aproximativ, pentru $\Delta B = 1^\circ$) obţinîndu-se:

$$(\delta_{AB}^{ORS})_{mm} = -K \cdot H_{med}^{(km)} \cdot \Delta B^c, \tag{4-29}$$

unde:

$$K = 10^6 \frac{f^*}{\rho^c} \cdot \sin 2B_{med}. \tag{4-30}$$

Acest coeficient poate fi extras şi din tabelele publicate de prof. *M. Botez* (1969) pg. 164 (pentru f^* s-a considerat valoarea 0,0053) în funcţie de latitudinea medie B_m.

4.4. SISTEMUL DE ALTITUDINI NORMALE

În ţara noastră este folosit, în prezent, ca sistem oficial de altitudini, sistemul de altitudini normale, fondat teoretic de *M.S. Molodenski* în anul 1945.

Plecînd de la dificultăţile reale pe care le prezintă utilizarea altitudinilor ortometrice, dintre care cunoaşterea gravităţii medii $\bar{g}$ în lungul liniei de forţă reprezintă impedimentul principal, *Molodenski* propune ca în locul cîmpului gravităţii să se utilizeze cîmpul gravităţii normale.

4.4.1. ALTITUDINEA NORMALĂ

Acceptînd această ipoteză, formulele de calcul se pot determina prin utilizarea formulelor corespondente de la sistemul de altitudini ortometrice. Astfel, definiţia altitudinii normale a punctului P, notată H_P^N, analog cu (4-14), este:

$$H_P^N = \frac{1}{\bar{\gamma}} C_P, \tag{4-31}$$

unde valoarea medie $\bar{\gamma}$ a acceleraţiei normale a gravităţii în lungul normalei la elipsoid (P_0P în figura 4-2) se calculează riguros cu o relaţie analogă cu formula (4-13):

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma\ dH^N. \tag{4-32}$$

Diferenţa de altitudini normale între reperii A şi B va fi:

$$\Delta H_{AB}^N = H_B^N - H_A^N = \Delta h_{AB} + \delta_{AB}^N, \tag{4-33}$$

unde Δh_{AB} reprezintă diferenţa de nivel măsurată în teren prin nivelment geometric, iar δ_{AB}^N — corecţia normală pe traseul AB. Această corecţie poate fi dedusă din relaţia (4-22) introducînd $\bar{g} \equiv \bar{\gamma}$:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta h + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_B. \tag{4-34}$$

Printr-un artificiu simplu se transformă primul termen al relaţiei (4-34), astfel încît se obţine:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma_{45^\circ}} \Delta h + \sum_A^B \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta h + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_A - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} H_B. \tag{4-35}$$

Comparînd relaţiile (4-25) şi (4-35) rezultă:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g - \gamma}{\gamma_{45^\circ}} \Delta h + \delta_{AB}^{ORS}. \tag{4-36}$$

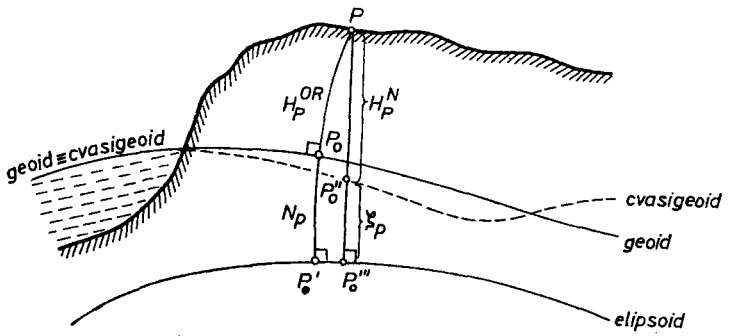


Fig. 4-2. Sistemele de altitudini ortometrice şi normale.

Această relaţie exprimă legătura care există între corecţiile normale şi corecţiile ortometrice sferoidice, punînd în evidenţă posibilitatea de trecere de la un sistem la altul, în cazul în care se cunosc anomaliile gravităţii pe traseul considerat. Corecţia normală apare astfel ca formată din doi termeni principali:

— corecţia $\sum_A^B \frac{g-\gamma}{\gamma_{45^\circ}} \Delta h$ datorată anomaliilor gravităţii;

— corecţia δ_{AB}^{ORS} datorată neparalelismului suprafeţelor de nivel (în concepţia ortometrică sferoidică).

Introducerea noţiunii de sistem normal a condus şi la necesitatea schimbării suprafeţei de referinţă, în speţă a geoidului, folosit în sistemul ortometric.

Pentru a înţelege mai uşor caracterul suprafeţei de referinţă în cazul sistemului normal, ne bazăm pe altitudinile elipsoidice H^E, definite în raport de elipsoid, în cele două sisteme de altitudini avute în vedere (fig. 4-2):

$$H_P^E = H_P^{OR} + N_P; \quad H_P^E = H_P^N + \zeta_P. \tag{4-37}$$

Cu N se notează *ondulaţiile geoidului*, care sînt specifice utilizării sistemului de altitudini ortometrice, iar cu ζ *perturbaţiile* sau *anomaliile altitudinilor*.

Se presupune o suprafaţă astfel construită (fig. 4-2), încît segmentul de normală la elipsoid să fie egal cu ζ în orice punct în care se cunoaşte această cantitate. *M.S. Molodenski* a denumit această suprafaţă *cvasigeoid*. Pe suprafeţe acvatice întinse (mări, oceane) cvasigeoidul coincide cu geoidul, sub continente existînd diferenţe care depind de structura internă a Pămîntului. Poziţia cvasigeoidului în raport cu alte suprafeţe folosite în geodezie va fi abordată în cap. 5.

4.4.2. CALCULUL DIFERENŢELOR DE ALTITUDINI NORMALE

● Relaţia de definiţie (4-31) oferă posibilitatea de calcul a altitudinii normale în funcţie de numărul geopotenţial şi gravitatea normală medie $\bar{\gamma}$. Formula are un rol important în clarificarea raportului dintre altitudinile normale şi celelalte altitudini definite anterior. Formula nu este folosită însă în determinările efective din reţelele de nivelment.

● Pentru reperi de nivelment apropiaţi, situaţi la 1—3 km, pe un traseu de la sud spre nord, se poate aplica şi următoarea formulă rezultată din folosirea relaţiilor (4-33), (4-36) şi (4-29):

$$H_B^N - H_A^N = \Delta h_{AB} + \frac{1}{\gamma_m}(g-\gamma)_m \cdot \Delta h_{AB} - kH_{med}\,\Delta B^e, \tag{4-38}$$

unde:

Δh_{BA} este diferenţa de nivel măsurată;

γ_m — valoarea acceleraţiei gravităţii normale, calculată pentru media latitudinilor B_{med} şi la cota medie H_{med} a celor doi reperi, de exemplu cu relaţia (2-94);

$(g-\gamma)_m$ — valoarea medie a anomaliilor acceleraţiei greutăţii, corespunzătoare celor doi reperi, a cărei determinare a fost analizată în 3.7-3.9.

— termenul $k\,H_{med} \cdot \Delta B^e$ este cunoscut din 4.3.4.

● Termenul ultim din relaţia (4-38), care ţine seamă de neparalelismul suprafeţelor de nivel, poate fi calculat direct, din relaţia (4-26), prin trecere la diferenţe finite medii pe traseul AB. Se obţine astfel *formula recomandată de instrucţiunile în vigoare la noi în ţară* spre a fi folosită pentru trecerea de la diferenţe de nivel măsurate la diferenţe de altitudini normale:

$$H_B^N - H_A^N = \Delta h_{AB} + \frac{1}{\gamma_m}(g-\gamma)_m \cdot \Delta h_{AB} - \frac{1}{\gamma_m}(\gamma_0^B - \gamma_0^A) \cdot H_{med}. \tag{4-39}$$

Aici γ_0^B şi γ_0^A reprezintă valorile normale ale acceleraţiei gravităţii, pentru proiecţiile pe elipsoid ale celor doi reperi.

● *Precizia necesară* pentru calculul corecţiilor normale a fost analizată în multe lucrări de specialitate. Dintre acestea se vor prezenta mai jos rezultatele obţinute de *Mihăilescu* (1967), *Dragomir* ş.a. (1977):

— *altitudinea medie* H_{med} necesară trebuie calculată în aproximaţia de 0,1 m. Se desprinde necesitatea calculării iterative a corecţiei de neparalelism a suprafeţelor de nivel, deoarece H_{med} este funcţie de altitudinile normale, necunoscute. Acest mod de calcul se impune în special pentru tronsoane mai lungi de nivelment şi pentru zone muntoase;

— *anomalia* $(g-\gamma)$ trebuie cunoscută cu precizia de cel puţin 0,4 mgal. De aceea este necesar să se execute determinări gravimetrice de teren, în cazul în care hărţile gravimetrice sînt insuficient de precise. O eroare de 0,4 mgal în cunoaşterea anomaliei atrage după sine o eroare de 0,088 mm în calculul corecţiei normale. Utilizarea unor anomalii imprecis determinate poate conduce la micşorarea preciziei obţinută în teren, prin nivelment geometric de înaltă precizie. Acest lucru se răsfrînge negativ asupra neînchiderilor care se obţin în poligoanele de nivelment şi prin urmare conduce la micşorarea preciziei rezultatelor finale.

De aceea cercetări multiple *Mihăilescu* (1967), *Ramsayer* (1973), *Vignal* (1965), *Levallois* (1969—1971) ş.a. s-au desfăşurat pe linia stabilirii distanţei optime dintre reperii în care trebuie executate măsurări gravimetrice în teren.

Instrucţiunile care reglementează efectuarea nivelmentului geometric de precizie din ţara noastră prevăd o densitate constantă pe tot teritoriul ţării, de 1 punct gravimetric la 4—6 km. În aceste puncte urmează să se determine, prin măsurători, anomalia gravităţii.

Capitolul 5

ONDULAȚIILE GEOIDULUI. DEVIAȚIILE VERTICALEI

5.1. ONDULAȚIILE GEOIDULUI

5.1.1. FORMULA BRUNS

Din dezvoltarea potențialului în coordonate rectangulare rezultă că într-un punct oarecare, situat în cîmpul gravității, este valabilă relația:

$$W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z), \tag{1-137}$$

unde:

W este potențialul efectiv al gravității;

U — potențialul normal;

T — potențialul perturbator.

Definirea elipsoidului de nivel (v. 2.3) include condiția de egalitate dintre potențialul efectiv al geoidului și potențialul normal al elipsoidului de nivel, astfel încît se poate scrie (fig. 5-1):

$$W_{P_0} = U_{P_0'}. \tag{2-52}$$

Cu P_0 s-a notat proiecția punctului P pe suprafața geoidului (în lungul verticalei), iar cu P_0' — proiecția pe elipsoid (în lungul normalei).

Ipoteza (2-52) este valabilă numai în anumite limite și anume atunci cînd cele două suprafețe sînt apropiate, existînd și puncte în care acestea coincid (unde $T = 0$). De aceea, această ipoteză are un caracter global, pentru întregul geoid, respectiv elipsoid de referință.

Segmentul P_0P_0' este denumit *ondulația geoidului* și reprezintă distanța dintre geoid și elipsoidul de referință, măsurată pe normala la elipsoid (fig. 5-1).

Se presupune o dezvoltare a potențialului normal în lungul segmentului $P_0'P_0$, a cărui direcție este dată de versorul $\vec{n}$ al normalei la elipsoid:

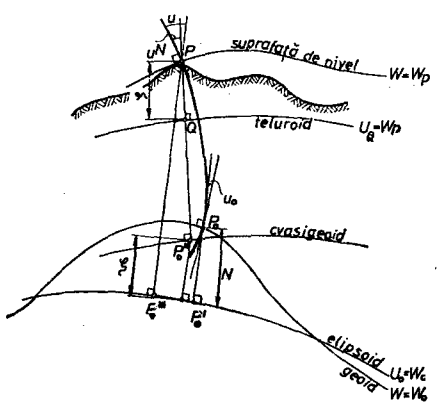


Fig. 5-1. Ondulația geoidului, anomalia altitudinii.

$$U_{P_0} = U_{P_0'} + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{P_0'} N$$

Utilizînd și relația (1-141) se obține:

$$U_{P_0} = U_{P_0'} - \gamma N.$$

Deoarece:

$$W_{P_0} = U_{P_0} + T_{P_0},$$

rezultă:

$$W_{P_0} = U_{P_0'} - \gamma N + T_{P_0},$$

astfel încît se obține *formula Bruns*, de legătură dintre ondulația geoidului și potențialul perturbator:

$$N = \frac{T}{\gamma}. \tag{5-1}$$

Pentru determinarea ondulațiilor geoidului N este necesară, în principiu, cunoașterea potențialului perturbator T, care la rîndul său nu poate fi măsurat direct. Există însă posibilitatea de exprimare a potențialului perturbator în funcție de anomaliile gravității.

Așa cum s-a arătat în cap.3, anomalia gravității reprezintă diferența dintre valoarea gravității măsurată și redusă la suprafața geoidului și valoarea normală a gravității, calculată pe elipsoid:

$$\Delta g = g_{P_0} - \gamma_{P_0'}. \tag{5-2}$$

Deoarece:

$$\gamma_{P_0} = \gamma_{P_0'} + \frac{\partial \gamma}{\partial H} N, \tag{5-3}$$

H fiind distanța între două suprafețe de nivel, măsurată în lungul liniei de forță, se obține:

$$\Delta g = g_{P_0} - \gamma_{P_0} + \frac{\partial \gamma}{\partial H} N. \tag{5-4}$$

Ondulațiile geoidului N au, în general, valori mici, de ordinul metrilor sau zecilor de metri. De aceea, în anumite dezvoltări se pot accepta și unele aproximații, ca de exemplu:

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n} \approx -\frac{\partial U}{\partial H}. \tag{5-5}$$

Aproximația (5-5) împreună cu relația cunoscută:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial H},$$

permit să se scrie:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}(W - U) = -(g - \gamma), \tag{5-6}$$

obținînd astfel din (5-5):

$$\Delta g = \frac{\partial \gamma}{\partial H} N - \frac{\partial T}{\partial H}. \tag{5-7}$$

Folosind și formula *Bruns* (5-1) se obține:

$$\Delta g + \frac{\partial T}{\partial H} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H} T = 0, \tag{5-8}$$

expresie care constituie *ecuația fundamentală a geodeziei fizice*. Ea exprimă o legătură între anomaliile Δg (cantități determinabile prin măsurători) și potențialul perturbator necunoscut T.

Deoarece anomaliile Δg se determină numai în raport de o anumită suprafață (geoidul) care nu este încă cunoscută, ecuația nu poate fi folosită independent pentru calculul potențialului perturbator T, reprezentînd doar o *condiție limită*. Într-adevăr, dacă se transcrie această ecuație sub forma:

$$-\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n} T = \Delta g, \tag{5-8}$$

se regăsește expresia (1-87) care a fost denumită „a treia problemă limită a potențialului". Funcția care urmează să se determine este de această dată potențialul perturbator T, în membrul stîng intervenind o combinație liniară între această funcție și derivata sa normală.

Determinarea funcției T are loc prin acceptarea unei ipoteze suplimentare, ca de exemplu: întreaga masă a Pămîntului este introdusă în interiorul geoidului. Desigur, această ipoteză nu are echivalent real, însă anomaliile gravității Δg au fost calculate tot în această ipoteză, ceea ce recomandă acceptarea ei. În aceste condiții, densitatea ρ este zero în afara geoidului, potențialul T este o funcție armonică și satisface ecuația Laplace:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{5-9}$$

Această ecuație diferențială, suplimentată cu condiția limită (5-8) permite calculul potențialului perturbator T în puncte situate în afara geoidului, cu condiția ca suprafața la care se referă condiția limită să fie cunoscută, ceea ce este practic imposibil. De aceea, rezolvările efective se pot realiza doar iterativ, prin aproximații succesive. În sfîrșit, trebuie semnalat faptul că anomaliile gravității necesare în aceste determinări ar trebui cunoscute într-o infinitate de puncte, repartizate cît mai uniform pe întreaga suprafață a Pămîntului (inclusiv pe mări și oceane, în pustiuri, dincolo de cercul polar ș.a.m.d.).

Este util să se determine forma ecuației fundamentale (5-8) în aproximația sferică a figurii Pămîntului. În acest caz:

$$\gamma = \frac{GM}{R^2}; \tag{5-10}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2\gamma}{R}. \tag{5-11}$$

Cu aceasta, expresia căutată este:

$$\Delta g + \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{2}{R} T = 0. \tag{5-12}$$

Folosind și formula *Bruns* (5-1) rezultă:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial R} - \frac{2\gamma}{R} N. \tag{5-13}$$

5.1.2. FORMULA STOKES

Determinarea practică a ondulațiilor geoidului se realizează funcție de anomaliile gravității, cu formula *Stokes* (1849), care îndeplinește un rol primordial în geodezia fizică. Pentru deducerea sa se dezvoltă, pentru început, ondulațiile geoidului în funcții sferice. Relația (1-139) scrisă pentru $j = 1$ pe sfera de rază R devine:

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n}{R^{n+1}}, \tag{5-14}$$

astfel încît:

$$\frac{\partial T}{\partial R} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)\, Y_n}{R^{n+2}}. \tag{5-15}$$

Ecuația fundamentală (5-13) în ipoteza suprafeței sferice a Pămîntului devine astfel:

$$\frac{2}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n}{R^{n+1}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)\, Y_n}{R^{n+2}} = -\Delta g, \tag{5-16}$$

de unde:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{R^{n+2}} Y_n = \Delta g. \tag{5-17}$$

Dacă se introduce notația:

$$\overline{Y}_n = \frac{n-1}{R^n} Y_n, \tag{5-18}$$

se poate scrie:

$$T = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{Y}_n}{n-1}; \tag{5-19}$$

$$\Delta g = \frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \overline{Y}_n. \tag{5-20}$$

Funcția $\overline{Y}$ poate fi dezvoltată în continuare sub forma (1-102):

$$\overline{Y}_n(\theta, L) = \sum_{m=0}^{n} \{a'_{nm} \cos mL + b'_{nm} \sin mL\}\, P_{nm}(\cos\theta), \tag{5-21}$$

astfel încît relația (5-20) devine:

$$\Delta g = \frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \{a'_{nm} \cos mL + b'_{nm} \sin mL\}\, P_{nm}(\cos\theta). \tag{5-22}$$

Din formula *Bruns* (5-1) se obține:

$$N = \frac{1}{R\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{Y}_n}{n-1} \tag{5-23}$$

și împreună cu relația (5-22):

$$N = \frac{1}{R\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left\{ \frac{a'_{nm}}{n-1} \cos mL + \frac{b'_{nm}}{n-1} \sin mL \right\} P_{nm}(\cos\theta). \tag{5-24}$$

Expresia de mai sus reprezintă dezvoltarea ondulațiilor geoidului în funcții sferice, constituind una dintre posibilitățile de calcul (v. 5.4).

Pentru deducerea formulei *Stokes* se multiplică relația (5-20) cu $P_n(\cos\psi)$, unde ψ reprezintă distanța sferică, între punctele P și P' pe sfera σ (fig. 1-8) și se integrează:

$$\iint_{\sigma} P_n(\cos\psi)\, \Delta g\, d\sigma = \iint_{\sigma} P_n(\cos\psi) \sum_{2}^{\infty} \overline{Y}_n\, d\sigma. \tag{5-25}$$

Expresia din membrul drept al relației (5-25) poate fi scrisă dezvoltat sub forma:

$$\iint_{\sigma} P_n(\cos\psi)\,(\overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 + \ldots\ldots + \overline{Y}_n + \ldots)\,d\sigma.$$

Folosind proprietățile (1-113) și (1-116) la cazul concret examinat, se poate scrie:

$$\iint_{\sigma} P_j(\cos\psi)\,\overline{Y}_k\,d\sigma \begin{cases} = 0, \text{ dacă } j \neq k \\ = \dfrac{4\pi}{2n+1}\,\overline{Y}_n, \text{ dacă } j = k, \end{cases}$$

astfel încît relația (5-25) devine:

$$\iint_{\sigma} \Delta g\, P_n(\cos\psi)\,d\sigma = 0 + 0 + \ldots + \iint_{\sigma} P_n(\cos\psi)\,\overline{Y}_n\,d\sigma + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1}\,\overline{Y}_n, \tag{5-26}$$

adică:

$$\overline{Y}_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g\, P_n(\cos\psi)\,d\sigma. \tag{5-27}$$

Elementul de suprafață $d\sigma$ fiind:

$$d\sigma = R^2 \cos B\, dB\, dL, \tag{5-28}$$

se obține prin înlocuire în relația (5-23):

$$N = \frac{R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)\,\Delta g \cos B\, dB\, dL. \tag{5-29}$$

Se procedează la o separare a factorului $2n + 1$ în : $2n + 1 = 2\,(n - 1) + 3$, astfel încît ultima expresie se poate scrie și sub forma:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (2A + 3B)\,\Delta g \cos B\, dB\, dL, \tag{5-30}$$

unde:

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\cos\psi); \qquad B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos\psi)}{n-1}. \tag{5-31}$$

Formula *Stokes* conține dezvoltarea coeficienților A și B, astfel încît aceștia să nu fie dezvoltări de funcții sferice.

Coeficientul A. Din relațiile (1-115) — (1-117) și (A.1-5) rezultă:

$$\frac{r}{l} = 1 + t\mu + \sum_{n=2}^{\infty} t^n P_n(\mu) \tag{5-32}$$

La limită, cînd punctele P și P' (fig. 1-8) se află pe sferă ($r = r'$ și $t = 1$) rezultă din expresia (5-32):

$$\frac{r}{l} - 1 - \mu = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\mu) = A. \tag{5-33}$$

Pentru cazul limită considerat rezultă:

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 - 2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2\,(1 - \cos\psi)}} = \frac{1}{2\sin\frac{\psi}{2}},$$

astfel că:

$$A = \frac{1}{2\sin\frac{\psi}{2}} - 1 - \cos\psi. \tag{5-34}$$

Coeficientul B. Acesta se poate determina pe o cale analoagă, însă cu calcule mai laborioase, rezultînd:

$$B = 1 - \cos\psi - 2\sin\frac{\psi}{2} - \cos\psi \ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right). \tag{5-35}$$

Expresia $(2A + 3B)$ este numită *funcția Stokes* și este notată $S(\psi)$:

$$S(\psi) = 2A + 3B = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} + 1 - 5\cos\psi - 6\sin\frac{\psi}{2} -$$

$$- 3\cos\psi \ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right). \tag{5-36}$$

Cu aceasta, din relația (5-30) rezultă *formula* sau *integrala Stokes* (1849) în forma sa clasică:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi)\,\Delta g \cos B\, dB\, dL. \tag{5-37}$$

Folosind formulele *Bruns* (5-1) și *Stokes* (5-37) se obține următoarea relație de calcul al potențialului perturbator în funcție de anomaliile gravi tății:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \cos B\, dB\, dL. \tag{5-38}$$

Pentru calcule practice, formula *Stokes* se exprimă în sistemul de coordonate sferice polare ψ, A (fig. 1-8). Pentru cazul limită, cînd punctul fix este chiar polul nord, coordonatele polare ψ și A coincid cu coordonatele θ și L, astfel încît elementul de suprafață $d\sigma$ pe sfera de rază R poate fi scris sub forma [v. relația (5-28)]:

$$d\sigma = R^2 \cos B\, dB\, dL = R^2 \sin\psi\, d\psi\, dA. \tag{5-39}$$

Cu aceasta, din (5-37) rezultă:

● În funcție de coordonatele sferice polare:

$$N(\psi, A) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g\,(\psi, A)\, S(\psi) \sin\psi\, d\psi\, dA; \tag{5-40}$$

● În funcție de coordonatele geodezice:

$$N(B,L) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{L'=0}^{2\pi} \int_{B'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g\,(B', L')\, S\,(\psi) \cos B'\, dB'\, dL', \qquad (5\text{-}41)$$

unde B', L' reprezintă coordonatele punctului curent, folosit pentru calculul ondulației geoidului în punctul de coordonate B, L.

În calculele practice se mai folosește și o altă funcție:

$$F(\psi) = \frac{1}{2} S\,(\psi) \sin\psi,$$

cu care relațiile (5-40) și (5-41) se pot scrie mai concentrat.

5.2. DEVIAȚIILE VERTICALEI

5.2.1. COMPONENTELE ASTRONOMO-GEODEZICE ALE DEVIAȚIEI VERTICALEI

Observațiile geodezice efectuate pe suprafața terestră (de exemplu punctul P în figura 5-1) sînt raportate la verticala locului (în funcție de care se orientează axa principală a instrumentului folosit) care este perpendiculară pe suprafața de nivel ce trece prin punctul considerat. Deoarece în calcule se folosesc alte suprafețe de referință, poziția verticalei trebuie raportată la normalele duse la aceste suprafețe, rezultînd diverse unghiuri de deviație a verticalei. Astfel (*Torge* 1975), se pot defini (fig. 5-1):

— deviația verticalei calculată la nivelul terenului, după *Helmert*, ca fiind unghiul u dintre verticala locului și normala la elipsoid, considerate în punctul P;

— deviația verticalei calculată la nivelul geoidului, după *Pizetti*, ca fiind unghiul u_0 format de verticală și normala la elipsoid, în punctul P_0;

— deviația verticalei, calculată la nivelul terenului, după *Molodenski*, ca fiind unghiul u^N dintre verticala locului și normala la cvasigeoid, considerate în punctul P.

De semnalat că unghiurile de deviație a verticalei sînt în general mici (de ordinul secundelor de arc), astfel încît diferențele dintre u, u_0 și respectiv u^N sînt, de asemenea, mici. Astfel, de exemplu, dacă se notează B, L coordonatele geodezice în ipoteza *Helmert*, B^N, L^N coordonatele geodezice în ipoteza *Molodenski* și respectiv B^P, L^P, coordonatele geodezice, ale aceluiași punct, în ipoteza *Pizetti*, se obțin următoarele diferențe (*Torge* 1975, *Heiskanen* și *Moritz* 1967 ș.a.):

$$B - B^N = -\,0'',00017 \sin 2B\, H^N_{(\text{metri})}\,;\; L - L^N = 0;$$

$$B - B^P = \frac{H}{R}\xi;\; L - L^P = \frac{H}{R}\eta \sec B, \qquad (5\text{-}42)$$

unde:

R este raza medie *Gauss* în punctul considerat [calculabilă cu formula (6-93)];

H — altitudinea normală a punctului considerat;

ξ, η — componentele deviației verticalei.

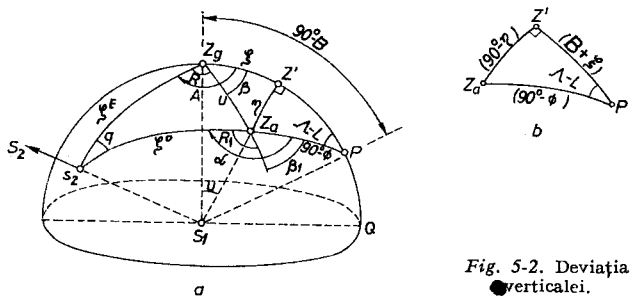


Fig. 5-2. Deviația verticalei.

Acceptînd ipoteza *Helmert* se presupune (fig. 5-2) un punct S_1 pentru care se cunosc, din calcule, coordonatele geodezice (B,L) și azimutul geodezic A către un punct S_2, elemente care se referă la suprafața elipsoidului de referință. Se presupune că în punctul S_1 s-au determinat coordonatele astronomice Φ, Λ, precum și azimutul astronomic α către același punct S_2.

Se construiește o sferă auxiliară cu centrul în punctul S_1 și raza egală cu unitatea. Normala la elipsoidul de referință, care trece prin acest punct, intersectează sfera auxiliară în punctul Z_g (proiecția zenitului geodezic). Asemănător, verticala locului intersectează această sferă în punctul Z_a (proiecția zenitului astronomic).

Din punctul S_1 se duce o paralelă la axa de rotație a Pământului (la axa lumii), care va intersecta sfera auxiliară în punctul P (proiecția polului lumii). Este ușor de observat că arcele $\widehat{Z_gPQ}$ și $\widehat{Z_aP}$ reprezintă proiecțiile meridianului geodezic, respectiv ale meridianului astronomic, pe sfera auxiliară. Unghiul dintre acestea este egal cu diferența dintre longitudinea astronomică și longitudinea geodezică ($\Lambda - L$). După cum se știe, înălțimea polului deasupra orizontului este latitudinea, astfel că pe sfera auxiliară se obțin arcele $(90° - B)$ și $(90° - \Phi)$, care reprezintă colatitudinea geodezică și respectiv colatitudinea astronomică.

Cu s_2 s-a notat proiecția punctului vizat S_2 pe sfera auxiliară. Acum se pot defini alte elemente măsurabile (azimutul astronomic α, unghiul zenital aparent $\zeta°$), precum și elementele corespondente pe elipsoid (azimutul geodezic sau elipsoidic A, unghiul zenital redus la normala la elipsoid ζ^E denumit și unghi zenital elipsoidal).

Observație. În manual se va folosi notația ζ atît pentru anomaliile sau perturbațiile altitudinii (definite în 4.4), cît și pentru unghiurile zenitale. În mod analog, notația N este folosită atît pentru ondulațiile geoidului, cît și pentru raza de curbură a primului vertical (marea normală).

Componenta η a deviației verticalei se poate deduce din triunghiul sferic dreptunghic $Z_a Z' P$ (fig. 5-2, *a*):

$$\frac{\sin\eta}{\sin(\Lambda - L)} = \frac{\cos\Phi}{1}.$$

Deoarece termenii din membrul stîng al acestei relații sînt foarte mici, se poate scrie:

$$\eta = (\Lambda - L)\cos\Phi. \qquad (5\text{-}43)$$

Componenta în meridian a deviației verticalei ξ se poate deduce din același triunghi sferic, transformat după o regulă mnemonică (*regula lui Néper*), cunoscută din trigonometria sferică: „făcînd abstracție de unghiul drept A și înlocuind laturile b și c prin complementele lor 90—b și 90—c, cosinusul fiecărui element este egal cu produsul sinusurilor elementelor neadiacente sau cu produsul cotangentelor elementelor adiacente". Triunghiul transformat după această regulă este reprezentat în figura 5-2, b. Prin urmare rezultă:

$$\cos(\Lambda - L) = \operatorname{tg}\Phi \operatorname{ctg}(B + \xi)$$

și deoarece se poate aproxima: $\cos(\Lambda - L) \approx 1$, se obține:

$$\xi = \Phi - B. \tag{5-44}$$

Relațiile (5-43) și (5-44) determină componentele deviației verticalei pe baza observațiilor astronomice efectuate în punctul considerat și a cunoașterii coordonatelor geodezice. De aceea aceste mărimi se mai numesc și *componente astronomo-geodezice ale deviației verticalei*, fiind notate obișnuit cu ξ_{ag}, η_{ag}. Pentru a nu încărca expunerea cu formule cu mulți indici, se folosesc aceste notații cu indici inferiori numai cînd va fi strict necesar.

Deviația astronomo-geodezică a verticalei are un caracter relativ, determinat de faptul că se referă la un *anumit* elipsoid de referință și la o *anumită* rețea de triangulație. Dacă se modifică elipsoidul de referință sau configurația rețelei din care face parte punctul S_1, vor rezulta alte coordonate geodezice B, L pentru acest punct și prin urmare noi valori pentru componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei.

Trebuie remarcat de asemenea faptul că acest gen de determinări implică efectuarea observațiilor astronomice. De aceea, determinările astronomo-geodezice ale deviației verticalei se execută într-un număr relativ mic de puncte, urmînd ca pentru celelalte necesități să se adopte un procedeu de interpolare.

5.2.2. COMPONENTELE GRAVIMETRICE ALE DEVIAȚIEI VERTICALEI

Deviația verticalei poate fi determinată și pe cale gravimetrică, existînd mai multe metode, dintre care metoda *F.A. Vening-Meinesz* (1928) stă la baza a numeroase procedee practice derivate, aplicate în producție.

În figura 5-3, a se presupune o intersecție a elipsoidului de referință și a geoidului cu un plan de azimut oarecare A.

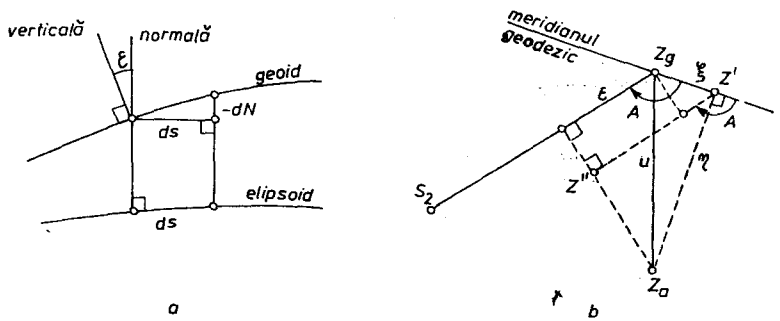


Fig. 5-3. Componenta deviației verticalei ε într-un plan oarecare, de azimut A.

Se exprimă componenta deviației verticalei ε în acest plan, în funcție de componentele deviației verticalei ξ și η.

În acest scop se construiește figura 5-3, b, ca un element ajutător, avînd ca bază figura 5-2 (planul figurii este perpendicular pe normala la elipsoid în punctul S_1). Din proiecțiile componentelor ξ și η pe segmentul $\overline{Z'Z''}$ rezultă:

$$\varepsilon = \eta \cos(A - 90°) - \xi \cos(180° - A),$$

adică:

$$\varepsilon = \xi \cos A + \eta \sin A. \tag{5-45}$$

Din figura 5-3, a rezultă:

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}. \tag{5-46}$$

Pentru calculul componentei deviației verticalei în meridian, se particularizează relația (5-46) sub condiția aproximării elipsoidului de referință cu o sferă de rază R raza medie *Gauss* R:

$$\varepsilon = \xi; \quad ds = ds_m = R\, dB. \tag{5-47}$$

În mod analog, pentru deducerea componentei deviației verticalei în direcția est-vest se scrie:

$$\varepsilon = \eta; \quad ds = ds_p = R \cos B\, dL, \tag{5-48}$$

rezultînd prin urmare:

$$\xi = -\frac{dN}{ds_m} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial B}; \tag{5-49}$$

$$\eta = -\frac{dN}{ds_p} = -\frac{1}{R\cos B}\frac{\partial N}{\partial L}. \tag{5-50}$$

Se obține astfel legătura analitică dintre deviația verticalei și ondulația geoidului. Pentru calculele următoare se va folosi relația (5-41), astfel că:

$$\frac{\partial N}{\partial B} = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{L'=0}^{2\pi}\int_{B'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(B', L')\frac{\partial S(\psi)}{\partial B}\cos B' dB' dL', \tag{5-51}$$

și analog pentru $\partial N/\partial L$. Deoarece funcția $S(\psi)$ depinde de B și L prin intermediul distanței sferice ψ se poate scrie:

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial B} = \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial B};$$

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial L} = \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\eta L}. \tag{5-52}$$

Calculul acestor derivate se poate face folosind relația (1-108), scrisă sub forma:

$$\cos\psi = \sin B \sin B' + \cos B \cos B' \cos(L' - L),$$

rezultînd:

$$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial B}=\cos B\sin B'-\sin B\cos B'\cos(L'-L);$$
$$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial L}=\cos B\cos B'\sin(L'-L). \tag{5-53}$$

În triunghiul sferic din figura 1-8, *a* se poate scrie:

$$\sin\psi\cos A=\cos B\sin B'-\sin B\cos B'\cos(L'-L);$$
$$\sin\psi\sin A=\cos B'\sin(\lambda'-\lambda), \tag{5-54}$$

astfel că derivatele (5-53) se pot exprima mai simplu:

$$\frac{\partial\psi}{\partial B}=-\cos A;\qquad \frac{\partial\psi}{\partial L}=-\cos B\sin A. \tag{5-55}$$

Cu aceasta, derivatele (5-52) devin:

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial B}=-\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos A;$$
$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial L}=-\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos B\sin A. \tag{5-56}$$

Din relațiile (5-49), (5-50), (5-51) și (5-56) rezultă *formulele Vening-Meinesz*:

$$\xi''(B,L)=\frac{\rho''}{4\pi\gamma}\int_{L'=0}^{2\pi}\int_{B'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Delta g(B',L')\frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A\cos B'dB'dL';$$
$$\eta''(B,L)=\frac{\rho''}{4\pi\gamma}\int_{L'=0}^{2\pi}\int_{B'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Delta g(B',L')\frac{dS(\psi)}{d\psi}\sin A\cos B'dB'dL', \tag{5-57}$$

pentru calculul componentelor deviației gravimetrice a verticalei, în funcție de anomaliile gravității Δg, reduse la suprafața geoidului.

Derivata $dS(\psi)/d\psi$ este denumită *funcția Vening-Meinesz*:

$$\frac{dS}{d\psi}=-\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}+8\sin\psi-6\cos\frac{\psi}{2}-3\frac{1-\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\psi}+$$
$$+3\sin\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right). \tag{5-58}$$

Folosind relațiile (5-40) și (5-41) se poate deduce din (5-57) o altă formulă uzuală pentru *formulele Vening-Meinesz*:

$$\begin{Bmatrix}\xi''\\ \eta''\end{Bmatrix}=\frac{\rho''}{4\pi\gamma}\int_{A=0}^{2\pi}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta g(\psi,A)\begin{Bmatrix}\cos A\\ \sin A\end{Bmatrix}\frac{dS}{d\psi}\sin\psi d\psi dA. \tag{5-59}$$

Așa cum s-a arătat, determinarea potențialului perturbator T este posibilă numai prin acceptarea ipotezei că întreaga masă este introdusă în interiorul geoidului, astfel încît funcția T devine armonică și îndeplinește condiția (5-9). În mod asemănător s-a apelat la această ipoteză și la reducerea mărimilor măsurate ale gravității la suprafața geoidului, în capitolul 3, în scopul deducerii anomaliilor gravității.

Pentru a evita ipoteze referitoare la distribuția maselor, *Molodenski* (1945) propune rezolvarea celei de a treia probleme limită (5-8, a) la nivelul suprafeței fizice a Pământului.

Deoarece se consideră masele din afara suprafeței fizice a Pământului neglijabile, potențialul perturbator T la nivelul suprafeței fizice este o funcție armonică, adică satisface condiția (5-9). Prin urmare determinarea sa este posibilă, prin utilizarea relațiilor (5-8, a) și (5-9), la nivelul suprafeței fizice.

Revenind la figura 5-1, se consideră normala la cvasigeoid PP_0'', pe care se figurează un punct Q astfel încît:

$$U_Q=W_P. \tag{5-60}$$

Ansamblul punctelor Q descrie o suprafață denumită de către *Hirvonen teluroid*. Potrivit definițiilor date în 4.4., rezultă că punctul Q se află la distanța ζ, egală cu anomalia altitudinii de suprafața fizică și la distanța H^N de suprafața elipsoidului de referință. Dacă geopotențialul W ar fi egal cu potențialul normal U în fiecare punct al suprafeței fizice, atunci punctele P și Q ar coincide, teluroidul fiind identic cu suprafața fizică, iar altitudinile normale ar fi identice cu altitudinile elipsoidice. Din acest motiv, segmentul $\zeta=\overline{PQ}$ care diferă de valoarea zero a primit denumirea de *anomalia altitudinii*.

Aplicînd formula Bruns (5-1), în noile condiții, se obține:

$$\zeta=\frac{T_P}{\gamma_Q}, \tag{5-61}$$

în care potențialul perturbator este exprimat la nivelul suprafeței fizice, iar accelerația normală a gravității este redusă pe teluroid, cu o formulă de tipul (2-94) sau (2-95).

Din dezvoltarea, în mod corespunzător, a expresiei de calcul pentru anomalia ζ în raport de noile anomalii ale gravității Δg^*:

$$\Delta g^*=g_P-\gamma_Q, \tag{5-62}$$

se obține o formulă similară cu formula *Stokes*. Deoarece teluroidul nu este o suprafață de nivel, fiecare punct de pe această suprafață fiind caracterizat printr-un alt potențial, conform cu (5-60), legătura dintre Δg^* și ζ este mai complicată decît legătura dintre Δg și N. Soluția este dată sub forma unei integrale, al cărei prim termen este formula *Stokes* (*Moritz* 1967):

$$\zeta=\frac{R}{4\pi G}\iint_\sigma\left(\Delta g-\frac{\partial\Delta g}{\partial H}H\right)S(\psi)\,d\sigma+\frac{\partial\zeta}{\partial H}H. \tag{5-63}$$

Se observă că:

$$\Delta g^* = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial H} H, \tag{5-64}$$

precum şi faptul că înlccuind aceste noi anomalii Δg^* în relaţia *Stokes*, nu mai este necesară considerarea unui termen corectiv suplimentar în (5-63) pentru calculul anomaliilor altitudinilor. Din aceasta rezultă că, în principiu, metodele care se vor expune pentru determinarea ondulaţiilor geoidului pot fi folosite, cu adaptări corespunzătoare, şi la calculul anomaliilor altitudinii, adică la determinarea cvasigeoidului. În literatura de specialitate aferentă acestei probleme se întîlnesc mai multe soluţii, existînd, desigur şi puncte de vedere diferite.

Dacă se folosesc definiţiile date pentru altitudini normale (4-31) şi respectiv ortometrice (4-14) rezultă, cu o mică aproximaţie:

$$\zeta = N - \frac{\bar{g} - \gamma}{\bar{\gamma}} H, \tag{5-65}$$

prin care se exprimă legătura dintre ζ şi N.

Din aceasta rezultă o relaţie de orientare generală asupra diferenţei dintre ζ şi N (exprimată în metri):

$$\zeta - N \approx - \Delta g_B H \cdot 10^{-6}, \tag{5-66}$$

unde Δg_B este anomalia *Bouguer* exprimată în mgal, iar cota H în metri.

În mod analog pot fi tratate şi componentele gravimetrice ale deviaţiei verticalei, pentru care rezultă, în analogie cu 5.2:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \Delta g^* \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma.$$

5.4. DESPRE METODELE PRACTICE DE DETERMINARE A ONDULAŢIILOR GEOIDULUI ŞI COMPONENTELE DEVIAŢIEI VERTICALEI

Se cunosc numeroase metode folosite în practică pentru determinări efective ale ondulaţiilor geoidului şi respectiv ale componentelor deviaţiei verticalei, a căror expunere amănunţită depăşeşte cadrul unui manual universitar. Acestea se deosebesc în primul rînd prin faptul că urmăresc obiective diferite, ca de exemplu:

— determinări globale, pentru întreaga suprafaţă a Pămîntului;

— determinări pe suprafeţe mai mici, de mărimea unei ţări sau a unor grupe de ţări pe o anumită regiune, însă cu o precizie mai ridicată în comparaţie cu determinările globale.

Abordarea unei determinări globale presupune cunoaşterea anomaliilor gravimetrice pe întreaga suprafaţă a Pămîntului, ceea ce desigur este un obiectiv parţial îndeplinit şi informări cu rezultatele complete obţinute pînă în prezent sînt la dispoziţia unui număr mic de instituţii.

Cunoaşterea anomaliilor gravimetrice pe zone cît mai extinse în jurul punctului în care urmează să se determine N, ξ, η constituie un deziderat principal în cadrul determinărilor efective şi cu cît acesta este mai complet îndeplinit, determinarea respectivă are un grad de precizie mai ridicat.

5.4.1. UTILIZAREA ŞABLOANELOR CIRCULARE ŞI A SUPRAFEŢELOR STANDARD

Unul dintre principiile de bază folosit la determinarea ondulaţiilor geoidului constă în împărţirea domeniului de integrare σ, care intervine în formula *Stokes* (5-37), din care derivă şi formulele *Vening-Meinesz* (5-57), în mai multe subdomenii σ_i, care aduc o contribuţie caracteristică la valorile finale, din punctul P:

$$N_P = \Sigma N_{\sigma_i}; \quad \xi_P = \Sigma \xi_{\sigma_i}; \quad \eta_P = \Sigma \eta_{\sigma_i}. \tag{5-67}$$

Ca exemplificare metodologică, didactică, se va examina deducerea unor formule pentru determinarea practică a ondulaţiilor geoidului.

În baza principiului enunţat anterior, integrala dublă (5-40) poate fi transformată sub forma:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{A=0}^{2\pi} \sum_{\psi=0}^{\pi} \Delta g F(\psi) \Delta A \Delta \psi. \tag{5-68}$$

Împărţirea domeniului în subdomenii a fost realizată în practică sub două forme:

Şabloane circulare (fig. 5-4, *a*) transpuse pe material transparent. Centrul şablonului se suprapune pe harta gravimetrică (scările de reprezentare coincid) în punctul în care urmează să se calculeze ondulaţia geoidului. Coordonatele polare ψ şi A ale centrelor sectoarelor sînt astfel determinabile (grafic), în funcţie de centrul paletei. Deoarece hărţile gravimetrice sînt, în prezent, redactate la scări mici, metoda grafică este caracterizată printr-o precizie mică. De aceea, în mod obişnuit, determinările grafice sînt înlocuite în prezent cu determinări analitice, formula de calcul fiind de forma (5-68).

Suprafeţe standard (fig. 5-4, *b*) reprezentate de proiecţia în plan a meridianelor şi paralelelor, dimensiunile sectoarelor fiind de exemplu de 10′ × × 10′ sau 1° × 1°. În comparaţie cu metoda anterioară, acest sistem prezintă avantaje importante. Astfel, coordonatele centrelor suprafeţelor standard, precum şi anomaliile medii din sector pot fi determinate analitic (deci mult mai precis) şi apoi memorate, putînd fi utilizate oricînd este necesar, pentru un calcul automatizat. Formula de calcul va fi de forma (5-41), însă exprimată analog cu relaţia (5-68).

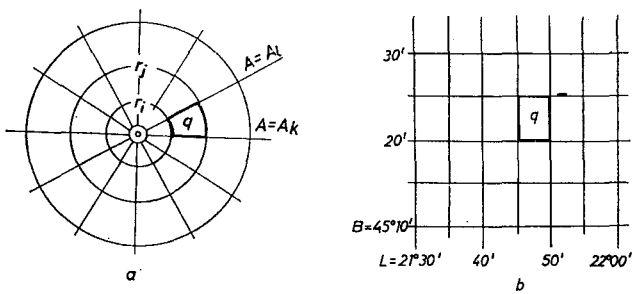


Fig. 5-4. Exemplificări de împărţire în sectoare ale zonei studiate.

În continuare se prezintă principiile generale de calcul în cazul utilizării şabloanelor circulare, deoarece formulele sînt relativ mai uşor de dedus şi de prezentat didactic.

Pentru fiecare sector q se consideră o valoare medie a anomaliei greutăţii $\overline{\Delta g_q}$ astfel că relaţia (5-40) devine:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_q \overline{\Delta g_q} \iint_q S(\psi) \sin\psi \mathrm{d}\psi \mathrm{d}A, \tag{5-69}$$

sau:

$$N = \sum_q c_q \overline{\Delta g_q}, \tag{5-70}$$

unde coeficientul:

$$c_q = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_q S(\psi) \sin\psi \mathrm{d}\psi \mathrm{d}A \tag{5-71}$$

poate fi calculat pentru fiecare sector. Pentru aceasta se acceptă că în interiorul unui sector funcţia *Stokes* $S(\psi)$ are o variaţie foarte mică, putînd fi reprezentată de valoarea $S(\psi_q)$, calculată pentru centrul sectorului. Prin urmare se poate scrie:

$$c_q = \frac{S(\psi_q)}{4\pi R\gamma} \iint_q R^2 \sin\psi \mathrm{d}\psi \mathrm{d}A. \tag{5-72}$$

Integrala din relaţia (5-72) este acum imediată [v. relaţia (5-39)], reprezentînd aria sectorului q, notată a_q. Se obţine astfel relaţia de calcul căutată:

$$c_q = \frac{S(\psi_q)\, a_q}{4\pi R\gamma}. \tag{5-73}$$

Deoarece pentru sectoarele apropiate de centrul paletei funcţia $S(\psi_q)$ ia valori foarte mari (pentru $\psi \to 0$, $S(\psi) \to \infty$), zona apropiată de punctul în care se determină ondulaţia geoidului este studiată în mod distinct şi separat faţă de celelalte zone. În acest fel, rezultatul final este format din componenta obţinută pentru zona apropiată N_0 şi din componenta pentru celelalte zone:

$$N = N_0 + N_t, \tag{5-74}$$

unde:

$$N_0 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi_0} \Delta g S(\psi) \sin\psi \, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}A; \tag{5-75}$$

$$N_t = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} \Delta g S(\psi) \sin\psi \mathrm{d}\psi \mathrm{d}A. \tag{5-76}$$

Cu ψ_0 s-a notat raza care delimitează zona apropiată (distanţa plană corespondentă s este de cîţiva kilometri). Pentru un asemenea domeniu limitat, suprafaţa sferică se poate înlocui cu o suprafaţă plană, în care se pot utiliza coordonatele polare plane s, A:

$$s \approx R\psi \approx R \sin\psi \approx 2R \sin\frac{\psi}{2}; \qquad \mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{d}s}{R}. \tag{5-77}$$

În această ipoteză, funcţia Stokes (5-36) poate fi aproximată doar prin primul termen, rezultînd:

$$S(\psi) \approx \frac{2R}{s}. \tag{5-78}$$

Efectul zonei apropiate poate fi dedus din relaţia (5-40) prin folosirea particularizărilor menţionate:

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{s_0} \frac{\Delta g}{s} s \mathrm{d}s \mathrm{d}A. \tag{5-79}$$

Pentru calculul integralei se dezvoltă în serie anomalia gravităţii în punctele din vecinătatea centrului paletei:

$$\Delta g = \Delta g_0 + x\Delta g_x + y\Delta g_y + \\ + \frac{1}{2}(x^2\Delta g_{xx} + y^2\Delta g_{yy} + 2xy\Delta g_{xy}) + \ldots \tag{5-80}$$

unde:

$$\Delta g_x = \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\right)_0, \quad \Delta g_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2}\right)_0, \text{ ş.a.m.d.} \tag{5-81}$$

şi

$$x = s\cos A; \qquad y = s\sin A. \tag{5-82}$$

Cu aceasta, dezvoltarea în serie (5-80) devine:

$$\Delta g = \Delta g_0 + s(\Delta g_x \cos A + \Delta g_y \sin A) + \\ + \frac{s^2}{2}(\Delta g_{xx}\cos^2 A + \Delta g_{yy}\sin^2 A + 2\Delta g_{xy}\sin A\cos A). \tag{5-83}$$

Introducînd această expresie în (5-79) se obţine:

$$N_0 = \frac{1}{\gamma} \int_0^{s_0} \left[\Delta g_0 + \frac{s^2}{4}(\Delta g_{xx} + \Delta g_{yy}) + \ldots\right] \mathrm{d}s. \tag{5-84}$$

Integrarea în raport de s se efectuează, de obicei, prin neglijarea termenilor mici din expresia anterioară, rezultînd:

$$N_0 = \frac{s_0}{\gamma} \Delta g_0. \tag{5-85}$$

Prin urmare, influența zonei apropiate este direct proporțională cu valoarea anomaliei gravității în punctul în care se calculează ondulația geoidului.

Observații. 1. O dezvoltare remarcabilă o cunosc metodele bazate pe dezvoltarea ondulațiilor geoidului în funcții sferice. Dificultatea principală în cadrul acestei metode este reprezentată de determinarea coeficienților a'_{nm}, b'_{nm} din formulele de tipul (5—24), după care ondulația geoidului este o funcție de coordonatele θ, L ale punctelor considerate. Dificultatea menționată provine din faptul că o determinare riguroasă a acestor coeficienți se poate realiza numai în cazul cunoașterii anomaliilor greutății pe întreaga suprafață a Pământului (considerat ca o suprafață sferică). Deoarece acest lucru este greu de realizat, în prezent, calculele după această metodă se efectuează în mod iterativ.

2. În calcule este indicat să se folosească anomaliile izostatice (dacă acestea sînt calculate) sau anomaliile în aer liber, așa cum s-a menționat în cap. 3.

3. Rezultatele obținute din determinările ondulațiilor geoidului sînt prezentate fie numeric, fie, mai sugestiv, sub forma unor hărți, denumite *hărți ale geoidului*. Desigur aceste determinări au un caracter nedefinitiv, fiind dependente de numărul de puncte de bază avute la dispoziție, de repartizarea lor etc.

Metoda de determinare practică a cvasigeoidului în țara noastră este descrisă de *Diaconu* (1975) și *Dragomir* ș.a. (1977).

Calculul practic al componentelor gravimetrice ale deviației verticalei se realizează, în principiu, după aceeași tehnologie ca cea descrisă la determinarea practică a ondulațiilor geoidului.

La noi în țară se aplică formule originale de calcul, care sînt prezentate dezvoltat de *Mihăilescu* (1974) și *Dragomir* ș.a. (1977)

5.4.2. INTERPOLAREA ONDULAȚIILOR GEOIDULUI ȘI DEVIAȚIEI VERTICALEI

În principiu, pentru interpolarea ondulațiilor geoidului și a deviațiilor verticalei se pot aplica metodele descrise în paragraful 3.9, la interpolarea anomaliilor gravimetrice. Aplicarea metodelor descrise trebuie însă făcută în funcție de specificul noilor mărimi care urmează a fi interpolate.

Astfel, dacă s-ar raporta componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei pe un anumit domeniu și s-ar desena curbele de egală deviație, s-ar putea observa o asemănare foarte mare cu aspectul neregulat al curbelor de nivel. De aceea, o interpolare directă, de pe asemenea reprezentări, ar fi puțin precisă, în special cînd punctele în care s-au determinat componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei ξ_{ag}, η_{ag} se află la distanțe mari (ceea ce este caracteristic stadiului actual).

Se cunosc mai multe soluții pentru o interpolare care să asigure precizia convenabilă în lucrările geodezice, dintre care se menționează:

● *Soluția 1.* Aspectul neregulat al curbelor de egală deviație astronomo-geodezică a verticalei este determinat de influența reliefului și de distribuția maselor în interiorul Pământului. Într-adevăr, presupunînd că suprafața Pământului ar coincide perfect cu suprafața elipsoidului de referință, atunci toate deviațiile verticalelor ar fi nule. Această ipoteză este valabilă cînd masele topografice ar fi înlăturate. Prin reașezarea maselor topografice pe suprafața elipsoidului se obțin așa-numitele *deviații topografice ale verticalei* ξ_t, η_t. Dacă la aceste considerații se adaugă și ipoteza izostatică, rezultă *deviațiile topografice izostatice ale verticalei*, ξ_{ti}, η_{ti}.

Deviațiile topografice, respectiv izostatice, ale verticalei se obțin prin aplicarea unor reduceri, $\Delta\xi_t$, $\Delta\eta_t$ și respectiv $\Delta\xi_i$, $\Delta\eta_i$. Deducerea formulelor de calcul efectiv poate fi urmărită în lucrări mai extinse, de exemplu *Zakatov* (1976), metoda fiind asemănătoare cu cea descrisă în 3.3. și 3.6.

Reducerea topografică-izostatică a deviației verticalei va fi:

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{ti} &= \Delta\xi_t + \Delta\xi_i; \\ \Delta\eta_{ti} &= \Delta\eta_t + \Delta\eta_i, \end{aligned} \tag{5-86}$$

unde:

$$\begin{aligned} \Delta\xi_i'' &= \frac{\rho''}{4\pi}\,\frac{\rho}{\rho_m}\,\frac{H}{R}\,(\sin A_l - \sin A_k)\,\ln\frac{r_j}{r_i}; \\ \Delta\eta_i'' &= \frac{3\rho''}{4\pi}\,\frac{\rho}{\rho_m}\,\frac{H}{R}\,(\cos A_k - \cos A_l)\,\ln\frac{r_j}{r_i}; \end{aligned} \tag{5-87}$$

$$\begin{aligned} \Delta\xi_i'' = -\frac{3\rho''}{4\pi}\,\frac{H}{R\,(T+H)}\,\frac{\rho_0}{\rho_m}\,(\sin A_l - \sin A_k)\Big\{H\ln\frac{r_j}{r_i} + \\ + T\ln\left[(r_j + \sqrt{r_j^2+T^2})/(r_i+\sqrt{r_i^2+T^2})\right]\Big\}; \\ \Delta\eta_i'' = -\frac{\rho''}{4\pi}\,\frac{H}{R\,(T+H)}\,\frac{\rho_0}{\rho_m}\,(\cos A_k - \cos A_l)\Big\{H\ln\frac{r_j}{r_i} + \\ + T\ln\left[(r_j + \sqrt{r_j^2+T^2})/(r_i+\sqrt{r_i^2+T^2})\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{5-88}$$

În formulele (5-88) s-au utilizat notațiile din cap. 3, în practică folosindu-se, de obicei, următoarele valori:

$$\rho_m = 5{,}52\ \text{g/cm}^3; \qquad \rho_0 = 2{,}67\ \text{g/cm}^3$$
$$R = 6\,378\ \text{km}; \qquad T = 30\ \text{km}.$$

Determinarea se realizează prin intermediul unor șabloane circulare, de forma celui reprezentat schematic în figura 5-4 *a*, A_l și A_k, respectiv r_i și r_j reprezentînd azimutele și respectiv mărimile razelor care delimitează un anumit sector.

Dacă se reprezintă aceste valori reduse, sub forma unor profile, se vor constata variații mici, relativ uniforme. Aceasta va permite interpolarea în oricare punct P din domeniul considerat (în funcție de valorile cunoscute în punctele învecinate) a valorilor $\tilde{\xi}_{ti}^P$ și $\tilde{\eta}_{ti}^P$. După calcularea în punctul respectiv a reducerii topografice-izostatice $\Delta\xi_{ti}^P$, $\Delta\eta_{ti}^P$, se vor putea determina componentele deviației astronomo-geodezice a verticalei în acest punct:

$$\begin{aligned} \xi_{ag}^P &= \tilde{\xi}_{ti}^P + \Delta\xi_{ti}^P; \\ \eta_{ag}^P &= \tilde{\eta}_{ti}^P + \Delta\eta_{ti}^P. \end{aligned} \tag{5-89}$$

Această soluție prezintă un avantaj esențial în comparație cu soluția 2 prezentată în continuare și anume: reducerile $\Delta\xi$ și $\Delta\eta$ se pot calcula fără a fi necesare determinări gravimetrice.

● *Soluția 2.* În punctele în care se cunosc componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei ξ_{ag}^j, η_{ag}^j ($j = A, B, \ldots, N$) se determină

și componentele gravimetrice ale deviației verticalei ξ_{gr}^j, η_{gr}^j ($j = A, B, \ldots, N$). Diferențele:

$$\delta\xi^j = \xi_{ag}^j - \xi_{gr}^j;$$
$$\delta\eta^j = \eta_{ag}^j - \eta_{gr}^j, \tag{5-90}$$

au de asemenea o variație relativ lentă, într-un anumit domeniu, depinzînd de coordonatele B, L ale punctelor considerate.

În aceste condiții se poate scrie:

$$aB^j + bL^j + c = \delta\xi^j; \quad \alpha B^j + \beta L^j + \gamma = \delta\eta^j;$$
$$j = A, B, \ldots, P. \tag{5-91}$$

Coeficienții a, b, c și respectiv α, β, γ, considerați ca necunoscute, pot fi determinați prin metoda celor mai mici pătrate în cazul în care $P \geqslant 4$ în domeniul considerat. După efectuarea acestui calcul se pot afla diferențele $\delta\xi^k$, $\delta\eta^k$ în orice punct k, folosind coordonatele sale B^k și L^k și relațiile (5-91). Presupunînd cunoscute componentele gravimetrice ale deviației verticalei în punctul considerat ξ_{gr}^k și η_{gr}^k se pot calcula și componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei în acest punct ξ_{ag}^k, η_{ag}^k cu relația (5-90).

Formulele de interpolare sînt mult mai simple, în comparație cu soluția 1, însă este necesar să se cunoască și componentele gravimetrice ale deviației verticalei, ceea ce presupune efectuarea determinărilor gravimetrice.

5.4.3. NIVELMENTUL ASTRONOMO-GEODEZIC ȘI ASTRONOMO-GRAVIMETRIC

Profilul geoidului poate fi obținut și în funcție de componentele deviației verticalei. Formulele de bază utilizate în acest scop sînt (5-45) și (5-46).

Considerînd două puncte 1 și t, situate pe profilul de azimut A, se poate scrie:

$$\int_1^t dN = -\int_1^t \varepsilon ds,$$

sau:

$$N_t = N_1 - \frac{1}{\rho^{cc}} \int_1^t \varepsilon^{cc} ds. \tag{5-92}$$

Prin această formulă se exprimă ondulațiile geoidului în funcție de componenta ε a deviației verticalei, în lungul profilului de azimut A. În practică se folosesc deseori profile situate în poziții particulare și anume $A = 0°$ (și atunci $\varepsilon = \xi$) sau $A = 90°$ (și atunci $\varepsilon = \eta$). Și în această categorie de determinări practice una dintre problemele principale este constituită de stabilirea densității profilelor pentru a putea rezulta o figură a geoidului cît mai corect determinată. *Zakatov* (1976) recomandă densitatea necesară astfel:

— pentru regiuni de șes: 1 punct la 10 — 20 km;

— pentru regiuni de munte sau regiuni cu anomalii gravimetrice puternice: 1 punct la 3—5 km.

În asemenea condiții se poate accepta o variație liniară pentru componenta ε a deviației verticalei, astfel încît integrala din expresia (5-92) se poate determina practic în felul următor:

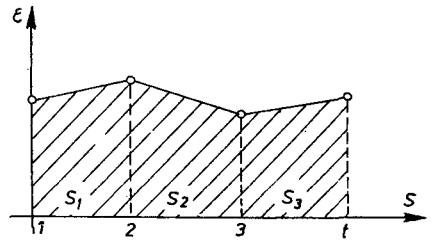


Fig. 5-5. Profilul pentru determinarea figurii geoidului.

— se construiește un grafic (fig. 5-5), în care pe axa absciselor se raportează distanțele s între punctele profilului, iar pe axa ordonatelor se raportează componentele ε;

— suprafața hașurată corespunde integralei căutate, astfel încît:

$$N_t = N_1 - \frac{1}{\rho^{cc}} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} s_1 + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} s_2 + \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_t}{2} s_3 \right). \tag{5-93}$$

În cazul în care componentele ξ și η se determină cu formulele:

$$\eta_{ag} = (\Lambda - L) \cos \Phi; \tag{5-43}$$
$$\xi_{ag} = \Phi - B, \tag{5-44}$$

metoda de determinare se numește *astrogeodezică* sau, foarte des, *nivelment astronomo-geodezic*. Denumirea provine din faptul că determinarea se bazează pe compararea coordonatelor geodezice B, L și respectiv astronomice Φ, Λ în punctele de pe profil. Desigur că metoda are o importanță principială, deoarece actualmente punctele astronomo-geodezice sînt dispuse la distanțe mult mai mari, față de cele arătate. Precizia necesară s-ar atinge numai după o îndesire a rețelei existente, ceea ce ar însemna importante alocații de fonduri, în condițiile actualei rețele de puncte astronomo-geodezice neputîndu-se accepta liniaritatea variației componentelor ε.

Pentru a se elimina aceste neajunsuri este necesar să se lucreze cu mărimi care au o variație mai lentă, așa cum s-a procedat și în 5.5.

Din ξ_{gr} și η_{gr}, cunoscute în punctele care asigură densitatea necesară specificată mai sus se calculează:

$$\varepsilon_{gr} = \xi_{gr} \cos A + \eta_{gr} \sin A. \tag{5-95}$$

Operațiunea se efectuează și în punctele astronomo-geodezice, astfel încît, în aceste puncte, se pot determina diferențe de genul (5-90):

$$\delta\varepsilon = \varepsilon_{ag} - \varepsilon_{gr}. \tag{5-96}$$

La fel cu diferențele $\delta\xi$ și $\delta\eta$ și mărimile $\delta\varepsilon$ au o variație lentă, liniară, astfel încît se pot calcula în oricare dintre punctele situate pe profilul considerat:

$$\delta\varepsilon_t = \delta\varepsilon_1 + \frac{\delta\varepsilon_{II} - \delta\varepsilon_I}{s_{I-II}} s_{1t}, \tag{5-97}$$

unde cu I și II s-au notat două puncte astronomo-geodezice, situate la distanța s_{I-II}.

Prin acest sistem de interpolare, similar cu cel descris în 5.5, se pot obține diferențele $\delta\varepsilon_i$ în oricare din punctele gravimetrice și, în continuare, componenta ε_{ag} necesară cu relația (5-96). Abia acum se poate aplica formula (5-93).

Această metodă a fost denumită de către *M.S. Molodenski nivelment astronomo-gravimetric* deoarece necesită cunoașterea componentelor astronomice, precum și gravimetrice ale deviației verticalei în zona unde se determină forma geoidului.

Observații: 1. Nivelmentul astronomo-gravimetric s-ar putea efectua și prin calcularea unor cantități $\Delta\varepsilon_{ti}$ (reduceri topografo-izostatice ale componentei ε a deviației verticalei) analog ca în cazul soluției 1 din 5.5. Aceste mărimi vor putea fi folosite apoi la calculul componentei ε_{ag} [analog cu relațiile (5—89)], metoda păstrîndu-și avantajul esențial de a nu utiliza determinări gravimetrice.

2. Metodele prezentate sînt valabile numai într-o primă aproximație, deoarece se bazează pe neglijarea curburii verticalelor. Însă, rezolvările practice, efective, acceptă în prezent această aproximație.

Metodele expuse în acest paragraf au fost aplicate și în țara noastră, principiile și formulele utilizate fiind prezentate de *Dragomir* ș.a. (1977).

Partea a doua

GEODEZIE ELIPSOIDALĂ

Geodezia elipsoidală studiază metodele de rezolvare a problemelor geodezice pe suprafața elipsoidului de referință

În capitolul 2 s-a arătat că figura Pămîntului este aproximată în mod curent în geodezie printr-un elipsoid de rotație cu turtire mică la poli. Elipsoidul cu trei axe, care ar reprezenta o aproximație mai bună pentru acest scop, a cunoscut pînă în prezent o aplicabilitate restrînsă.

În cadrul geodeziei elipsoidale este cuprinsă și studierea suprafeței elipsoidului în general, ca suprafață matematică, pentru a obține fundamentarea metodelor de rezolvare a problemelor geodezice. De menționat, de asemenea, că în mod obișnuit rezolvările pe elipsoid cuprind numai coordonatele geodezice (2.3.2), urmînd ca determinarea altitudinilor să fie realizată în mod separat. Această separare, dintre determinările de B și L pe de o parte și H^E pe de altă parte, a fost condiționată în special de dificultățile care caracterizează utilizarea în bloc a unghiurilor zenitale și respectiv a unghiurilor (direcțiilor) orizontale, distanțelor ș.a.m.d. Cele două categorii de măsurători geodezice sînt influențate în mod diferit de fenomenul de refracție atmosferică și, ca urmare, au precizii și domenii de utilizare diferite.

Numeroase lucrări elaborate în ultimele decenii și probabil și încă multe altele din deceniile care vin, repun și vor repune în discuție posibilitățile concrete de elaborare a unor „rețele geodezice tridimensionale", a căror prelucrare să permită elaborarea simultană, în mod unitar, a celor trei coordonate B, L, H^E, care descriu poziția punctelor de pe suprafața Pămîntului (v. fig. 2-6 și 24.4.).

Din considerente de ordin didactic expunerea din manual se va opri pentru început la cazul curent întîlnit în practica geodezică, de separare a așa-numitei „probleme planimetrice" de „problema altitudinii", prin care se determină poziția punctelor geodezice. Se înțelege că noțiunea de „problemă planimetrică" este improprie, deoarece se operează cu coordonatele geodezice B și L, care se referă la suprafața elipsoidului de referință și nu la un plan oarecare.

Inconsecvența poate fi trecută cu vederea dacă se consideră că transcalcularea coordonatelor B, L în coordonate plane nu prezintă dificultăți deosebite.

În mod obișnuit în cadrul geodeziei elipsoidale sînt studiate și reducerile observațiilor geodezice efectuate pe suprafața fizică a Pămîntului la suprafața elipsoidului de referință. Din considerente generate de o mai bună sistematizare a problematicii abordate în manual, aceste corecții vor fi expuse în cap. 20. În același sens se poate menționa că obiectul geodeziei elipsoidale cuprinde și alte probleme complexe, cum ar fi de exemplu calcule de trecere de la un elipsoid de referință la altul (așa-numitele formule diferențiale) a căror expunere depășește cadrul acestui manual.

Pentru a oferi legătura cu alte publicații, din alte țări, se menționează că pentru noțiunea de *geodezie elipsoidală* se mai întîlnesc: *geodezie sferoidală* (*Zakatov* 1976, *Bagratuni* 1962 ș.a.), *geodezie matematică* (*Jordan* ș.a. 1958), *geodezie geometrică* (*Heiskanen* 1967), obiectul de studiu rămînînd, în principiu, același. În unele dintre publicațiile menționate sînt studiate și teoriile matematice ale proiecțiilor cartografice. În manualul de față aceste aspecte nu vor fi abordate deoarece ele constituie obiectul de studiu al unei alte discipline din planul de învățămînt al secției de geodezie: *cartografia matematică*. Rezultatele obținute la această disciplină vor fi utilizate însă în exemplificările numerice care însoțesc prezentarea metodelor de prelucrare a observațiilor din rețelele geodezice de sprijin.

Capitolul 6
CURBE PE SUPRAFAȚA ELIPSOIDULUI DE REFERINȚĂ

6.1. ECUAȚIILE PARAMETRICE ALE ELIPSOIDULUI DE ROTAȚIE

Elipsoidul de referință, adică elipsoidul folosit la un moment dat, într-o țară sau în mai multe țări, pentru rezolvarea problemelor geodezice, este un elipsoid de rotație cu turtire mică la poli. Reamintind că parametrii geometrici ai elipsoidului de rotație au fost definiți complet în 2.3.1., în tabelul 6-1 se prezintă valorile numerice ale parametrilor a și f pentru elipsoizii de referință care au fost utilizați în decursul anilor în țara noastră, precum și pentru elipsoidul recomandat de *AIG* în anul 1980.

Tabelul 6–1

Denumirea elipsoidului de referință	Anul determinării	Semiaxa mare a [m]	Turtirea numerică f	Perioada de utilizare în România
Bessel	1841	6 377 397,115	1 : 299,1528	1873–1916
Clarke	1880	6 378 243,000	1 : 293,5	1916–1930
Hayford	1909	6 378 388,000	1 : 297,0	1930–1951
Krasovski	1940	6 378 245,000	1 : 298,3	1951–prezent
Sistemul geodezic de referință 1980	1980	6 378 137,000	1 : 298,257	–

Ecuația generală a unui elipsoid de rotație, exprimată sub formă implicită:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (6\text{-}1)$$

este puțin folosită în geodezia elipsoidală. În mod frecvent se operează cu ecuațiile parametrice, în funcție de coordonatele B și L, adică:

$$X = X(B, L); \qquad Y = Y(B, L); \qquad Z = Z(B).$$

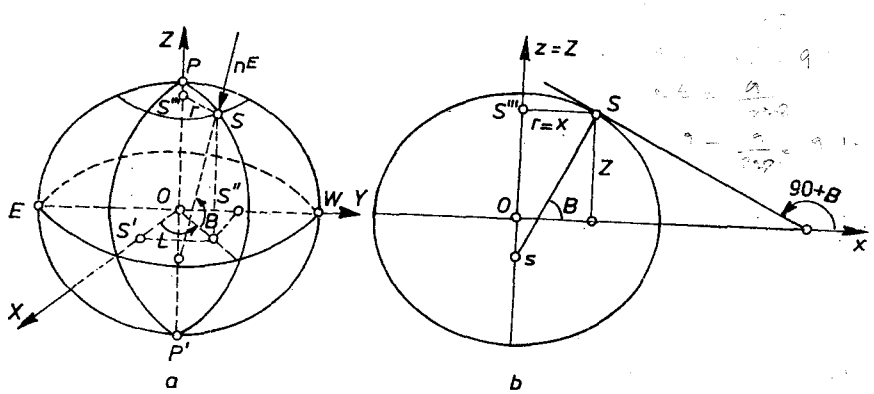


Fig. 6-1. Elipsoidul de rotație de referință.

Pentru deducerea acestora este util să se determine, în prealabil, ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane:

$$x = x(B); \qquad z = z(B),$$

deoarece legătura dintre coordonatele X, Y, Z și respectiv x, z (fig. 6-1) este imediată:

$$X = x \cos L; \qquad Y = x \sin L; \qquad Z = z. \qquad (6\text{-}2)$$

Ecuația elipsei meridiane sub formă implicită este:

$$f(x, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (6\text{-}3)$$

sau, în funcție de (2-59):

$$f(x, z) = x^2 + \frac{z^2}{1 - e^2} - a^2 = 0. \qquad (6\text{-}4)$$

Coeficientul unghiular al tangentei la elipsă în punctul S (fig. 6-1, *b*) poate fi exprimat sub forma:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(90° + B) = -\operatorname{ctg} B, \qquad (6\text{-}5)$$

sau sub forma:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{(1 - e^2)\, x}{z}. \qquad (6\text{-}6)$$

Din egalarea ultimelor două relații rezultă:

$$z = (1 - e^2)\, x \operatorname{tg} B. \qquad (6\text{-}7)$$

Introducînd expresia (6-7) în (6-4) se obține:

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \qquad (6\text{-}8)$$

iar, în continuare, din relația (6-7):

$$z = \frac{a\,(1 - e^2)\,\sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \tag{6-9}$$

Ultimele două relații reprezintă ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane în funcție de latitudinea geodezică B. Pentru scrierea mai concentrată a acestor ecuații, precum și pentru ușurarea calculelor practice, se folosesc frecvent următoarele *funcții auxiliare*:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}\,; \tag{6-10}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} = \sqrt{1 + \eta^2}\,, \tag{6-11}$$

unde:

$$\eta = e' \cos B. \tag{6-12}$$

Funcțiile auxiliare W și V au fost dezvoltate în serie și tabelate. La noi în țară se folosesc în mod curent tabelele *Tarczi — Hornoch — Hristov* (1959) din care se pot extrage atît valorile naturale, cît și valorile logaritmice pentru W și V, în funcție de latitudinea geodezică B, precum și pentru multe alte mărimi.

Observație. În lucrările clasice de geodezie elipsoidală se întîlnesc pe lîngă formule de calcul direct, de genul (6-10), (6-11) ș.a. și soluții obținute din acestea, de obicei prin dezvoltări în serie. Asemenea modalitate de lucru a fost condiționată de necesitatea micșorării erorilor de calcul, deoarece atît tabelele funcțiilor trigonometrice utilizate, cît mai ales mașinile de calcul avute la dispoziție, operau cu un număr relativ mic de cifre.

Mijloacele actuale de calcul, chiar cele obișnuite, de birou, permit utilizarea formulelor de calcul direct, fără a mai fi necesară utilizarea formulelor derivate din dezvoltări în serie sau a unor tabele auxiliare. De aceea, în manual, apelarea la utilizarea calculelor pe bază de tabele auxiliare va fi folosită numai în situațiile în care acest mod de lucru prez ntă avantaje incontestabile.

Folosind relațiile de legătură dintre parametrii elipsoidului de referință (2-58) — (2-66), se obține:

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B = 1 - \frac{e'^2}{1 + e'^2} \sin^2 B = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B}{1 + e'^2} = \frac{V^2}{1 + e'^2}, \tag{6-13}$$

precum și:

$$W^2 = (1 - e^2)\,V^2; \tag{6-14}$$

$$\frac{a}{W} = \frac{c}{V}. \tag{6-15}$$

În acest mod, ecuațiile parametrice ale elipsei meridiane (6-8) și (6-9) se pot exprima și sub forma:

$$x = \frac{a \cos B}{W} = \frac{c \cos B}{V}\,;$$
$$z = \frac{a\,(1 - e^2)\,\sin B}{W} = \frac{c\,(1 - e^2)\,\sin B}{V}. \tag{6-16}$$

Utilizînd aceste ecuații, precum și relațiile (6-2) rezultă ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație:

$$X = \frac{a \cos B \cos L}{W} = \frac{c \cos B \cos L}{V}\,;$$
$$Y = \frac{a \cos B \sin L}{W} = \frac{c \cos B \sin L}{V}\,; \tag{6-17}$$
$$Z = \frac{a\,(1 - e^2)\,\sin B}{W} = \frac{c\,(1 - e^2)\,\sin B}{V}.$$

6.2. LINIILE DE COORDONATE

Liniile de coordonate curbilinii pe suprafața elipsoidului de referință sînt reprezentate de familiile de meridiane (L = const) și paralele (B = const). În raport de liniile de coordonate se definesc anumite mărimi cu care se operează frecvent în geodezie (anumite sisteme de coordonate, azimutul geodezic etc.).

Unghiul de intersecție a liniilor de coordonate este un unghi drept și, ca urmare, în anumite calcule vor interveni simplificări, în comparație cu situația generală întîlnită la studiul suprafețelor, unde acest unghi poate avea o valoare oarecare.

6.2.1. RAZA DE CURBURĂ A ELIPSEI MERIDIANE

Fie două puncte S_1 și S_2 situate pe aceeași elipsă meridiană, la o diferență de latitudine ΔB (fig. 6-2). Raza de curbură M a elipsei meridiane poate fi definită de relația:

$$M = \lim_{\Delta B \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta B} = \frac{ds}{dB}, \tag{6-18}$$

în care ds este elementul de arc de elipsă:

$$ds^2 = dx^2 + dz^2. \tag{6-19}$$

Rezultă astfel:

$$M = \sqrt{\left(\frac{dx}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dB}\right)^2}. \tag{6-20}$$

Calculul derivatelor necesare din expresia (6-20) se realizează prin considerarea relațiilor (6-16). Astfel, de exemplu, prima derivată va fi:

$$\frac{dx}{dB} = a\Big[-\sin B(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+\frac{1}{2}\cos B(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2e^2 \sin B \cos B\Big],$$

care după transformări simple devine:

$$\frac{dx}{dB} = -\frac{a \sin B(1 - e^2)}{W^3}. \tag{6-21}$$

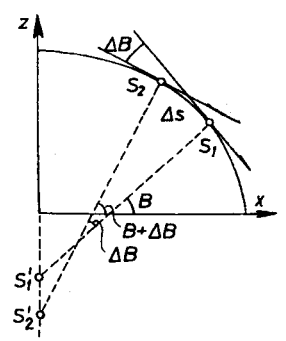


Fig. 6-2. Raza de curbură a elipsei meridiane.

Analog, se poate calcula şi cealaltă derivată necesară în expresia (6-20):

$$\frac{dx}{dB} = \frac{a(1-e^2)\cos B}{W^3}. \qquad (6\text{-}22)$$

În acest fel se poate determina expresia razei de curbură a elipsei meridiane:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}. \qquad (6\text{-}23)$$

Se observă că raza de curbură a elipsei meridiane creşte odată cu variaţia latitudinii geodezice B de la ecuator spre pol:

$$M_{0^\circ} = a(1-e^2); \qquad M_{90^\circ} = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = c. \qquad (6\text{-}24)$$

Mărimea razei de curbură a elipsei meridiane se poate extrage din tabele în funcţie de latitudinea geodezică a punctului considerat (pentru exemplificare, se prezintă un extras în tabelul 6-2).

Tabelul 6–2

B	V	d	M [m]	$\frac{d}{[m]}$
46°		–		+
0′	1,001 624 5190	9778	6 368 610,665	18,653
1′	1,001 623 5412		6 368 629,318	

6.2.2. LUNGIMEA ARCULUI DE MERIDIAN

Lungimea arcului de meridian între punctele S_1 şi S_2, de latitudini B_1 şi respectiv B_2, se poate determina prin integrarea unei relaţii de forma (6-18):

$$s_{1-2} = \int_{S_1}^{S_2} ds = \int_{B_1}^{B_2} M\, dB, \qquad (6\text{-}25)$$

sau, considerînd formulele (6-23):

$$s_{1-2} = a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}\,dB = c\int_{B_1}^{B_2}(1+e'^2\cos^2 B)^{-\frac{3}{2}}\,dB. \qquad (6\text{-}26)$$

Pentru calculul integralelor eliptice de mai înainte se efectuează iniţial dezvoltarea în serie a expresiilor $(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}$, respectiv $(1+e'^2\cos^2 B)^{-\frac{3}{2}}$, după care rezultatul obţinut poate fi integrat termen cu termen. Astfel:

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2 B + \frac{15}{8}e^4\sin^4 B + \ldots;$$

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2B;$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2B + \frac{1}{8}\cos 4B,$$

şi prin urmare:

$$s_{12} = a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}(\alpha - \beta\cos 2B + \gamma\cos 4B - \ldots)\,dB,$$

unde:

$$\alpha = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \ldots;$$

$$\beta = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \ldots;$$

$$\gamma = \frac{15}{64}e^4 + \ldots.$$

Prin urmare:

$$s_{12} = a(1-e^2)\left|\alpha B - \frac{1}{2}\beta\sin 2B + \frac{1}{4}\gamma\sin 4B - \ldots\right|_{B_1}^{B_2},$$

adică:

$$s_{12} = P(B_2 - B_1)^\circ - Q(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + R(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - \ldots, \qquad (6\text{-}27)$$

unde:

$$P = \frac{a(1-e^2)}{\rho^\circ}\alpha; \qquad Q = \frac{a(1-e^2)}{2}\beta; \qquad R = \frac{a(1-e^2)}{4}\gamma. \qquad (6\text{-}28)$$

Pentru necesităţi practice dezvoltările se realizează pînă la termeni care conţin e^8. Dacă se au în vedere parametrii elipsoidului *Krasovski* şi gradaţia sexagesimală se obţin următoarele valori numerice:

$$P = 111\ 134,\ 861\ 083\ 803; \qquad R = 16,\ 828\ 067;$$

$$Q = 16\ 036,\ 480\ 269; \qquad S = 0,\ 021\ 975;$$

$$T = 0,\ 000\ 031. \qquad (6\text{-}29)$$

De menţionat că termenii care conţin $e^2 \approx 2f$ şi similari ca ordin de mărime sînt consideraţi în geodezia elipsoidală ca termeni de ordinul I. Recapitulînd, relaţia de calcul a lungimii arcului de meridian între două puncte de latitudini B_1 şi B_2 este:

$$s_{1-2} = 111\ 134,\ 861\ 083\ 803\cdot(B_2 - B_1)^\circ - 16\ 036,\ 480268\ (\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + 16{,}828067\ (\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - 0{,}021975\ (\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + 0{,}000\ 031\ (\sin 8B_2 - \sin 8B_1).\ [m] \qquad (6\text{-}30)$$

Lungimea arcului de meridian de la ecuator pînă la punctul considerat β poate fi determinată cu formula (6–30), prin particularizarea $B_1 = 0°$. În tabele această mărime poate fi interpolată, în funcţie de latitudinea B a punctului respectiv, cu erori de calcul de ordinul $\pm$ 0,001 mm (tabelul 6-3).

Tabelul 6–3

B	β [m]	d [m]	r arc 1′ [m]	d [m]	$\Delta S_{\Delta L=1'}$ [ha]	d [ha]
46°		+		−		+
0′	5 096 175,747	1852,556	1 291,07653	0,38770	847 521,41	239,14
1′	5 098 028,303		1 290,68883		847 760,55	

Observaţii: 1. *Lungimea arcului de meridian este o funcţie de parametrii elipsoidului de referinţă folosit şi de latitudinile geodezice B_1 şi B_2 ale punctelor situate la capetele arcului.* Presupunînd cunoscute latitudinile geodezice B_1 şi B_2, precum şi lungimea arcului de meridian s_{1-2}, rezultă o posibilitate de determinare a parametrilor elipsoidului de referinţă, a şi e^2, ca necunoscute în ecuaţia (6-27). Dacă se dispune de mai mult de două măsurători de arce de meridian şi respectiv de determinările de latitudini la capetele arcelor, se poate efectua o rezolvare prin metoda celor mai mici pătrate. Această metodă, descrisă doar principial aici, a fost întrebuinţată în trecut ca metodă de bază în determinările dimensiunilor diferiţilor elipsoizi de referinţă.

2. *Pentru unele calcule aproximative se pot deduce din relaţia* (6-30) *valorile aproximative ale arcelor de meridian de* 1°; 1′; 1″ *pentru gradaţia sexagesimală şi respectiv* 1^g; 1^c; 1^{cc} *pentru gradaţia centezimală*:

$$\text{arc } 1^\circ \approx 111 \text{ km}; \qquad \text{arc } 1^g \approx 100 \text{ km};$$
$$\text{arc } 1' \approx 1852 \text{ m}; \qquad \text{arc } 1^c \approx 1000 \text{ m}; \qquad (6\text{-}31)$$
$$\text{arc } 1'' \approx 31 \text{ m}; \qquad \text{arc } 1^{cc} \approx 10 \text{ m}.$$

3. *În realitate, lungimea arcului de meridian de* 1° *este funcţie de latitudinea B la care se află punctul considerat, înregistrîndu-se o creştere de la ecuator spre pol, la fel ca şi pentru raza de curbură a elipsei meridiane M*:

$$(\text{arc } 1^\circ)_{0^\circ} \approx 110\,576{,}3 \text{ m}; \quad (\text{arc } 1^\circ)_{90^\circ} \approx 111\,695{,}8 \text{ m}. \qquad (6\text{-}32)$$

4. *Elementul de arc de meridian se determină cu relaţia*:

$$ds_m = M dB. \qquad (6\text{-}33)$$

6.2.3. RAZA DE CURBURĂ A PARALELULUI

Raza de curbură a paralelului este egală cu coordonata x din figura 6-1:

$$r = x = \frac{a \cos B}{W} = \frac{c \cos B}{V}, \qquad (6\text{-}34)$$

avînd o variaţie, în funcţie de latitudinea geodezică, de la ecuator spre pol:

$$r_{0^\circ} = a; \qquad r_{90^\circ} = 0. \qquad (6\text{-}35)$$

Mărimea razei de curbură a paralelului poate fi determinată cu ajutorul tabelelor în funcţie de valoarea efectiv tabelată: r arc 1′ (tabelul 6-3) ştiut fiind că:

$$\rho' = 1/\text{arc } 1' = 3\,437{,}746\,770\,784\,939.$$

6.2.4. LUNGIMEA ARCULUI DE PARALEL

Fie două puncte S_1 şi S_2, situate pe paralelul de rază r (latitudinea B) la longitudinile L_1 şi respectiv $L_2 = L_1 + dL$. Lungimea arcului de paralel ds_p, dintre cele două puncte va fi:

$$ds_p = r\, dL. \qquad (6\text{-}36)$$

Expresia de mai înainte poate fi integrată imediat deoarece $r = \text{const}$ pentru un paralel dat:

$$s_p = r(L_2 - L_1)' \text{ arc } 1'. \qquad (6\text{-}37)$$

Aşa după cum s-a mai menţionat, din tabele se poate extrage, prin interpolare, mărimea r arc 1′, astfel încît lungimea arcului de paralel se poate determina cu suficientă uşurinţă.

6.2.5. AZIMUTUL GEODEZIC AL UNEI CURBE SITUATE PE ELIPSOIDUL DE REFERINŢĂ

Una din mărimile frecvent folosite *azimutul geodezic* A al unei curbe c este unghiul format de elementul de arc ds al acesteia cu direcţia pozitivă a liniei de coordonate $L = \text{const}$ (fig. 6-3). Pentru deducerea unei expresii de calcul al azimutului se poate porni de la relaţia generală:

$$\cos A = \alpha\alpha_L + \beta\beta_L + \gamma\gamma_L, \qquad (6\text{-}38)$$

în care α, β, γ sînt cosinuşii directori ai tangentei la curba c:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial B}\frac{dB}{ds} + \frac{\partial x}{\partial L}\frac{dL}{ds};$$
$$\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial B}\frac{dB}{ds} + \frac{\partial y}{\partial L}\frac{dL}{ds}; \qquad (6\text{-}39)$$
$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial B}\frac{dB}{ds} + \frac{\partial z}{\partial L}\frac{dL}{ds},$$

iar α_L, β_L, γ_L sînt cosinuşii directori ai tangentei la linia de coordonate $L = \text{const}$.

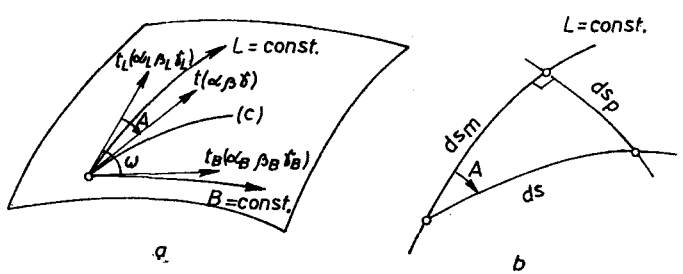


Fig. 6-3. Azimutul geodezic al unei curbe situate pe elipsoidul de referinţă.

Elementul de arc ds al unei curbe pe o suprafață oarecare poate fi exprimat sub forma:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \tag{6-40}$$

unde:

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial B}dB + \frac{\partial X}{\partial L}dL; \\ dY &= \frac{\partial Y}{\partial B}dB + \frac{\partial Y}{\partial L}dL; \\ dZ &= \frac{\partial Z}{\partial B}dB + \frac{\partial Z}{\partial L}dL. \end{aligned} \tag{6-41}$$

În acest fel rezultă:

$$ds^2 = E dB^2 + 2F\, dB\, dL + G\, dL^2, \tag{6-42}$$

expresie cunoscută sub denumirea de *prima formă fundamentală pătratică*, unde:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)^2; \\ F &= \left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial L}\right); \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial L}\right)^2. \end{aligned} \tag{6-43}$$

Expresiile de calcul al coeficienților E, F, G pot fi prezentate și mai concentrat prin utilizarea notațiilor *Gauss*:

$$\begin{aligned} E &= \sum\left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)^2; \\ F &= \sum\left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right); \\ G &= \sum\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)^2. \end{aligned} \tag{6-44}$$

În cazul elipsoidului de rotație, derivatele parțiale care intervin în ecuațiile de definiție (6-43) se obțin din relațiile (6-17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial B} &= -\frac{a\cos L \sin B\,(1-e^2)}{W^{3/2}}; & \frac{\partial X}{\partial L} &= -\frac{a\cos B \sin L}{W}; \\ \frac{\partial Y}{\partial B} &= -\frac{a\sin L \sin B\,(1-e^2)}{W^{3/2}}; & \frac{\partial Y}{\partial L} &= \frac{a\cos B\cos L}{W}; \\ \frac{\partial Z}{\partial B} &= \frac{a\,(1-e^2)\cos B}{W^{3/2}}; & \frac{\partial Z}{\partial L} &= 0, \end{aligned} \tag{6-45}$$

rezultînd următoarele posibilități de exprimare a coeficienților E, F, G:

$$E = \frac{a^2(1-e^2)^2}{W^3} = M^2; \quad F = 0; \quad G = \frac{a^2\cos^2 B}{W^2} = r^2. \tag{6-46}$$

Observație. Ecuația $F = 0$ este valabilă în caz general, pe orice suprafață, atunci cînd sistemul de coordonate este ortogonal.

Cosinușii directori ai tangentei la linia de coordonate $L = \text{const}$ pot fi deduși din relația (6-42) prin introducerea condițiilor:

$$dL = 0 \text{ și } ds \equiv ds_m:$$

$$ds_m^2 = E\, dB^2, \tag{6-47}$$

rezultînd:

$$\alpha_L = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial B}; \qquad \beta_L = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Y}{\partial B}; \qquad \gamma_L = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Z}{\partial B}. \tag{6-48}$$

Se dispune astfel de toate elementele necesare calculării azimutului curbei c, cu relația (6-38), pe elipsoidul de rotație:

$$\cos A = \frac{\sqrt{E}\, dB}{ds}; \tag{6-49}$$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{\sqrt{G}\, dL}{ds}; \tag{6-50}$$

$$\operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dL}{dB}. \tag{6-51}$$

Ținînd seama de relațiile (6-46) care exprimă mărimea coeficienților E și G pe elipsoidul de rotație se obține:

$$\cos A = M\frac{dB}{ds}; \qquad \sin A = r\frac{dL}{ds}, \tag{6-52}$$

și împreună cu (6-33), (6-36):

$$\cos A = \frac{ds_m}{ds}; \qquad \sin A = \frac{ds_p}{ds}. \tag{6-53}$$

Ultimele relații sugerează posibilitatea aplicării relațiilor trigonometriei plane în triunghiul infinitesimal situat pe suprafața elipsoidului de rotație (fig. 6—3, *b*).

Pentru calcule ulterioare se deduc:

$$\operatorname{tg} A = \frac{r}{M}\frac{dL}{dB}; \tag{6-54}$$

$$\frac{dL}{dB} = \frac{M}{r}\operatorname{tg} A. \tag{6-55}$$

6.2.6. ELEMENTUL DE ARIE PE SUPRAFAȚA ELIPSOIDULUI DE REFERINȚĂ

Elementul de arie dS al suprafeței cuprinse între două meridiane situate la o diferență de longitudine dL, și respectiv între două paralele, situate la o diferență de latitudine dB, poate fi exprimat astfel:

$$dS = ds_m\, ds_p = \sqrt{EG}\, dB\, dL = Mr\, dB\, dL. \tag{6-56}$$

Pentru calcule practice se particularizează formula (6-56) considerîndu-se $dL = 1'$. Se determină astfel aria suprafeței cuprinse între ecuator și paralelul punctului considerat, de latitudine B, pe intervalul de longitudine de $1'$:

$$\Delta S_{\Delta L = 1'} = \text{arc } 1'\, a^2(1-e^2)\int_0^B \frac{\cos B}{W^{5/2}}\, dB. \tag{6-57}$$

Analog ca în cazurile precedente, această expresie poate fi dezvoltată în serie, rezultînd:

$$\Delta S_{\Delta L=1'} = A^* \sin B - B^* \sin 3B + C^* \sin 5B - D^* \sin 7B + \ldots . \qquad (6\text{-}58)$$

Dacă se consideră parametrii elipsoidului de referință *Krasovski* rezultă următoarea formulă de calcul a ariei elementare, în km²:

$$\Delta S_{\Delta L=1'} = 11\,794{,}24\,561 \sin B - 13{,}21261 \sin 3B + \\ + 0{,}01997 \sin 5B - 0{,}00003 \sin 7B, \qquad (6\text{-}59)$$

mărime ce poate fi extrasă din tabele în funcție de latitudinea geodezică B (tabelul 6-3).

Aria S a suprafeței cuprinsă între paralelele de latitudini B_i, B_j și meridianele de longitudini L_m, L_n poate fi determinată cu ajutorul mărimilor extrase din tabele prin utilizarea următoarei formule de calcul:

$$S = [\Delta S\,(B_j) - \Delta S\,(B_i)]\,(L_m - L_n)'. \qquad (6\text{-}60)$$

6.3. SECȚIUNI NORMALE

Intersecția dintre un plan normal [un plan care conține normala la elipsoid într-un punct $S\,(X,Y,Z)$] cu suprafața elipsoidului se numește *secțiune normală* (fig. 6-4, *a*). Pentru studierea secțiunilor normale este necesară utilizarea unor noțiuni din geometria diferențială. Se consideră o suprafață F oarecare, presupunînd, de asemenea, curba c o *curbă strîmbă* (curbă care nu se află în nici un plan). Evident, secțiunea normală nu este o curbă strîmbă.

În punctul S amplasat pe suprafața normală se pot construi (fig. 6-4, *a*):
— normala la suprafață $n_s\,(X', Y', Z')$;
— normala principală la curbă $n_c\,(\xi, \eta, \zeta)$;
— tangenta la curbă $t\,(\alpha, \beta, \gamma)$;
— binormala la curbă $b\,(\lambda, \mu, \nu)$.

Planul osculator este format de (t, n), *planul normal la curbă* este format de (n, b) și *planul rectifiant* de (t, b). Cele trei plane menționate determină *triedrul mobil* sau *triedrul fundamental*.

În calculele care urmează este necesară utilizarea *formulelor Frênet*, cunoscute de la cursul de *analiză matematică*:

$$\alpha = \frac{dX}{ds}; \qquad \beta = \frac{dY}{ds}; \qquad \gamma = \frac{dZ}{ds}; \qquad (6\text{-}61)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho}; \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\rho}; \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\rho}; \qquad (6\text{-}62)$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau}; \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{\tau}; \qquad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{\tau}. \qquad (6\text{-}63)$$

Raza de curbură ρ și raza de torsiune τ ale curbei c se definesc prin relațiile:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}; \qquad \frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varepsilon'}{\Delta s}, \qquad (6\text{-}64)$$

unde $\Delta\varepsilon$ este unghiul format de două tangente infinit apropiate, iar $\Delta\varepsilon'$ — unghiul format de două plane osculatoare infinit apropiate.

Condiția de ortogonalitate dintre N și t poate fi scrisă sub forma:

$$\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0,$$

sau mai concentrat:

$$\sum \alpha X' = 0. \qquad (6\text{-}65)$$

Derivînd, rezultă expresia:

$$\sum \frac{d\alpha}{ds} X' + \sum \alpha \frac{dX'}{ds} = 0,$$

care poate fi transformată cu primele formule *Frênet*:

$$\frac{1}{ds^2} \sum dX\, dX' + \frac{1}{\rho} \sum X'\, \xi = 0.$$

Deoarece:

$$\sum X'\, \xi = \cos\psi,$$

rezultă:

$$\frac{1}{\rho} \cos\psi = -\frac{1}{ds^2} \sum dX\, dX', \qquad (6\text{-}66)$$

unghiul ψ fiind unghiul dintre normalele n_s și n_c (v. fig. 6-4, *a*).

Deoarece:

$$X = X\,(B, L); \qquad X' = X'\,(B, L);$$
$$Y = Y\,(B, L); \qquad Y' = Y'\,(B, L);$$
$$Z = Z\,(B, L); \qquad Z' = Z'\,(B, L),$$

se obțin alături de (6-41) și următoarele expresii:

$$dX' = \frac{\partial X'}{\partial B} dB + \frac{\partial X'}{\partial L} dL;$$
$$dY' = \frac{\partial Y'}{\partial B} dB + \frac{\partial Y'}{\partial L} dL; \qquad (6\text{-}67)$$
$$dZ' = \frac{\partial Z'}{\partial B} dB + \frac{\partial Z'}{\partial L} dL.$$

Cu acestea, relația (6-66) devine:

$$\frac{1}{\rho} \cos\psi = \frac{D\, dB^2 + 2\, D'\, dB\, dL + D''\, dL^2}{E\, dB^2 + 2\, F\, dB\, dL + G\, dL^2}, \qquad (6\text{-}68)$$

unde noii coeficienți sînt:

$$D = -\sum \frac{\partial X}{\partial B} \frac{\partial X'}{\partial B};$$
$$D' = -\sum \frac{\partial X}{\partial B} \frac{\partial X'}{\partial L} = -\sum \frac{\partial X}{\partial L} \frac{\partial X'}{\partial B}; \qquad (6\text{-}69)$$
$$D'' = -\sum \frac{\partial X}{\partial L} \frac{\partial X'}{\partial L}.$$

Expresia:

$$D\,dB^2 + 2D'\,dB dL + D''dL^2 \tag{6-70}$$

se numeşte cea de *a doua formă fundamentală pătratică.*

Pentru a calcula coeficientul D'' pentru elipsoidul de rotaţie, din figura 6-1, *a* se deduc cu uşurinţă cosinuşii directori ai normalei la suprafaţă:

$$\begin{aligned} X' &= -\cos B \cos L; \\ Y' &= -\cos B \sin L; \\ Z' &= -\sin B, \end{aligned} \tag{6-71}$$

astfel încît se pot calcula derivatele parţiale corespondente, care intervin în expresia coeficientului D'':

$$\frac{\partial X'}{\partial L} = \cos B \cos L; \qquad \frac{\partial Y'}{\partial L} = \cos B \cos L; \qquad \frac{\partial Z'}{\partial L} = 0. \tag{6-72}$$

Relaţiile (6-72) şi (6-45) dau posibilitatea calculării coeficientului D'':

$$D'' = -\sum \frac{\partial X}{\partial L}\,\frac{\partial X'}{\partial L} = \frac{a\cos^2 B}{W} = \gamma \cos B. \tag{6-73}$$

În mod analog se obţine:

$$D = M; \qquad D' = 0. \tag{6-74}$$

Curbura unei secţiuni normale ρ_n, în punctul S situat pe suprafaţa oarecare F, se poate obţine din relaţia (6-68) sub condiţia $\psi = 0°$ (secţiunea normală fiind o curbă plană, normalele n_s şi n_c coincid):

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{D\,dB^2 + 2\,D'\,dB\,dL + D''\,dL^2}{E\,dB^2 + 2\,F\,dB\,dL + G\,dL^2}. \tag{6-75}$$

Coeficienţii E, F, G şi respectiv D, D', D'' sînt funcţii de parametrii de definiţie ai suprafeţei F, precum şi de poziţia punctului S. Prin urmare, aceşti coeficienţi au valori bine determinate în punctul S considerat, astfel încît din compararea relaţiilor (6-68) şi (6-75) se obţin:

$$\rho = \rho_n \cos \psi, \tag{6-76}$$

relaţie care reprezintă *teorema lui Meusnier*. De remarcat că secţiunea oarecare considerată, cît şi secţiunea normală au aceeaşi tangentă în punctul S.

Mărimea $1/\rho_g$:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\rho}\sin\psi, \tag{6-77}$$

se numeşte *curbură geodezică.*

Revenind la figura 6-1, se poate aplica teorema *Meusnier* în punctul S, deoarece atît secţiunea normală perpendiculară pe secţiunea meridiană (denumită *secţiunea primului vertical*), cît şi secţiunea înclinată, a paralelului

punctului S, au aceeaşi tangentă. Se obţine astfel legătura dintre raza de curbură a primului vertical, notată N, şi raza de curbură a paralelului r:

$$r = N\cos B. \tag{6-78}$$

Prin urmare:

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}. \tag{6-79}$$

Se observă că raza de curbură a primului vertical are o variaţie de la ecuator spre pol:

$$N_{0°} = a; \qquad N_{90°} = \frac{a}{(1-e^2)^{1/2}} = c, \tag{6-80}$$

valorile exacte putînd fi extrase din tabele, în funcţie de latitudinea geodezică B a punctului considerat (tabelul 6-4).

Tabelul 6—4

B	N [m]	d [m]	R [m]	d [m]
46°		+		+
0′	6 389 319,331	6,238	6 378 956,594	12,456
1′	6 389 325,569		6 378 969,050	

Raportul dintre razele de curbură ale secţiunilor normale principale fiind:

$$N/M = V^2 = 1 + \eta^2, \tag{6-81}$$

rezultă: $N \geqslant M$, motiv pentru care raza de curbură a primului vertical se mai numeşte şi *marea normală.*

Pentru simplificarea scrierii unor expresii mai complexe se folosesc şi următoarele simboluri:

$$\rho^{cc}/M = [1]; \qquad \rho^{cc}/N = [2]. \tag{6-82}$$

O b s e r v a ţ i e. Geometric, marea normală este reprezentată de segmentul *Ss* (figura 6-4, *b*). Pentru a avea o imagine asupra raporturilor care există între M, N şi ρ_n, în figura 6-4, *b* s-au reprezentat aproximativ, în scop ilustrativ, toate aceste trei mărimi. Pentru a reprezenta riguros mărimea razei de curbură a elipsei meridiane, în punctul S, este necesar să se construiască *desfăşurata* sau *evoluta elipsei* (figura 6-4, *c*). Razele de curbură, în oricare din punctele elipsei meridiane sînt tangente, în interior, la evoluta elipsei, determinînd în acest mod centrele de curbură respective.

Ecuaţia evolutei elipsei este:

$$(ax)^{2/3} + (bz)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}, \tag{6-83}$$

curba fiind tangentă, în exterior, la cercul de rază $a - b$. La elipsele cu turtire mică, evoluta este foarte subţire; la limită, în cazul cercului, evoluta degenerează în centrul acestuia.

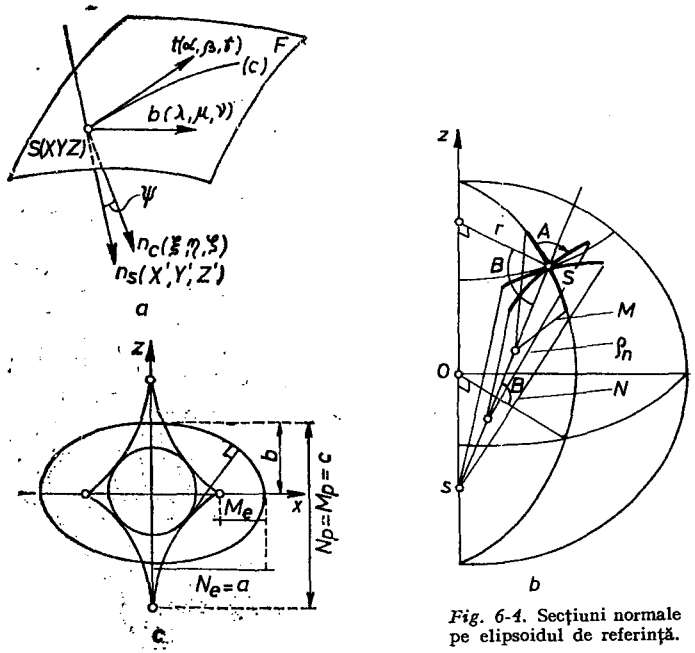


Fig. 6-4. Secțiuni normale pe elipsoidul de referință.

6.3.1. RAZA DE CURBURĂ A UNEI SECȚIUNI NORMALE ÎN FUNCȚIE DE AZIMUT

Pe elipsoidul de rotație, unde $F=D=0$, relația (6-75) devine:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{D\,dB^2 + D''\,dL^2}{ds^2}, \tag{6-84}$$

sau:

$$\frac{1}{\rho_n} = M\left(\frac{dB}{ds}\right)^2 + r\cos B\left(\frac{dL}{ds}\right)^2. \tag{6-85}$$

Deoarece:

$$dB = \frac{ds_m}{M}; \qquad dL = \frac{ds_p}{r},$$

Se obține:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{M}\left(\frac{ds_m}{ds}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{ds_p}{ds}\right).$$

Considerînd și relațiile (6-53) se obține *formula Euler*:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \tag{6-86}$$

în care mărimea curburii unei secțiuni normale este exprimată funcție de azimutul său și, în cazul elipsoidului de rotație, de curburile secțiunii meridianului și respectiv primului vertical. Din infinitatea secțiunilor normale care trec prin punctul S, două au razele de curbură minimă și respectiv maximă, fiind denumite *secțiuni normale principale*, iar razele lor de curbură *raze principale de curbură*.

Pozițiile secțiunilor normale principale pot fi deduse din relația (6-85) prin deducerea condițiilor de minim (maxim):

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \sin 2A\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right) = 0. \tag{6-87}$$

Valorile extreme se obțin prin urmare pentru:

— $A = 0^g$ — secțiunea meridiană;

— $A = 100^g$ — secțiunea primului vertical,

care sînt secțiunile normale principale în cazul elipsoidului de rotație de referință. Rezultă că aceste secțiuni sînt perpendiculare între ele. Din ecuația (6-87) mai rezultă o soluție pentru maxim (minim) și anume $M = N$, situație întîlnită pentru $B = 90°$, adică la pol. În concluzie:

$$M \leqslant \rho_n \leqslant N. \tag{6-88}$$

6.3.2. RAZA MEDIE DE CURBURĂ (RAZA MEDIE GAUSS)

Raza de curbură a unei secțiuni normale oarecare, de azimut A, situată pe suprafața elipsoidului de rotație, rezultă dintr-o transformare simplă a relației (6-86):

$$\rho_n = \rho_A = \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}. \tag{6-89}$$

Media aritmetică a razelor de curbură ale secțiunilor normale care trec printr-un punct situat pe elipsoid, atunci cînd numărul acestor secțiuni tinde către infinit, se numește *rază medie de curbură* sau *rază medie Gauss*, notată R:

$$R = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{\dfrac{NM}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}}{\dfrac{2\pi}{\Delta A}}. \tag{6-90}$$

Expresia (6-90) poate fi înlocuită prin:

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}\,dA = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\dfrac{M}{N}}\dfrac{1}{\cos^2 A}}{1+\left(\sqrt{\dfrac{M}{N}}\operatorname{tg} A\right)^2}\,dA. \tag{6-91}$$

Dacă se introduce schimbarea de variabile:

$$\sqrt{\frac{M}{N}}\operatorname{tg} A = t,$$

și ca urmare:

$$\sqrt{\frac{M}{N}}\frac{1}{\cos^2 A}\,dA = dt,$$

cu corespondența dintre limitele celor două variabile A și respectiv t:

$$A = 0; \qquad t = 0;$$

$$A = \frac{\pi}{2}; \qquad t = \infty,$$

expresia (6-91) poate fi scrisă și sub forma:

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Prin integrare rezultă în continuare:

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\operatorname{arc\ tg}\ t\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sqrt{MN}. \qquad (6\text{-}92)$$

Considerînd relațiile (6-23) și (6-79) rezultă:

$$R = \frac{a(1-e^2)^{1/2}}{W^2} = \frac{c}{V^2}. \qquad (6\text{-}93)$$

Raza medie de curbură variază cu latitudinea geodezică B:

$$R_{0^\circ} = b; \quad R_{90^\circ} = \frac{a}{(1-e^2)^{1/2}} = c, \qquad (6\text{-}94)$$

putînd fi extrasă din tabele în funcție de aceasta (tabelul 6-4).

Expresia:

$$K = \frac{1}{MN} = \frac{1}{R^2} = \frac{1+\eta^2}{N^2}, \qquad (6\text{-}95)$$

este denumită *curbură totală* sau *curbură Gauss*, iar expresia:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{M+N}{2R^2} \qquad (6\text{-}96)$$

curbură medie.

Relația (6-86) poate fi scrisă și sub forma:

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{MN}(N\cos^2 A + M\sin^2 A) = \frac{1}{R^2}(N\cos^2 A + M\sin^2 A),$$

care se poate transforma în funcție de formulele (6-92), (6-23) și (6-79):

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{R^2}\,\frac{a(1-e^2)^{1/2}}{W^2}\left[\frac{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2}}\cos^2 A + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}}\sin^2 B\right].$$

Considerînd expresia (6-93) se poate scrie în continuare:

$$R = \rho_A(1-e^2)^{-1/2}(1-e^2\sin^2 B)^{-1/2}[(1-e^2\sin^2 B)\cos^2 A + (1-e^2)\sin^2 A].$$

Dezvoltînd această relație în serie în ipoteza neglijării termenilor de ord. II (în e^4) rezultă:

$$R = \rho_A\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2 B + \ldots\right)(\cos^2 A - e^2\cos^2 A\sin^2 B + \sin^2 A - e^2\sin^2 A).$$

În aproximația acceptată rezultă în continuare:

$$R = \rho_A\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2\sin^2 B + \ldots\right)(1 - e^2\cos^2 A\cos^2 B - e^2\sin^2 A) =$$

$$= \rho_A\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2\sin^2 B - e^2 + e^2\cos^2 A\cos^2 B + \ldots\right) =$$

$$= \rho_A\left(1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2 B + e^2\cos^2 A\cos^2 B + \ldots\right) =$$

$$= \rho_A\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B\cos 2A + \ldots\right). \qquad (6\text{-}97)$$

Prin inversare rezultă în aceeași aproximație:

$$\rho_A = R\left(1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2 B\cos 2A + \ldots\right). \qquad (6\text{-}98)$$

6.3.3. SECȚIUNI NORMALE RECIPROCE

Fie punctele S_1 și S_2 situate pe elipsoid (fig. 6-5, *a*) la altitudini și longitudini diferite ($B_1 \neq B_2$; $L_1 \neq L_2$). Planele determinate de normalele la elipsoid în punctele S_1 și S_2 și, respectiv, punctele S_2 și S_1, vor intersecta elipsoidul după curbele *a* și *b* denumite *secțiuni normale reciproce*. Secțiunea *a* este denumită, de asemenea, *secțiune normală directă* în raport cu punctul S_1 și *secțiune normală inversă* în raport cu punctul S_2. Denumiri analoge are și secțiunea *b*.

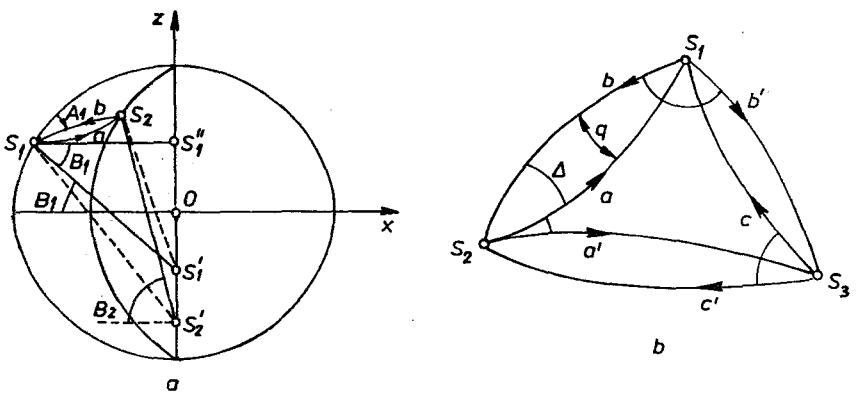


Fig. 6-5. Secțiuni normale reciproce.

Se observă că (fig. 6-5, *a*) în cazul în care cele două puncte S_1 și S_2 se află pe același paralel ($B_1 = B_2$) sau pe același meridian ($L_1 = L_2$) secțiunile normale reciproce coincid.

Referitor la noțiunea de secțiune normală, se poate imagina și o legătură cu lucrările practice geodezice. Dacă se acceptă că axa principală a unui teodolit, instalat în punctul S_1, este orientată după normala la elipsoid, atunci planul de viză spre punctul S_2 (determinat de axa principală a teodolitului și punctul vizat) va intersecta elipsoidul după secțiunea normală directă *a*. În consecință, observațiile efectuate într-un triunghi geodezic $S_1S_2S_3$ (fig. 6-5, *b*) vor fi reprezentate prin cele șase secțiuni corespondente. Unghiurile care se formează între secțiunile normale directe nu sînt însă situate în interiorul unei figuri continue și închise. Rezultă astfel necesitatea ca observațiile geodezice să fie prelucrate (v. cap. 20) înainte de a fi folosite în calculele ulterioare.

Pentru unele calcule, care se vor efectua în continuare, este util să se determine mărimea segmentului $\overline{S_1'S_2'}$. Pentru aceasta se observă că:

$$\overline{OS_1'} = \overline{S_1''S_1'} - \overline{S_1''O} = N_1 \sin B_1 - z_1 =$$

$$= \frac{a}{W_1} \sin B_1 - \frac{a\,(1 - e^2) \sin B_1}{W_1} = e^2 N_1 \sin B_1. \qquad (6\text{-}99)$$

Analog:

$$\overline{OS_2'} = e^2 N_2 \sin B_2, \qquad (6\text{-}100)$$

astfel încît:

$$\overline{S_1'S_2'} = \overline{OS_2'} - \overline{OS_1'} = e^2 c \left(\frac{\sin B_2}{V_2} - \frac{\sin B_1}{V_1}\right). \qquad (6\text{-}101)$$

Observație. Indicii inferiori 1, 2 sau *m* la mărimile *N*, *V*, η etc. indică faptul că acestea se calculează în funcție de latitudinile geodezice B_1, B_2 sau de latitudinea medie B_m.

Acceptînd aproximația în termeni de ord. I, se obține:

$$\overline{OS_1'} \approx ae^2 \sin B_1; \qquad \overline{OS_2'} \approx ae^2 \sin B_2. \qquad (6\text{-}102)$$

Deoarece s-a presupus $B_2 > B_1$, rezultă:

$$\overline{OS_2'} > \overline{OS_1'},$$

ceea ce am folosit, de fapt, pînă acum în figurile 6-5, *a* și 6-2.

În aproximația menționată se poate calcula în continuare:

$$\overline{S_1'S_2'} \approx ae^2 (\sin B_2 - \sin B_1) = 2\,a^2 \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos \frac{B_2 + B_1}{2}. \qquad (6\text{-}103)$$

Pentru arce $\widehat{S_1S_2}$ întîlnite curent în lucrările geodezice se poate aproxima în aceleași limite:

$$\sin \frac{B_2 - B_1}{2} \approx \frac{(B_2 - B_1)^{\text{rad}}}{2},$$

astfel încît relația (6-103) devine:

$$\overline{S_1'S_2'} \approx ae^2 (B_2 - B_1)^{\text{rad}} \cos B_m. \qquad (6\text{-}104)$$

Unghiul Δ dintre secțiunile normale reciproce, precum și depărtarea maximă *q* dintre acestea (fig. 6-5, *b*) se pot calcula cu următoarele formule (*Jordan* 1958, *Bagratuni* 1962 ș.a.):

$$\Delta^{cc} = \rho^{cc} \frac{s_1^2 \eta_m^2}{4\,N_m^2} \sin 2\,A_1; \qquad (6\text{-}105)$$

$$q = \frac{\eta_m^2 s_1^3}{16\,N_m^2} \sin 2\,A_1. \qquad (6\text{-}106)$$

Din ultimele formule rezultă și justificarea analitică a constatărilor făcute la începutul 6.3.4.: pentru $A_1 = 0^g$ și respectiv $A_1 = 100^g$, $\Delta = q = 0$. Valorile maxime pentru Δ și *q* se înregistrează cînd $A_1 = 50^g$, însă și în asemenea caz acestea sînt foarte mici. De exemplu, cînd $B_m = 46°$ și $A_1 = 50^g$ se obține pentru $s_1 = 30$ km : $\Delta = 0^{cc},011$ și $q = 0{,}1$ mm, iar pentru $s_1 = 100$ km : $\Delta = 0^{cc},127$ și $q = 5{,}0$ mm.

6.4. LINIA GEODEZICĂ

6.4.1. DEFINIȚIE, PROPRIETĂȚI

Curba astfel construită încît în fiecare din punctele sale, planul osculator să conțină normala n_s la suprafață, se numește *linie geodezică*. Planul osculator fiind format de tangenta *t* și normala principală n_c la curbă (v. fig. 6-4, *a*), rezultă că în oricare din punctele liniei geodezice normala la suprafață coincide cu normala principală la curbă și, în consecință, curbura geodezică $1/\rho_g$ este nulă ($\psi = 0$).

Meridianele și ecuatorul, de pe elipsoidul de rotație, și de pe sferă toate cercurile mari, sînt linii geodezice. Această calitate nu o au cercurile paralel, care nu conțin niciodată normala la suprafață. În planul de proiecție liniile geodezice sînt linii drepte. Trebuie atras atenția că liniile geodezice nu au un echivalent în cadrul operațiilor geodezice de teren, ci intervin doar în procesele de calcul.

Între două puncte S_1 și S_2 situate pe suprafața elipsoidului de referință se poate duce numai o singură linie geodezică. Poziția sa față de secțiunile normale se poate urmări în figura 6-6, *b* și va fi examinată mai amănunțit

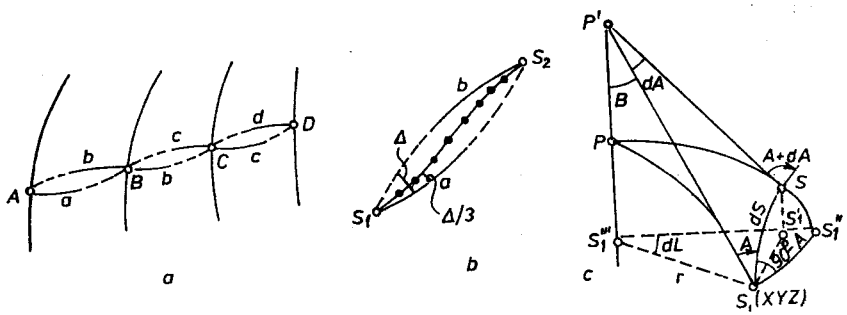


Fig. 6-6. Linia geodezică.

în 6.4.4. În acest mod, chiar în cazul unor vize foarte lungi, prin trecere de la secțiunile normale la liniile geodezice corespondente se va dispune de figuri continue și închise, spre deosebire de situația prezentată în figura 6-5, *b*.

Linia geodezică este curba de lungime minimă care se poate duce prin două puncte situate pe suprafața elipsoidului de referință. Într-adevăr, deoarece normalele n_c și n_s coincid în ambele puncte considerate, iar $\psi = 0$, razele de curbură ale liniei geodezice calculate în aceste puncte [de exemplu cu formula *Meusnier* (6-76)] vor lua valorile maxime posibile.

6.4.2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ȘI ÎN TERMENI FINIȚI ALE LINIEI GEODEZICE

Fie o suprafață F oarecare, definită sub formă implicită:

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

iar linia geodezică definită sub formă parametrică:

$$X = X(s); \quad Y = Y(s); \quad Z = Z(s),$$

în funcție de lungimea arcului s, într-un punct curent de coordonate X, Y, Z. În acest punct, ecuația normalei la suprafață este:

$$\frac{a - X}{\frac{\partial F}{\partial X}} = \frac{b - Y}{\frac{\partial F}{\partial Y}} = \frac{c - Z}{\frac{\partial F}{\partial Z}},$$

unde cu a, b, c s-au notat coordonatele unui punct situat pe această normală. Deoarece normala la suprafață coincide, în cazul liniilor geodezice, cu normala principală la curbă, de ecuație:

$$\frac{a - X}{\frac{d^2X}{ds^2}} = \frac{b - Y}{\frac{d^2Y}{ds^2}} = \frac{c - Z}{\frac{d^2Z}{ds^2}},$$

rezultă următoarele ecuații diferențiale ale liniilor geodezice pe suprafața oarecare F:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial X}}{\frac{d^2X}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{\frac{d^2Y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial Z}}{\frac{d^2Z}{ds^2}}. \tag{6-107}$$

În cazul elipsoidului de referință, definit de ecuația (6-1) scrisă sub forma:

$$X^2 + Y^2 + f(Z) = 0,$$

se obține:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 2X; \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y; \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = f'(Z), \tag{6-108}$$

astfel încît *ecuațiile diferențiale ale liniilor geodezice* vor fi:

$$\frac{\frac{2X}{d^2X}}{ds^2} = \frac{\frac{2Y}{d^2Y}}{ds^2} = \frac{f'(Z)}{\frac{d^2Z}{ds^2}}. \tag{6-109}$$

De aici rezultă:

$$Y\frac{d^2X}{ds^2} - X\frac{d^2Y}{ds^2} = 0$$

și prin integrare:

$$YdX - XdY = Cds, \tag{6-110}$$

unde C este o constantă de integrare.

Fie elementul de linie geodezică ds cuprins între punctele $S_1(X, Y, Z)$ și $S_2(X + dX; Y + dY; Z + dZ)$ din figura 6-6, *c*, de azimut geodezic A. În triunghiul $P'S_1''S_1$ se poate scrie:

$$P'S_1 = \frac{r}{\sin B}. \tag{6-111}$$

Elementul de arc $\widehat{S_1S_1''}$ poate fi exprimat în două moduri:

$$\widehat{S_1S_1''} = rdL = P'S_1\,dA,$$

din care se deduce, și prin considerarea formulei (6-111), *relația diferențială Clairaut a liniei geodezice*:

$$dA = dL \sin B. \tag{6-112}$$

Revenind la formulele cunoscute:

$$\frac{dx}{dB} = \frac{dr}{dB} = -\frac{a(1 - e^2)\sin B}{W^3} = -M \sin B;$$
$$\frac{dL}{dB} = \frac{M}{r} \operatorname{tg} A, \tag{6-21}$$

se poate transforma relația (6-112) după cum urmează:

$$dA = \sin B \frac{M}{r} \operatorname{tg} A\, dB;$$

$$dA = -\frac{dr}{r} \operatorname{tg} A;$$

$$\frac{\cos A}{\sin A}\, dA + \frac{dr}{r} = 0.$$

Prin integrare rezultă:

$$\ln \sin A + \ln r = \ln c,$$

adică:

$$r \sin A = \text{constant}, \tag{6-113}$$

care reprezintă *ecuația în termeni finiți a liniei geodezice* (*teorema lui Clairaut* 1735).

6.4.3. ECUAȚIILE PARAMETRICE PUISEAUX-WEINGARTEN-GAUSS ALE LINIEI GEODEZICE PE ELIPSOIDUL DE REFERINȚĂ

Pentru deducerea ecuațiilor parametrice ale liniei geodezice pe elipsoidul de referință:

$$X = X(s) = Y_0 + \frac{s}{1!}\left(\frac{dX}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right)_0 + \frac{s_3}{3!}\left(\frac{d^3X}{ds^3}\right)_0 + \ldots;$$

$$Y = Y(s) = Y_0 + \frac{s}{1!}\left(\frac{dY}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3Y}{ds^3}\right)_0 + \ldots; \quad (6\text{-}114)$$

$$Z = Z(s) = Z_0 + \frac{s}{1!}\left(\frac{dZ}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2Z}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3Z}{ds^3}\right)_0 + \ldots,$$

se va folosi sistemul *Euler* (fig. 6-7) construit în modul următor: axele X și Y sînt reprezentate de tangentele la liniile principale de curbură, iar axa Z este orientată spre interiorul suprafeței, după normala la elipsoidul de referință. În plus, originea sistemului are coordonatele:

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0. \quad (6\text{-}115)$$

Calculul derivatelor necesare în formulele (6-114) se realizează prin particularizarea formulelor *Frênet* (6-61) — (6-63) la situația de față:

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)_0 = \alpha_0 = \cos A; \quad \left(\frac{dY}{ds}\right)_0 = \beta_0 = \sin A; \quad \left(\frac{dZ}{ds}\right)_0 = \gamma_0 = 0; \quad (6\text{-}116)$$

$$\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right)_0 = \left(\frac{\xi}{\rho}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)_0 = \left(\frac{\eta}{\rho}\right)_0 = 0;$$
$$\left(\frac{d^2Z}{ds^2}\right)_0 = \left(\frac{\zeta}{\rho}\right)_0 = \frac{1}{\rho_A}; \quad (6\text{-}117)$$

$$\left(\frac{d^3X}{ds^3}\right)_0 = -\left(\frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho\tau} + \frac{\xi}{\rho^2}\frac{dR}{ds}\right)_0 = -\frac{\cos A}{\rho_A^2} + \frac{\sin A}{\rho_A \tau_A};$$

$$\left(\frac{d^3Y}{ds^3}\right)_0 = -\left(\frac{\beta}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho\tau} + \frac{\eta}{\rho^2}\frac{dR}{ds}\right)_0 = -\frac{\sin A}{\rho_A^2} - \frac{\cos A}{\rho_A \tau_A}; \quad (6\text{-}118)$$

$$\left(\frac{d^3Z}{ds^3}\right)_0 = -\left(\frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\nu}{\rho\tau} + \frac{\zeta}{\rho^2}\frac{dR}{ds}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_A^2}\frac{d\rho}{ds} \approx 0.$$

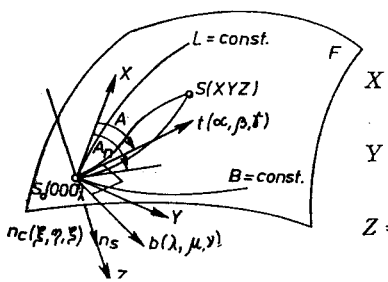


Fig. 6-7. Ecuațiile parametrice ale liniei geodezice.

În acest fel rezultă ecuațiile:

$$X = s\cos A - \frac{s^3}{6\rho_A}\left(\frac{\cos A}{\rho_A} - \frac{\sin A}{\tau_A}\right) + \ldots;$$

$$Y = s\sin A - \frac{s^3}{6\rho_A}\left(\frac{\sin A}{\rho_A} + \frac{\cos A}{\tau_A}\right) + \ldots; \quad (6\text{-}119)$$

$$Z = \frac{s^2}{2\rho_A} + \ldots.$$

În formulele de mai înainte cu $1/\tau$ s-a notat torsiunea liniei geodezice care poate

fi calculată în raport de curburile secțiunilor normale principale și azimutul liniei geodezice:

$$\frac{1}{\tau_A} = -\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\sin A\cos A, \quad (6\text{-}120)$$

iar curbura $1/\rho_A$ se determină cu relațiile (6-86) sau (6-98), după necesități. Se obțin astfel valorile expresiilor din parantezele relațiilor (6-119):

$$\frac{\cos A}{\rho_A} - \frac{\sin A}{\tau_A} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{\sin A}{\rho_A} + \frac{\cos A}{\tau_A} = \frac{\sin A}{N}.$$

În acest fel rezultă *ecuațiile parametrice Puiseux — Weingarten ale liniei geodezice* pe elipsoidul de rotație:

$$X = s\cos A\left(1 - \frac{s^2}{6M\rho_A} + \ldots\right);$$
$$Y = s\sin A\left(1 - \frac{s^2}{6N\rho_A} + \ldots\right); \quad (6\text{-}121)$$
$$Z = \frac{s^2}{2\rho_A} + \ldots.$$

Aproximația mai mare care se acceptă la coordonata Z este justificată de modalitatea practică de deducere a altitudinilor, la distanțe mari, prin nivelment trigonometric, unde erorile datorită refracției atmosferice nu permit operații de calcule la fel de precise cu cele necesare deducerii coordonatelor X și Y.

Forma originală a formulelor *Weingarten* este (*Bomford* 1962):

$$X = s\cos A - \frac{s^3}{6N_0^2}\cos A\,(1 + \eta_0^2 + \eta_0^2\cos^2 A) + \ldots;$$
$$Y = s\sin A - \frac{s^3}{6N_0^2}\sin A\,(1 + \eta_0^2 + \cos^2 A) + \ldots; \quad (6\text{-}122)$$
$$Z = \frac{s^2}{2N_0}(1 + \eta_0^2\cos^2 A) - \frac{s^3}{2N_0}\eta_0^2 t_0\cos A + \ldots.$$

Pentru scopuri practice este util să se aplice în continuare transformările *Gauss*, prin considerarea unor relații derivate din formula (6-86):

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{M}\left(1 - \frac{e^2\cos^2 B}{1 - e^2\sin^2 B}\sin^2 A\right); \quad (6\text{-}123)$$

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\cos^2 B\cos^2 A\right), \quad (6\text{-}124)$$

obținîndu-se *ecuațiile parametrice Puiseux — Weingarten — Gauss* ale liniei geodezice pe elipsoidul de referință, în aproximația neglijării termenilor de ordinul III și superiori:

$$X = s\cos A\left(1 - \frac{s^2}{6R^2} - e^2\frac{s^2}{6R^2}\cos^2 B\cos^2 A + \ldots\right);$$
$$Y = s\sin A\left(1 - \frac{s^2}{6R^2} + e^2\frac{s^2}{6R^2}\cos^2 B\sin^2 A + \ldots\right); \quad (6\text{-}125)$$
$$Z = \frac{s^2}{2R}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B\cos 2A + \ldots\right).$$

6.4.4. POZIȚIA LINIEI GEODEZICE ÎN RAPORT CU SECȚIUNEA NORMALĂ DIRECTĂ

Azimutul secțiunii normale determinată de normala la elipsoidul de referință în punctul S_0 și punctul S (fig. 6-7) notat A_n se poate determina cu relația:

$$\operatorname{tg} A_n = \frac{X}{Y},$$

unde coordonatele X și Y sînt exprimate de relațiile (6-125). Se obține astfel:

$$\operatorname{tg} A_n = \operatorname{tg} A \left(1 - \frac{s^2}{6R^2} + e^2 \frac{s^2}{6R^2} \cos^2 B \sin^2 A + \ldots\right) \left(1 - \frac{s^2}{6R^2} - e^2 \frac{s^2}{6R^2} \cos^2 B \cos^2 A - \ldots\right)^{-1}.$$

În ipoteza neglijării termenilor de ord. III și superiori rezultă:

$$\operatorname{tg} A_n = \operatorname{tg} A \left(1 + e^2 \frac{s^2}{6R^2} \cos^2 B + \ldots\right). \qquad (6\text{-}126)$$

Din egalitatea: $A = A_n - (A_n - A)$ rezultă prin dezvoltări în serie:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_n - \frac{A_n - A}{\cos^2 A_n} + \ldots,$$

adică:

$$(A - A_n)^{cc} = \rho^{cc} (\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A_n) \cos^2 A_n.$$

Prin introducere în relația (6-126) se obține:

$$(A - A_n)^{cc} = -\rho^{cc} \frac{e^2 s^2}{6R^2} \cos^2 B \sin A \cos A. \qquad (6\text{-}127)$$

Formula (6-127) este suficient de exactă pentru calculele care intervin în lucrările geodezice obișnuite, ca de exemplu cele din triangulația de ord. I. Diferența dintre azimutul secțiunii normale directe și azimutul liniei geodezice poate fi exprimată și mai precis (*Jordan* 1958):

$$(A_n - A)^{cc} = \rho^{cc} \left(\frac{1}{12} \frac{\eta^2}{N^2} s^2 \sin 2A - \frac{1}{24} \frac{s^3 l}{N^3} \eta^2 t \sin A\right). \qquad (6\text{-}128)$$

Diferența dintre azimutele liniei geodezice și respectiv secțiunii normale directe este mică. De exemplu, pentru latitudinea $B = 45°$ și azimutul geodezic $A = 50^g$, la distanțele de 30, 60 și 100 km corespund următoarele diferențe: 0^{cc}, 003; 0^{cc}, 018 și 0^{cc}, 044. Pentru calculele practice se folosește următoarea formulă:

$$(A - A_n)^{cc} = -K_1 (s_{km})^2 \sin 2A, \qquad (6\text{-}129)$$

unde coeficientul K_1:

$$K_1 = \rho^{cc} \frac{e^2 \cos^2 B_m}{12 R_m^2}, \qquad (6\text{-}130)$$

poate fi extras din tabelul 6-5, în funcție de latitudinea B, atunci cînd se are în vedere gradația centezimală pentru diferența $(A - A_n)^{cc}$.

Tabelul 6–5

K_1, K_2 \ B	44°	44°30′	45°	45°30′	46°	46°30′	47°	47°30′	48°	48°30′	49°
$K_1 . 10^6$	4,51	4,44	4,36	4,28	4,21	4,13	4,05	3,98	3,90	3,82	3,75
$K_2 . 10^4$	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,58	1,55	1,52	1,49	1,46	1,43

Din compararea formulelor (6-105) și (6-128) se observă că linia geodezică se află dispusă la $\Delta/3$ în apropierea secțiunii normale directe (fig. 6-6, *b*).

Capitolul 7
REZOLVAREA PROBLEMELOR GEODEZICE PE ELIPSOIDUL DE REFERINȚĂ

Se presupun observațiile unghiulare și distanțele măsurate în rețelele geodezice de sprijin reduse la suprafața elipsoidului de referință (v. cap. 20).

7.1. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR ELIPSOIDICE MICI

Pentru situațiile curent întîlnite în practica geodezică, unde distanțele $s < 60$ km, triunghiurile geodezice (denumite triunghiuri *elipsoidice mici*) sînt rezolvate ca triunghiuri sferice, considerîndu-se că acestea sînt amplasate pe sfere medii *Gauss* de raze R_{B_t}, unde B_t sînt latitudinile geodezice ale centrelor de greutate ale triunghiurilor respective. Chiar în asemenea cazuri, nu se apelează la utilizarea directă a formulelor trigonometriei sferice, ci se aplică metode de calcul specifice geodeziei, care se vor prezenta în continuare.

7.1.1. EXCESUL SFERIC

Suma unghiurilor α, β, γ într-un triunghi sferic (presupuse ca neafectate de erori de măsurare) este întotdeauna mai mare decît 200^g, Diferența rezultată este denumită *exces sferic*:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 200^g. \qquad (7\text{-}1)$$

Între unghiurile măsurate și reduse pe suprafața elipsoidului de referință notate α°, β°, γ° și unghiurile compensate prin metoda celor mai mici pătrate, α, β, γ, există relațiile:

$$\alpha = \alpha^\circ + v_\alpha; \quad \beta = \beta^\circ + v_\beta; \quad \gamma = \gamma^\circ + v_\gamma, \qquad (7\text{-}2)$$

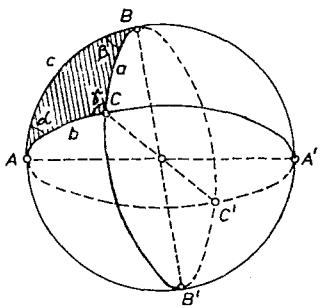


Fig. 7-1. Excesul sferic.

în care cu v_α, v_β, v_γ s-au notat corecțiile obținute din compensare, pe baza unor ecuații de condiție de forma:

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + w = 0. \qquad (7\text{-}3)$$

Astfel, suma unghiurilor măsurate și reduse pe elipsoid diferă față de 200^g nu numai prin excesul sferic, ci și printr-o cantitate w, datorită erorilor de măsurare:

$$\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 200^g = \varepsilon + w. \qquad (7\text{-}4)$$

Cînd se rezolvă triunghiuri izolate (ceea ce intervine extrem de rar în practica geodezică) se consideră:

$$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = -w/3, \qquad (7\text{-}5)$$

ceea ce nu este posibil și în cazul compensării riguroase a unei rețele geodezice.

În ambele situații este necesară cunoașterea excesului sferic ε pentru a se putea efectua calculele de compensare și de rezolvare a triunghiurilor geodezice.

Din figura 7-1 se observă că suprafețele fusurilor sferice $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$ și $(\gamma\gamma)$ corespunzătoare unghiurilor α, β, γ considerate, se pot exprima în funcție de suprafața triunghiului sferic ABC, notată F:

$$(\alpha\alpha) = F + BCA'; \quad (\beta\beta) = F + ACB'; \quad (\gamma\gamma) = F + ABC',$$

astfel încît:

$$(\alpha\alpha) + (\beta\beta) + (\gamma\gamma) = 2(F + \pi R^2). \qquad (7\text{-}6)$$

Pe de altă parte:

$$(\alpha\alpha) = \frac{\alpha}{400^g}\, 4\,\pi R^2; \quad (\beta\beta) = \frac{\beta}{400^g}\, 4\,\pi R^2; \quad (\gamma\gamma) = \frac{\gamma}{400^g}\, 4\,\pi R^2,$$

adică:

$$(\alpha\alpha) + (\beta\beta) + (\gamma\gamma) = \frac{2\,\pi R^2}{200^g}\,(\alpha + \beta + \gamma). \qquad (7\text{-}7)$$

Deoarece $200^g/\pi = \rho^g$, rezultă din formulele (7-6) și (7-7):

$$\varepsilon'' = \frac{F}{R^2}\,\rho''. \qquad (7\text{-}8)$$

Pentru calcule în triunghiuri geodezice mici, suprafața sferică F se poate înlocui cu suprafața triunghiului plan $A'B'C'$ corespondent, notată F':

$$\varepsilon'' \approx \frac{F'}{R^2}\,\rho'' = \rho''\,\frac{ab\,\sin\gamma'}{2\,R^2} = \rho''\,\frac{ac\,\sin\beta'}{2\,R^2} = \rho''\,\frac{bc\,\sin\alpha'}{2\,R^2}, \qquad (7\text{-}9)$$

unde α', β', γ' sînt unghiurile triunghiului plan.

Din tabelele elipsoidului de referință *Krasovski* se poate extrage coeficientul:

$$f = \frac{\rho''}{2\,R^2}, \qquad (7\text{-}10)$$

valabil pentru gradația sexagesimală, în funcție de latitudinea medie a vîrfurilor triunghiului ABC, astfel că:

$$\varepsilon'' \approx fab\,\sin\gamma' = fac\,\sin\beta' = fbc\,\sin\alpha'. \qquad (7\text{-}11)$$

Pentru laturi mai mari de 60 km, excesul sferic se poate calcula cu formula (*Bagratuni* 1962, *Jordan* 1958):

$$\varepsilon'' = \rho''\,\frac{F'}{R^2}\left(1 + \frac{m^2}{8\,R^2}\right), \qquad (7\text{-}12)$$

unde cu m^2 s-a notat:

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \qquad (7\text{-}13)$$

Exemplificări relative la ordinul de mărime pe care îl poate avea excesul sferic în funcție de lungimea laturii s sînt prezentate în tabelul 7-1. În același tabel se poate urmări influența adusă de formula (7-12) în raport de formula (7-9) pentru triunghiuri geodezice cu laturi mai mari de 60 km. S-au avut în vedere triunghiuri echilaterale, iar latitudinea medie a vîrfurilor triunghiurilor a fost considerată 46°.

7.1.2. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR GEODEZICE MICI CU TEOREMA LEGENDRE

Una din metodele cele mai folosite pentru rezolvarea triunghiurilor geodezice mici se bazează pe utilizarea *teoremei Legendre*, publicată de acesta în anul 1787:

„Un triunghi sferic mic se poate rezolva ca un triunghi plan, dacă se păstrează egalitatea laturilor celor două triunghiuri, iar unghiurile triunghiului plan se obțin prin micșorarea fiecărui unghi sferic cu cîte o treime din excesul sferic". Pentru demonstrarea acestei teoreme se scrie formula cosinusului în triunghiul sferic ABC:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\,\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\,\sin\frac{c}{R}\,\cos\alpha,$$

care poate fi dezvoltată în serie folosind relații de forma:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots; \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots, \qquad (7\text{-}14)$$

obținîndu-se:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\,bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2b^2 - 2\,a^2c^2 - 2\,b^2c^2}{24\,R^2bc}. \qquad (7\text{-}15)$$

În triunghiul plan $A'B'C'$, cu unghiurile α', β', γ' și aceleași laturi a,b,c rezultă din teorema *Pitagora* generalizată:

$$\cos\alpha' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}. \qquad (7\text{-}16)$$

și ca urmare:

$$\sin^2\alpha' = -\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2b^2 - 2\,a^2c^2 - 2\,b^2c^2}{4\,b^2c^2}. \qquad (7\text{-}17)$$

Tabelul 7–1

Lungimea laturii $(s)_{km}$ =	10	20	30	40	50	60	Cu formula (7–9) 80	100	150	Cu formula (7–12) 80	100	150
Excesul sferic $\varepsilon'' =$	0,219	0,878	1,976	3,5119	5,4873	7,9018	14,04762	21,94941	49,38618	14,04790	21,95003	49,38959

Tabelul 7–2

Calculul excesului sferic ε	Vîrful	Unghiul măsurat și redus pe elipsoid [g c cc]	Corecția $-\omega/3$ [cc]	Unghiul compensat în triunghiul elipsoidic mic [g c cc]	$-\frac{\varepsilon}{3}$ [cc]	Unghiul compensat în triunghiul plan [g c cc]	Sinusul unghiului în triunghiul plan	Lungimea laturii în triunghiurile plan și elipsoidic mic [m]	Denumirea laturii
$a = 28597{,}567$ m	A	91 78 42,661	−1,169	91 78 41,492	−1,204	91 78 40,288	0,99168380	28597,567	a
$B = 44°, 34'$	B	58 45 51,130	−1,169	58 45 49,961	−1,204	58 45 48,757	0,79451413	22911,709	b
$f = 25{,}354 \cdot 10^{-10}$	C	49 76 13,328	−1,169	49 76 12,159	−1,204	49 76 10,955	0,70444825	20314,445	c
$\varepsilon = 3^{cc}, 612$		200 00 07,119	−3,507	200 00 03,612	−3,612	200 00 00,000	modulul = $a/\sin\alpha' = 28837{,}3844$ m		
		$\varepsilon + \omega = 7^{cc}, 119$							

Din ultimele trei relații rezultă:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{bc}{6R^2}\sin^2\alpha'. \tag{7-18}$$

Din egalitatea: $\alpha = \alpha' + (\alpha - \alpha')$ se obține prin dezvoltare în serie:

$$\cos\alpha \approx \cos\alpha' - (\alpha - \alpha')\sin\alpha', \tag{7-19}$$

adică:

$$\alpha - \alpha' = \frac{bc\sin\alpha'}{6R^2} = \frac{1}{3}\,\frac{F'}{R^2} \approx \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7-20}$$

Relații analoge se pot obține și pentru diferențele $\beta - \beta'$; $\gamma - \gamma'$, ceea ce constituie demonstrația teoremei *Legendre*.

Aproximațiile generate de dezvoltările în serie (7-14), (7-19), (7-20), limitează domeniul de aplicabilitate a rezolvărilor triunghiurilor geodezice cu teorema *Legendre* pînă la distanțe $s < 60$ km. În cazul unor laturi mai mari este necesară utilizarea algoritmului de calcul prezentat în *Dragomir* ș.a. 1977.

Un exemplu de rezolvare a triunghiurilor geodezice cu teorema *Legendre* se prezintă în tabelul 7-2.

7.1.3. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR GEODEZICE MICI CU METODA ADITAMENTELOR

Cu *metoda aditamentelor*, introdusă de *J.G. Soldner* în anul 1810, un triunghi geodezic mic oarecare (aproximat ca triunghi sferic) se rezolvă prin intermediul unui triunghi plan, ale cărui unghiuri sînt egale cu unghiurile triunghiului geodezic (reduse pe elipsoid) modificîndu-se însă laturile acestuia din urmă.

Metoda aditamentelor a cunoscut o mai mică aplicabilitate în comparație cu metoda *Legendre*, însă este de așteptat o schimbare în acest sens, ca urmare a posibilităților actuale de măsurare directă a distanțelor în rețelele geodezice de sprijin.

Din teorema sinusurilor, în triunghiurile sferic ABC și plan $A'B'C'$, format în modul menționat mai înainte, rezultă:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{a}{R}}{\sin\dfrac{b}{R}}, \text{ respectiv } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'},$$

de unde:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \dfrac{a^3}{6R^2} + \cdots}{b - \dfrac{b^3}{6R^2} + \cdots}. \tag{7-21}$$

Această ecuație este îndeplinită numai atunci cînd:

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2} \quad \text{și} \quad b' = b - \frac{b^3}{6R^2}, \tag{7-22}$$

sau în general:

$$s' = s - \frac{s^3}{6R^2}. \tag{7-23}$$

Mărimea:

$$A_s = \frac{s^3}{6\,R^2}, \tag{7-24}$$

cu care trebuie modificată latura s din triunghiul sferic pentru a se obține lungimea corespondentă s' în triunghiul plan intermediar se numește *aditament liniar*.

Se poate demonstra că pentru calculul aditamentelor în cazul triunghiurilor geodezice mici ($s < 60$ km), este suficient să se utilizeze o valoare medie pentru curbura totală $K = 1/R^2$, pentru teritorii care acoperă 5° în latitudine spre nord și spre sud (aproximativ 1 000 km în total pe direcția nord-sud). Astfel, pentru țara noastră se poate considera:

$$R = R_{46°} = 6\,378\,957 \text{ m, pentru care } \frac{1}{6\,R^2} = 4{,}0959 \cdot 10^{-15}.$$

În cazul unor distanțe s mai mari de 60 km se poate extinde dezvoltarea în serie inițială, astfel încît:

$$s' = s - \frac{s^3}{6\,R^2} + \frac{s^5}{120\,R^4} - \dots \tag{7-25}$$

Termenii corectivi introduși în ultimele relații nu aduc contribuții esențiale, așa cum rezultă și din tabelul 7-3.

Pentru exemplificarea rezolvării unui triunghi geodezic mic cu metoda aditamentelor s-a reluat exemplul din tabelul 7-2, calculele efectuîndu-se în tabelul 7-4.

7.2. CALCULUL COORDONATELOR GEODEZICE B ȘI L PE ELIPSOIDUL DE REFERINȚĂ

Scopul final al calculelor efectuate pe elipsoidul de referință este determinarea coordonatelor geodezice, latitudinea B și longitudinea L, ale punctelor din rețelele geodezice de sprijin. Operațiile de prelucrare riguroasă a determinărilor astronomo-geodezice reclamă calculul coordonatelor geodezice în mai multe etape: calculul coordonatelor provizorii, necesare în etapa preliminară prelucrării riguroase și calculul coordonatelor finale, după terminarea compensării propriu-zise. Se poate aprecia prin urmare că acest gen de calcule ocupă un volum deosebit de important, motiv pentru care sînt cunoscute în literatura de specialitate și sub denumirea de *rezolvări ale problemelor geodezice de bază*.

Prima problemă geodezică de bază, denumită de asemenea și *problema geodezică directă*, constă din determinarea coordonatelor geodezice B_2, L_2 ale punctului S_2 (fig. 7-2, *a*) și a azimutului geodezic A_2 (denumit și *azimut geodezic invers*) în funcție de coordonatele B_1, L_1 ale punctului S_1, azimutul geodezic A_1 (denumit și *azimut geodezic direct*) și lungimea liniei geodezice s dintre punctele S_1 și S_2.

Utilizarea succesivă a problemei geodezice directe este cunoscută și sub denumirea de *transport de coordonate*.

Tabelul 7–3

Lungimea laturii $(s)_{km}$ =	10	pătrat 20	30	40	50	60	Cu formula (7–24) 80	100	150	Cu formula (7–25) 80	100	150
Aditament liniar [mm] =	4,1	32,8	110,6	262,1	512,0	884,7	2 097,1	4 095,9	13 823,6	2 097,1	4 095,9	13 823,2

Tabelul 7–4

Calculul excesului sferic și al aditamentelor	Vîrful	Unghiul măsurat și redus pe elipsoid [g c cc]	Corecția $-\omega/3$ [cc]	Unghiul compensat în triunghiul elipsoidic mic [g c cc]	Sinusul unghiului în triunghiul elipsoidic mic	Latura în triunghiul plan [m]	Aditamentul [m]	Latura în triunghiul elipsoidic mic [m]	Denumirea laturii
a = 28 597,567 m	A	91 78 42,661	−1,169	91 78 47,492	0,99168405	28597,4710	0,0958	28597,567	a
B = 44°34′	B	58 45 51,130	−1,169	58 45 49,961	0,79451528	22911,6599	0,0493	22911,709	b
f'' = 25,354 · 10^{-10}	C	49 76 13,328	−1,169	49 76 12,159	0,70444959	20314,4106	0,0344	20314,445	c
ε^{cc} = 3,612		200 00 07,119	−3,507	200 00 03,612	Modul = $a'/\sin\alpha'$ = 28 · 837,2807 m				
A_a = 0,0958 m		$\varepsilon + \omega = 7^{cc},119$							
A_b = 0,0493 m									
A_c = 0,0344 m									

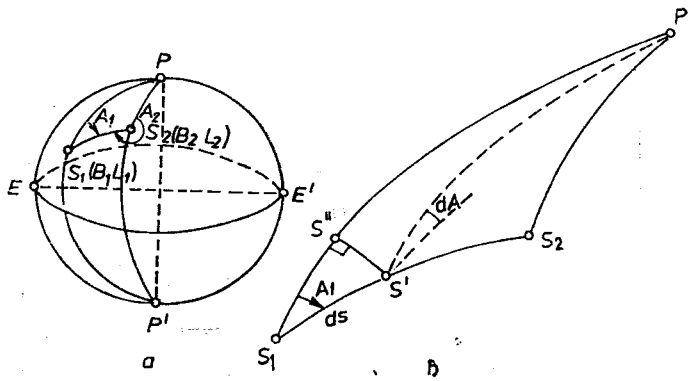


Fig. 7-2. Problemele geodezice de bază.

Cea de a doua problemă geodezică de bază, denumită şi *problemă geodezică inversă*, constă din determinarea lungimii liniei geodezice s şi a azimutelor geodezice direct A_1 şi invers A_2, atunci cînd se cunosc coordonatele geodezice ale punctelor S_1 şi S_2.

Se cunosc mai multe procedee de rezolvare a problemelor geodezice de bază. Această diversitate a fost condiţionată de necesităţi continue de micşorare a volumului de calcul, de sporire a exactităţii rezultatelor finale, chiar în condiţiile unor distanţe geodezice mari, precum şi de mijloacele de calcul avute la dispoziţie.

Există mai multe criterii de clasificare a metodelor şi procedeelor de calcul al coordonatelor geodezice pe elipsoidul de referinţă, în funcţie de elementul considerat ca principal în cadrul acestor calcule. Unul dintre criteriile de clasificare curent folosite, acceptat şi în cadrul lucrării, consideră drept element principal lungimea liniei geodezice s. Din acest punct de vedere se pot distinge: metode de rezolvare pentru distanţe geodezice mici ($s<60$ km), medii ($60\leqslant s<600$ km) şi mari ($s\geqslant 600$ km). În manual ne vom limita doar la situaţii curent întîlnite la prelucrarea observaţiilor în reţelele geodezice de sprijin, unde $s<60$ km. De aceea se vor prezenta numai acele metode care au un randament corespunzător şi ca urmare se aplică frecvent, urmînd ca cititorul interesat să consulte lucrări mai dezvoltate pentru situaţii care depăşesc cadrul menţionat (*Dragomir* ş.a. 1977).

Un alt aspect care trebuie avut în vedere la rezolvările efective se referă la precizia de calcul a coordonatelor geodezice, distingîndu-se metode exacte şi metode aproximative. Pe măsură ce distanţele geodezice cresc, exactitatea în calcule are semnificaţii deosebite. Ca şi în alte calcule geodezice, şi în cadrul problemelor geodezice de bază, se urmăreşte ca erorile de calcul să fie de circa 10 ori mai mici decît erorile medii care caracterizează operaţiile de teren. Astfel, se poate arăta că în triangulaţia geodezică de ord. I este necesar ca aproximaţia de calcul pentru coordonatele geodezice B şi L să fie de $\pm 0'',0001$, pentru azimutele geodezice A de $\pm 0^{cc},001$, iar pentru distanţele geodezice s de $\pm 0{,}001$ m.

7.2.1. REZOLVAREA PROBLEMEI GEODEZICE DIRECTE PRIN METODA DEZVOLTĂRILOR ÎN SERIE (METODA LEGENDRE)

Deoarece diferenţele de latitudine, longitudine şi azimut între punctul iniţial S_1 şi un punct curent S_i, depind de lungimea liniei geodezice s *se pot accepta următoarele dezvoltări în serie Maclaurain*:

$$B_i = B_1 + s\left(\frac{dB}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 + \dots;$$

$$L_i = L_1 + s\left(\frac{dL}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 + \dots; \qquad (7\text{-}26)$$

$$A_i = A_1 + 200^g + s\left(\frac{dA}{ds}\right)_1 + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1 + \frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_1 + \dots.$$

Primele dezvoltări în serie de forma (7-26), pînă la termeni care conţin s^3 inclusiv, au fost deduse de *F.M. Legendre* în anul 1806.

Derivatele necesare urmează să se calculeze în punctul geodezic S_1 cunoscut, astfel încît problema geodezică directă devine rezolvabilă. *Derivatele de ord. I se deduc din relaţiile* (6-52), (6-112), rezultînd:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c}\cos A;$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N\cos B} = \frac{V}{c}\,\frac{\sin A}{\cos B}; \qquad (7\text{-}27)$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{dA}{dL}\cdot\frac{dL}{ds} = \frac{1}{N}\operatorname{tg} B\sin A = \frac{V}{c}\operatorname{tg} B\sin A.$$

Derivatele de ordin superior se pot calcula cu următoarele formule generale:

$$B^{(n)} = \frac{\partial}{\partial B}B^{(n-1)}\frac{dB}{ds} + \frac{\partial}{\partial A}B^{(n-1)}\frac{dA}{ds};$$

$$L^{(n)} = \frac{\partial}{\partial B}L^{(n-1)}\frac{dB}{ds} + \frac{\partial}{\partial A}L^{(n-1)}\frac{dA}{ds}; \qquad (7\text{-}28)$$

$$A^{(n)} = \frac{\partial}{\partial B}A^{(n-1)}\frac{dB}{ds} + \frac{\partial}{\partial A}A^{(n-1)}\frac{dA}{ds}.$$

Aspectul concret al derivatelor de ordin superior este destul de complicat. Ca ilustrare, se prezintă un asemenea calcul:

$$\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 = \frac{1}{c}\left(3V_1^2\frac{dV_1}{dB}\frac{dB}{ds}\cos A_1 - \sin A_1\frac{dA}{ds}V_1^3\right).$$

Deoarece:

$$V_1^2 = 1 + e'^2\cos^2 B_1 = 1 + \eta_1^2,$$

rezultă:

$$2V_1dV = -2e'^2\cos B\sin B dB,$$

adică:

$$\frac{dV}{dB} = -\frac{\eta_1^2 t_1^2}{V_1},$$

unde:

$$\eta_1 = e'\cos B_1; \qquad t_1 = \operatorname{tg} B_1. \qquad (7\text{-}29)$$

Prin urmare:

$$\left(\frac{d^3B}{ds}\right)_1 = \frac{1}{c}\left[3V_1^2\left(-\frac{\eta_1^2 t_1}{V_1}\right)\cdot\frac{V_1^3}{c}\cos^2 A_1 - \sin A_1 \frac{V_1}{c} t_1 \sin A_1 V_1^3\right] =$$

$$= -\frac{V_1^4}{c^3} t_1 (3\eta_1^2 \cos^2 A_1 + \sin^2 A_1) =$$

$$= -\frac{t_1}{M_1 N_1}(3\eta_1^2 \cos^2 A_1 + \sin^2 A_1). \qquad (7\text{-}30)$$

Dacă se notează:

$$u = 10^{-5} s \cos A_1; \qquad v = 10^{-5} s \sin A_1, \qquad (7\text{-}31)$$

relaţiile (7-26) devin, în ipoteza considerării numai a derivatelor calculate prin (7-27) şi (7-31):

$$B_2 = B_1 + b_{10}u + b_{20}u^2 + b_{02}v^2 + \dots;$$
$$L_2 = L_1 + l_{01}v + \dots; \qquad (7\text{-}32)$$
$$A_2 = A_1 + 200^g + a_{01}v + \dots,$$

unde:

$$b_{10} = \rho'' \frac{V_1^2}{c}; \qquad b_{20} = -\frac{3}{2}\rho'' \frac{t_1\eta_1^2}{M_1N_1};$$

$$b_{02} = -\rho'' \frac{t_1}{M_1N_1}; \qquad l_{01} = \rho'' \frac{1}{N_1 \cos B_1}; \qquad (7\text{-}33)$$

$$a_{01} = \rho'' \frac{t_1}{N_1}.$$

În funcţie de numărul de termeni conţinuţi de dezvoltările în serie (7-32) se realizează nivelul de aproximaţie necesar în calcule. Îmbunătăţirile sînt însă limitate de aproximaţia principală, generată de calculul efectiv al derivatelor necesare în raport de latitudinea punctului iniţial S_1.

Rezolvări complete ale problemei examinate, pînă la derivate de ordin superior, IV şi V, destinate scopurilor practice, aparţin unor cunoscuţi geodezi F.R. Helmert (1880), *O. Schreiber* (1878), *H. Boltz* (1912), *G.V. Bagratuni* (1952), *V.K. Hristov* (1959) etc., care au întocmit şi tabelele necesare acestor rezolvări. *Astfel formulele (7-26) se pot scrie sub forma*:

$$B_i = B_1 + b_{10}u + b_{20}u^2 + b_{02}v^2 + b_{30}u^3 + b_{12}uv^2 + b_{22}u^2v^2 + b_{04}v^4 + \dots;$$
$$L_i = L_1 + l_{01}v + l_{11}uv + l_{21}u^2v + l_{03}v^3 + l_{31}u^3v + l_{13}uv^3 + \dots; \qquad (7\text{-}34)$$
$$A_i = A_1 \pm 200^g + a_{01}v + a_{11}uv + a_{21}u^2v + a_{03}v^3 + a_{31}u^3v + a_{13}uv^3 + \dots,$$

în care coeficienţii b, l şi a au expresii similare cu (7-33) putînd fi extraşi din lucrări mai dezvoltate (*Dragomir* ş.a. 1977).

Pentru elipsoidul de referinţă *Krasovski* coeficienţii necesari în calcule se extrag din tabele în funcţie de latitudinea geodezică B_1 a punctului iniţial.

Un exemplu de rezolvare a problemei geodezice directe prin dezvoltări în serie *Legendre* este prezentat în tabelul 7-5.

Tabelul 7–5

Elemente iniţiale	Denumirea punctului iniţial: *Movileni* $B_1 = 44°35'45'',7134$; $L_1 = 24°20'19'',3139$; $A_1 = 60^g\,55^c\,34^{cc},274$; $s = 20\,314{,}445$ m		
Elemente auxiliare	$u = +0{,}11797211$ $v = +0{,}16537911$ $u^2 = +0{,}01391742$ $uv = +0{,}01951012$	$v^2 = +0{,}02735025$ $u^3 = +0{,}001642$ $u^2v = +0{,}002302$ $uv^2 = +0{,}003227$	$v^3 = +0{,}004523$ $u^3v = +0{,}000381$ $u^2v^2 = +0{,}000534$ $uv^3 = +0{,}000272$ $v^4 = +0{,}000748$
Coeficienţi din tabele	$b_{10} = +3239{,}57196$ $b_{20} = -0{,}25620$ $b_{02} = -24{,}99855$ $b_{30} = -0{,}00000$ $b_{12} = -0{,}51461$ $b_{22} = -0{,}01000$ $b_{04} = +0{,}00200$	$l_{01} = +4533{,}99188$ $l_{11} = +69{,}97417$ $l_{21} = +1{,}45150$ $l_{03} = -0{,}35998$ $l_{31} = +0{,}02810$ $l_{13} = -0{,}02240$	$a_{01} = +3183{,}33274$ $a_{11} = +74{,}48243$ $a_{21} = +1{,}40852$ $a_{03} = -0{,}38300$ $a_{31} = +0{,}02800$ $a_{13} = -0{,}02200$
Calcule intermediare	$b_{10}u = +382{,}17914$ $b_{20}u^2 = -0{,}00357$ $b_{02}v^2 = -0{,}68372$ $b_{30}u^3 = +0{,}00000$ $b_{12}uv^2 = -0{,}00166$ $b_{22}u^2v^2 = -0{,}00000$ $b_{04}v^4 = +0{,}00006$	$l_{01}v = +749{,}82754$ $l_{11}uv = +1{,}36521$ $l_{12}u^2v = +0{,}00334$ $l_{03}v^3 = -0{,}00163$ $l_{31}u^3v = +0{,}00001$ $l_{13}uv^3 = -0{,}00001$	$a_{01}v = +526{,}45674$ $a_{11}uv = +1{,}45316$ $a_{21}u^2v = +0{,}00324$ $a_{03}v^3 = -0{,}00173$ $a_{31}u^3v = +0{,}00001$ $a_{13}uv^3 = -0{,}00001$
Rezultate finale	$\Delta B = +381'',49025 = +6'21'',49025$	$\Delta l = +751'',19446 = 12'31'',19446$	$\Delta A'' = +527'',91141$ $\Delta A^{cc} = +16^c29^{cc},3558$
	Denumirea punctului final: *Crucea* $B_2 = 44°42'07'',2037$; $L_2 = 24°32'50'',5084$; $A_2 = 260^g71^c63^{cc},6298$		

7.2.2. METODA GAUSS (METODA ARGUMENTELOR MEDII) DE REZOLVARE A PROBLEMEI GEODEZICE DIRECTE

Procedeul elaborat de *K.F. Gauss* în anul 1846 pentru rezolvarea problemelor geodezice de bază poate fi aplicat pentru distanţe mici şi medii ($s < 600$ km). Metoda se mai numeşte şi metoda argumentelor medii deoarece rezolvarea se bazează pe utilizarea următoarelor valori medii:

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}; \qquad L_m = \frac{L_1 + L_2}{2}; \qquad A_m = \frac{A_1 \pm 200^g + A_2}{2}. \qquad (7\text{-}35)$$

În cadrul problemei geodezice directe, argumentele medii sînt necunoscute, rezultînd necesitatea aplicării unei rezolvări iterative. Pentru început, în prima iteraţie, elementele necesare se pot determina prin metode expeditive (prin utilizarea unor relaţii aproximative sau pe cale grafică). În cazul unor distanţe geodezice mici, convergenţa procedeului este foarte rapidă.

Fie punctul C (B, L) situat la mijlocul liniei geodezice s care uneşte punctele S_1 (B_1L_1) şi $S_2(B_2,L_2)$. Latitudinile B_1 şi B_2 pot fi exprimate în raport de latitudinea B prin dezvoltări în serie *Maclaurain* de forma (7-26):

$$B_2 = B + \frac{s}{2}\left(\frac{dB}{ds}\right)_c + \frac{s^2}{8}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_c + \frac{s^3}{48}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_c + \dots;$$
$$B_1 = B - \frac{s}{2}\left(\frac{dB}{ds}\right)_c + \frac{s^2}{8}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_c - \frac{s^3}{48}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_c + \dots. \qquad (7\text{-}36)$$

Expresii analoge se pot scrie pentru longitudinile L_2 și L_1 și respectiv pentru azimutele A_2 și A_1. Pentru economie de spațiu, în continuare se vor prezenta etapele principale de deducere a formulelor de calcul doar pentru latitudinile geodezice, deoarece pentru longitudinile și azimutele geodezice se poate proceda în mod similar. Din relațiile (7-36) rezultă o primă posibilitate de calcul a diferenței de latitudine în raport de punctul C:

$$b = B_2 - B_1 = s\left(\frac{dB}{ds}\right)_c + \frac{s^3}{24}\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_c + \frac{s^5}{1\,920}\left(\frac{d^5B}{ds^5}\right)_c + \dots . \quad (7\text{-}37)$$

Deoarece se urmărește obținerea unei dezvoltări în serie în raport de argumentele medii, este utilă determinarea diferenței dintre latitudinea medie și latitudinea punctului C:

$$B_m = B_c + \frac{s^2}{8}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_c + \frac{s^4}{384}\left(\frac{d^4B}{ds^4}\right)_c + \dots . \quad (7\text{-}38)$$

După cum s-a mai arătat [v. (7-27)], derivatele din expresiile (7-36) — (7-38) sînt funcții de latitudinea B și azimutul A, astfel încît variațiile lor din punctul C în punctul de latitudine medie pot fi exprimate sub forma unor dezvoltări în serie a unei funcții de două variabile:

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_c = \left(\frac{dB}{ds}\right)_m + (B - B_m)\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{dB}{ds}\right)_m + (A - A_m)\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{dB}{ds}\right)_m . \quad (7\text{-}39)$$

Diferența $(B - B_m)$ poate fi calculată din relațiile (7-36):

$$B - B_m = -\frac{s^2}{8}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_c \approx -\frac{s^2}{8}\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_m . \quad (7\text{-}40)$$

Aproximația de mai sus este acceptată din considerente de ordin didactic, de simplificare a expunerii. În mod analog rezultă:

$$A - A_m \approx -\frac{s^2}{8}\left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_m , \quad (7\text{-}41)$$

astfel încît derivata de ord. I din (7-39) este o funcție de argumentele medii:

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_c = \left(\frac{dB}{ds}\right)_m - \frac{s^2}{8}\left[\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{dB}{ds}\right)_m\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_m + \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{dB}{ds}\right)_m\left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_m\right].$$

Analog se poate proceda și pentru calculul celorlalte derivate, de ordin superior.

Prin urmare, revenind la relația (7-37), se poate completa cu relații similare necesare determinării diferențelor de longitudine și respectiv de azimut, se poate scrie:

$$\begin{aligned} b &= B_2 - B_1 = s\left(\frac{dB}{ds}\right)_m - \frac{s^2}{8}\varphi_1(B_m, A_m); \\ l &= L_2 - L_1 = s\left(\frac{dL}{ds}\right)_m - \frac{s^2}{8}\varphi_2(B_m, A_m); \\ \Delta A &= A_2 - 200^g - A_1 = s\left(\frac{dA}{ds}\right)_m - \frac{s^2}{8}\varphi_3(B_m, A_m). \end{aligned} \quad (7\text{-}42)$$

Considerînd relațiile (7-27), (6-82) se poate scrie în continuare:

$$\begin{aligned} b &= s\cos A_m [1]_m (1 + \Delta_1) + \dots ; \\ l &= s\sin A_m [2]_m \sec B_m (1 + \Delta_2) + \dots ; \\ \Delta A &= s[2]_m \sin A_m \operatorname{tg} B_m (1 + \Delta_3) + \dots . \end{aligned} \quad (7\text{-}43)$$

Mărimile Δ_1, Δ_2, Δ_3 sînt funcții de b, l, B_m, adică de necunoscutele problemei. De aceea rezolvarea problemei geodezice directe prin metoda argumentelor medii *presupune un calcul iterativ*, care poate fi programat însă cu ușurință. De remarcat faptul că aplicarea metodei nu este dependentă de utilizarea unor tabele auxiliare, elementele necesare putînd fi calculate direct, pe elipsoidul de referință adoptat.

Se prezintă în continuare formulele valabile pentru distanțe geodezice mici ($s < 60$ km), deducerea lor putînd fi urmărită în lucrări mai extinse (*Jordan* ș.a. 1958, *Bagratuni* 1962 ș.a.):

$$\begin{aligned} b &= [1]_m \frac{s\cos A_m}{\cos\frac{l}{2}}(1 - [5]_m l^2\cos^2 B_m + [6]_m b^2); \\ l &= [2]_m \frac{s\sin A_m}{\cos B_m}(1 + [3]\, l^2\sin^2 B_m - [4]_m b^2); \\ \Delta A &= l\sin B_m (1 + [7]_m l^2\cos^2 B_m + [8]_m b^2). \end{aligned} \quad (7\text{-}44)$$

Simbolurile $[1]_m$ și $[2]_m$ au fost definite prin relațiile (6-8), urmînd ca valorile efective să fie determinate în funcție de latitudinea medie B_m. Celelalte simboluri se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned} [3] &= \frac{1}{24\,\rho''^2}; \qquad [4]_m = [3]\frac{1 + \eta_m^2 - 9\,\eta_m^2 t_m^2}{V_m^4}; \\ [5]_m &= 3(1 - 2\,\eta_m^2); \qquad [6]_m = 3\,[3]\frac{\eta_m^2(t_m^2 - 1 - \eta_m^2 - 4\,\eta_m^2 t_m^2)}{V_m^4}; \\ [7]_m &= 2\,[3]\,V_m^2; \qquad [8]_m = [3]\frac{3 + 8\,\eta_m^2 + 5\,\eta_m^2}{V_m^4}. \end{aligned} \quad (7\text{-}45)$$

În tabelul 7-6 se preia exemplul din tabelul 7-5. Prin aplicarea metodei argumentelor medii se obțin rezultate identice.

7.2.3. REZOLVAREA PROBLEMEI GEODEZICE INVERSE

În cadrul problemei geodezice inverse se cunosc coordonatele geodezice ale punctelor de la capetele unei linii geodezice S_1 (B_1, L_1) și $S_2(B_2, L_2)$. Se cer: lungimea liniei geodezice s și azimutele direct A_1 și respectiv invers A_2.

Formulele necesare pentru rezolvarea problemei geodezice inverse se pot deduce din relațiile (7—43), deoarece diferențele de latitudine și longitudine precum și latitudinea medie sînt, de această dată, cunoscute:

$$\begin{aligned} b &= 10^{-4}(B_2 - B_1)''; \quad l = 10^{-4}(L_2 - L_1)''; \\ B_m &= \frac{1}{2}(B_1 + B_2). \end{aligned} \quad (7\text{-}46)$$

Astfel, se poate scrie:

$$\begin{aligned} s\sin A_m &= \frac{l\cos B_m}{[2]_m}(1 + \Delta_2)^{-1}; \quad s\cos A_m = \frac{b}{[1]_m}(1 + \Delta_1)^{-1}; \\ \Delta A &= s\,[2]_m \sin A_m \operatorname{tg} B_m (1 + \Delta_3). \end{aligned} \quad (7\text{-}47)$$

Tabelul 7—6

Elemente inițiale	$B_1 = 44^g35'45'',7134$ $A_1 = 60^g55^c34^{cc},274$			$L_1 = 24^g20'19'',3139$ $s = 20\,314,445$ m	
Elemente din formule \ Iterația	1	2	3	4	Rezultate intermediare
$M_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B_m)^{3/2}}$	6 367 038,949	6 367 098,367	6 367 098,260	6 367 098,260	
$N_m = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B_m)^{1/2}}$	6 388 793,672	6 388 813,546	6 388 813,508	6 388 813,508	
$\Delta B = [1]_m \frac{s\cos A_m}{\cos\frac{\Delta L}{2}} \cdot (1-[5]_m \Delta L^2\cos^2 B_m + [6]_m \Delta B^2)$	382'',1797	381'',4915	381'',4902	381'',4902	$0^g06'21'',4902$
$\Delta L = [2]_m \frac{s\sin A_m}{\cos B_m} \cdot (1+[3]\Delta L^2\sin^2 B_m - [4]_m \Delta B^2)$	749'',8276	751'',1945	751'',1945	751'',1945	$0^g12'31'',1945$
$B_m = B_1 + \Delta B \cdot \frac{1}{2}$	44°,64911201	44°,64901643	44°,64901625	44°,64901625	
$\cos B_m$	0,71142393	0,71142510	0,71142510	0,71142510	
$\Delta A = \Delta L \sin B_m (1 + [7]_m \Delta L^2\cos^2 B_m + [8]'_m \Delta B^2)$	526'',9517	527'',9114	527'',9114	527'',9114	$16^c29^{cc},356$
$A_m = A_1 + \Delta A \frac{1}{2}$	54°,57127240	54°,57140569	54°,57140569	54°,57140569	
$[1]_m = \frac{\rho''^2}{M_m}$	0,03239572	0,03239542	0,03239542	0,03239542	
$[2]_m = \frac{\rho''^2}{N_m}$	0,03228541	0,03228531	0,03228531	0,03228531	

Tabelul 7—6 (continuare)

Elemente inițiale	$B_1 = 44^g35'45'',7134$ $A_1 = 60^g55^c34^{cc}274$			$L_1 = 24^g20'19'',3139$ $s = 20\,314,445$m	
Elemente din formule \ Iterația	1	2	3	4	Rezultate intermediare
$\eta_m^2 = e'^2\cos^2 B_m$	0,00341677	0,00341053	0,00341054	0,00341054	
$V_m^2 = 1 + \eta_m^2$	1,00341677	1,00341053	1,00341054	1,00341054	
$t_m^2 = \mathrm{tg}^2 B_m$	0,97219073	0,97580040	0,97580040	0,97580040	
$[3] = \frac{1}{24\,\rho''^2}$	$9,7935\cdot10^{-13}$	$9,7935\cdot10^{-13}$	$9,7935\cdot10^{-13}$	$9,7935\cdot10^{-13}$	
$[4]_m = [3]\frac{1+\eta_m^2-9\eta_m^2 t_m^2}{V_m^4}$	$9,4694\cdot10^{-13}$	$9,4689\cdot10^{-13}$	$9,4689\cdot10^{-13}$	$9,4689\cdot10^{-13}$	
$[5]_m = [3](1-2\eta_m^2)$	$9,7266\cdot10^{-13}$	$9,7267\cdot10^{-13}$	$9,7267\cdot10^{-13}$	$9,7267\cdot10^{-13}$	
$[6]_m = 3[3]\frac{\eta_m^2(t_m^2-1-\eta_m^2-4\eta_m^2 t_m^2)}{V_m^4}$	$-4,4381\cdot10^{-16}$	$-4,0866\cdot10^{-16}$	$-4,0734\cdot10^{-16}$	$-4,0734\cdot10^{-16}$	
$[7]_m = 2[3]V_m^2$	$1,9654\cdot10^{-12}$	$1,9654\cdot10^{-12}$	$1,9654\cdot10^{-12}$	$1,9654\cdot10^{-12}$	
$[8]_m = [3]\frac{3+8\eta_m^2+5\eta_m^4}{V_m^4}$	$2,9447\cdot10^{-12}$	$2,9447\cdot10^{-12}$	$2,9447\cdot10^{-12}$	$2,9447\cdot10^{-12}$	
$1-[5]_m\Delta L^2\cos^2 B_m + [6]_m\Delta B^2 =$	0,99999972	0,99999972	0,99999972	0,99999972	
$1+[3]\Delta L^2\sin^2 B_m - [4]_m\Delta B^2 =$	1,00000000	1,00000010	1,00000010	1,00000010	
$1+[7]_m\Delta L^2\cos^2 B_m + [8]_m\Delta B^2 =$	1,00000100	1,00000100	1,00000100	1,00000100	
Rezultate finale	$B_2 = 44^g42'07'',2036$		$L_2 = 24^g32'50'',5084$	$A_2 = 260^g71^c63^{cc},630$	

Pentru calcule efective termenii din membrul stîng al relațiilor (7-47) au fost dezvoltați în serie rezultînd:

$$P = s \sin A_m = r_{01} l + r_{21} b^2 l + r_{03} l^3 + [r_{41} b^4 l + r_{23} b^2 l^3 + r_{05} l^5] + \ldots;$$
$$Q = s \cos A_m = s_{10} b + s_{30} b^3 + s_{12} l b^2 + [s_{32} b^3 l^2 + s_{14} b l^4] + \ldots; \quad (7\text{-}48)$$
$$\Delta A'' = t_{01} l + t_{21} b^2 l + t_{03} l^3 + [t_{41} b^4 l + t_{23} b^2 l^3 + t_{05} l^5] + \ldots .$$

Coeficienții r, s și t din relațiile (7-48) se pot extrage din tabelele elipsoidului *Krasovski* în funcție de latitudinea medie B_m. Pentru distanțe $s < 30$ km se poate renunța la termenii cuprinși în parantezele drepte din relațiile (7-48).

Din valorile determinate din primele două relații din (7-48) se deduce:

$$\operatorname{tg} A_m = \frac{P}{Q}, \quad (7\text{-}49)$$

și ca urmare azimutul mediu A_m este determinat. În consecință se poate calcula lungimea liniei geodezice s în dublu mod:

$$s = \frac{P}{\sin A_m} = \frac{Q}{\cos A_m}. \quad (7\text{-}50)$$

Deoarece:

$$A_m = \frac{A_1 + A_2 \mp 200^g}{2}, \quad (7\text{-}51)$$

precum și:

$$A_2 = A_1 \pm 200^g + \Delta A, \quad (7\text{-}52)$$

rezultă:

$$A_1 = A_m - \frac{\Delta A}{2}; \quad A_2 = A_m \pm 200^g + \frac{\Delta A}{2}. \quad (7\text{-}53)$$

Cu relațiile (7-53) s-au determinat și celelalte necunoscute ale problemei. Un exemplu numeric de rezolvare a problemei geodezice inverse cu metoda dezvoltărilor în serie este prezentat în tabelul 7-7, obținîndu-se în același timp și o verificare a rezolvării problemei geodezice directe din tabelele 7-5 și 7-6.

Tabelul 7—7

Elemente inițiale	Denumirea punctului inițial: *Moileni* $B_1 = 44°35'45'',7134$; $L_1 = 24°20'19'',3139$ Denumirea punctului final: *Crucea* $B_2 = 44°42'07'',2037$; $L_2 = 24°32'50'',5084$		
Elemente auxiliare	$B_m = 44°38'56'',4585$ $b = +0,038149025$ $l = +0,075119446$	$b^2 = +0,00145534$ $bl = +0,00286573$ $l^2 = +0,00564293$	$b^3 = +0,000056$ $b^2 l = +0,0002153$ $bl^2 = +0,0001093$ $l^3 = +0,000424$
Coeficienți din tabele	$r_{01} = +220\,355,67401$ $r_{21} = +20,86535$ $r_{03} = -10,65782$	$s_{10} = +308\,685,58889$ $s_{30} = -0,01206$ $s_{12} = -75,49747$	$t_{01} = +7\,027,61888$ $t_{21} = 2,06900$ $t_{03} = 0,69900$
Calcule intermediare	$r_{01} l = +16\,552,99615$ $r_{21} b^2 l = +0,00228$ $r_{03} l^3 = -0,00452$	$s_{10} b = +11\,776,05424$ $s_{30} b^3 = -0,00000$ $s_{12} b l^2 = -0,01626$	$t_{01} l = +527,91084$ $t_{21} b^2 l = +0,00023$ $t_{03} l^3 = +0,00030$
	$\sin A_m = +16\,552,99391$ $\operatorname{ctg} A_m = +1,405650518$ $\sin A_m = +0,814838600$ $\cos A_m = +0,579687901$	$s \cos A_m = 11\,776,03799$ $A_m = 60^g63^c48^{cc},953$	$\Delta A'' = +527,91137$ $\Delta A^{cc} = 16^c29^{cc},3561$
Rezultate finale	$s = 20\,314,445$ m	$A_1 = 60^g55^c34^{cc},275$	$A_2 = 260^g71^c63^{cc},631$

Revenind la metoda argumentelor medii, formulele principale pentru problema geodezică inversă sînt:

$$P = s \sin A_m = \frac{l \cos B_m}{[2]_m} (1 - [3]\, l^2 \sin^2 B_m + [4]_m\, b^2);$$
$$Q = s \cos A_m = \frac{b \cos \frac{l}{2}}{[1]_m} (1 + [5]_m\, l^2 \cos^2 B_m - [6]_m\, b^2). \quad (7\text{-}54)$$

Diferența în azimut ΔA se determină cu ultima relație din grupul de formule (7-44). În continuare, prin aplicarea formulelor (7-49) — (7-53) rezultă toate necunoscutele specifice problemei inverse.

În tabelul 7-8 se prezintă rezolvarea problemei geodezice inverse prin metoda argumentelor medii, pe același exemplu considerat în tabelele 7-5 ... 7-7.

Tabelul 7—8

Elemente inițiale	Punct inițial S_1: $B_1 = 44°35'45'',7134$, $L_1 = 24°20'19'',3139$ Punct final S_2: $B_2 = 44°42'07'',2036$, $L_2 = 24°32'50'',5084$	
Elemente auxiliare	$B_m = 44°,64901625$	$\Delta B = 381'',4902$
	$\Delta L = 751'',1945$	$[1]_m = 0,03239542$
	$[2]_m = 0,032285310$	$\eta_m^2 = 0,00341054$
	$V_m^2 = 1,00341054$	$[3] = 9,7935 \cdot 10^{-13}$
	$[4]_m = 9,4689 \cdot 10^{-13}$	$[5]_m = 9,7267 \cdot 10^{-18}$
	$[6]_m = -4,0734 \cdot 10^{-16}$	$[7]_m = 1,9654 \cdot 10^{-12}$
	$[8]_m = 2,9447 \cdot 10^{-12}$	
	$1 - [3]\, \Delta L^2 \sin^2 B_m + [4]_m\, \Delta B^2 = 0,99999986$	
	$1 + [5]_m\, \Delta L^2 \cos^2 B_m - [6]_m\, \Delta B^2 = 1,00000030$	
	$1 + [7]_m\, \Delta L^2 \cos^2 B_m + [8]_m\, \Delta B^2 = 1,00000100$	
Calcule intermediare	$s \sin A_m = 16\,552,9941$	$s \cos A_m = 11\,776,0375$
	$\operatorname{ctg} A_m = 0,71141435$	$A_m = 54°,57140569$
	$\sin A_m = 0,81483861$	$\cos A_m = 0,57968788$
	$\Delta A = 527'',9114$	$\frac{\Delta A}{2} = 263'',9557$
Rezultate finale	$s = 20\,314,445$ m $A_1 = 60^g55^c34^{cc},273$	$s = 20\,314,445$ m $A_2 = 260^g71^c63^{cc},631$

Partea a treia

PROIECTAREA ŞI MATERIALIZAREA ÎN TEREN A REŢELELOR GEODEZICE

Mulţimea punctelor, situate pe suprafaţa Pămîntului, pentru care se cunosc coordonatele într-un sistem unitar de referinţă formează o **reţea geodezică**

Prin planul de învăţămînt al secţiei de geodezie, *cursurilor de geodezie* şi respectiv *gravimetrie geodezică* le revine abordarea proiectării şi realizării următoarelor tipuri de reţele geodezice: reţele de triangulaţie, reţele de nivelment şi reţele gravimetrice-geodezice. Celelalte tipuri de reţele geodezice şi anume: reţele de trilateraţie şi reţele poligonometrice sînt abordate în cadrul *cursului de măsurători geodezice prin unde*.

Triangulaţia, denumită uneori şi *geodezie geometrică*, este o metodă de determinare a coordonatelor B şi L (pe elipsoidul de referinţă) sau a coordonatelor x ,y (în planul de proiecţie) a unei reţele de puncte situate pe suprafaţa Pămîntului.

De obicei, pentru determinarea celei de-a treia coordonate, altitudinea punctelor de triangulaţie, se utilizează nivelmentul trigonometric, nefiind însă excluse şi posibilităţile de determinare prin nivelment geometric.

În acest fel, poziţia în spaţiu a unui punct din reţeaua de triangulaţie geodezică este definită, în mod curent, în raport cu două suprafeţe diferite: pe de o parte *elipsoidul* pentru coordonatele B, L sau *planul de proiecţie* pentru coordonatele x, y şi, pe de altă parte, *geoidul* sau *cvasigeoidul* pentru altitudinea H, în funcţie de sistemul acceptat oficial. Una din problemele ştiinţifice, pusă din nou în actualitate de către *M. Hotine*, *H. Wolf*, *H. Dufour* ş.a., este determinarea celor trei coordonate în raport cu o singură suprafaţă, de regulă în raport cu elipsoidul de referinţă, metodă care a fost fondată de către *H. Bruns* în 1878 şi denumită „geodezie tridimensională" (v. 24.4).

Reţeaua geodezică de nivelment, denumită şi *reţeaua nivelmentului de stat*, constituie baza altimetrică a tuturor determinărilor geodezice, topografice, fotogrammetrice, cartografice sau cadastrale. Punctele reţelei de nivelment geodezic *nu coincid*, de regulă, cu punctele reţelei de triangulaţie geodezică, astfel încît cele două reţele sînt proiectate şi realizate separat, însă în conexiune, avîndu-se în vedere scopul final al lucrărilor geodezice. Spre deosebire de punctele reţelei de triangulaţie geodezică, ale căror trei coordonate sînt determinate cu o precizie relativ omogenă, punctele reţelei de nivelment geodezic sînt, de regulă, determinate doar altimetric. Altitudinea punctelor din reţeaua de nivelment este mult mai precis determinată în comparaţie cu altitudinea punctelor de triangulaţie, proiectarea, materializarea în teren, metodele de observare şi de prelucrare fiind complet diferite. În schimb, poziţionarea în plan a reperelor de nivelment este realizată mult mai puţin precis, de obicei local, coordonatele x, y (atunci cînd sînt determinate) fiind

folosite doar la identificarea reperelor de nivelment, adică nu au destinaţia specifică punctelor planimetrice de sprijin.

Reţeaua gravimetrică este constituită din puncte în care este determinată mărimea (acceleraţiei) gravităţii g. De regulă aceste puncte au altitudinea precis determinată, în sistemul altimetric de stat, coordonatele plane x, y avînd însă acelaşi rol ca în cazul reperelor de nivelment.

Capitolul 8
STRUCTURA REŢELELOR GEODEZICE

8.1. POZIŢIONAREA REŢELELOR GEODEZICE

Poziţionarea reţelelor geodezice în raport cu o anumită suprafaţă de referinţă sau (şi) într-un anumit sistem de referinţă este una dintre problemele complexe şi de bază ale geodeziei. Rezolvările diferă în funcţie de tipul reţelei, de destinaţia sa, de mărimea suprafeţei acoperită de reţea, precum şi de alţi parametri, care se vor menţiona în acest capitol. De aceea, expunerea va căuta, pentru început, să abordeze o rezolvare cu caracter de generalitate, urmînd ca în 8.2—8.4 să se facă particularizări corespunzătoare, de natură să aducă şi clarificări asupra principiilor care se vor enunţa iniţial.

8.1.1. SUPRAFEŢE DE REFERINŢA

Reţelele geodezice sînt reprezentate pe suprafeţe diferite, dintre care unele au fost descrise în primele două părţi ale manualului, iar altele formează obiectul *cursului de cartografie*.

8.1.1.1. **Suprafeţe de nivel. Geoidul. Sferoidul de nivel. Cvasigeoidul.** Aceste suprafeţe au fost definite în capitolele 2 şi 4 ale manualului, fiind folosite, aproape exclusiv pentru definirea teoretică şi realizarea practică a reţelelor de nivelment şi a reţelelor gravimetrice. Pentru reţelele planimetrice utilizarea acestor suprafeţe este extrem de limitată, doar în cazul unei problematici cu caracter global, la nivelul întregii planete.

8.1.1.2. **Elipsoidul de referinţă.** Reţelele de triangulaţie care se desfăşoară pe suprafeţe mari (o ţară sau un grup de ţări) sînt reprezentate, de regulă, pe suprafaţa elipsoidului de referinţă sau în raport de această suprafaţă.

În raport cu geoidul, elipsoidul de referinţă poate ocupa o poziţie oarecare, în funcţie de modalitatea practică utilizată la determinarea parametrilor săi (semiaxa mare a şi turtirea f) şi a orientării sale în interiorul geoidului. În caz general, verticala V la suprafaţa geoidului G, care trece printr-un punct oarecare P situat pe suprafaţa Pămîntului S, nu coincide cu normala N la suprafaţa elipsoidului E care trece prin acest punct, ci formează cu aceasta un unghi oarecare u, denumit unghi de *deviaţie a verticalei* (v. fig. 5-2, 8-1 şi 5.2).

Pentru aducerea reţelelor de triangulaţie, existente pe suprafaţa fizică a Pămîntului, pe suprafaţa elipsoidului de referinţă s-au propus mai multe

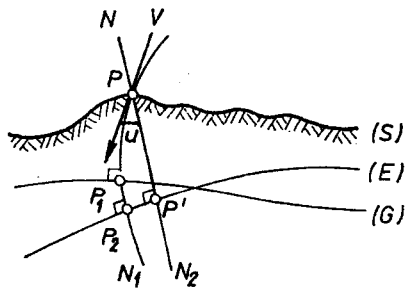


Fig. 8-1. Reprezentarea punctelor pe elipsoidul de referinţă prin metoda proiectării.

metode, dintre care *metoda proiectării* are cea mai mare aplicabilitate.

În această metodă se procedează la aducerea elementelor măsurate (unghiuri, direcţii, lungimi ş.a.) pe suprafaţa elipsoidului, prin aplicarea unor corecţii, care vor fi prezentate în cap. 20. Există două posibilităţi în acest sens şi anume:

Metoda Pizzetti. Punctul P de pe suprafaţa fizică a Pămîntului (fig. 8-1) este proiectat, mai întîi, cu ajutorul verticalei V, pe suprafaţa geoidului în P_1, urmînd ca apoi, cu ajutorul normalei N_1 la elipsoid, să fie proiectat în P_2, pe suprafaţa elipsoidului de referinţă. Metoda aceasta introduce complicaţii însemnate, prin faptul că presupune cunoaşterea curburilor verticalelor, necesare la stabilirea corecţiilor în prima etapă a proiectării şi de aceea nu a cunoscut pînă în prezent o aplicabilitate practică deosebită.

Metoda Bruns-Helmert. Punctul P de pe suprafaţa fizică a Pămîntului este proiectat în P' pe suprafaţa elipsoidului, cu ajutorul normalei N_2 la această suprafaţă. Metoda aceasta este mult mai practică şi a fost aplicată pe larg, sub conducerea lui *F.N. Krasovski*, la realizarea triangulaţiei *U.R.S.S.*, a triangulaţiei vest-europene, precum şi a altor triangulaţii.

Coordonatele tuturor punctelor triangulaţiei de stat din ţara noastră se determină prin metoda proiectării *Bruns-Helmert*.

Diferenţele dintre aceste două posibilităţi menţionate sînt reflectate sintetic de relaţiile (5-42).

8.1.1.3. **Sfera de rază medie.** În partea a doua a manualului (6.3.2. s-a demonstrat posibilitatea înlocuirii (pentru suprafeţe mici) elipsoidului de referinţă prin sfera de rază medie (sfera *Gauss*) de rază $R = \sqrt{MN}$, unde M este raza de curbură a elipsei meridiane şi N — raza de curbură a primului vertical, calculate pentru un punct situat în centrul teritoriului considerat. Această suprafaţă de referinţă este des folosită în calculele geodezice din reţeaua de triangulaţie de ordin superior.

8.1.1.4. **Planul de proiecţie.** În reţelele de triangulaţie de îndesire, numărul punctelor este extrem de mare şi de aceea nu se mai pot folosi comod calculele pe elipsoid sau pe sfera medie, fiind necesar să se treacă la o suprafaţă plană, prin adoptarea unui anumit sistem de proiecţie cartografică.

În ţara noastră este folosit, din anul 1951, sistemul de proiecţie conformă *Gauss-Krüger*, suprafaţa ţării fiind cuprinsă în fusele 34 şi 35 (sau prescurtat: fusele 4 şi 5) cu meridianele axiale de 21° şi 27°, avîndu-se ca bază elipsoidul *Krasovski*. Este de menţionat că în unele regiuni ale ţării există încă multe puncte ale reţelei vechi de triangulaţie, calculele efectuîndu-se, uneori, în proiecţia stereografică, pe elipsoidul *Hayford*.

Începînd cu anul 1971 în ţara noastră s-a introdus un nou sistem de proiecţie stereografică, denumită *sistemul de proiecţie stereografică 1970*, cu elipsoid de referinţă *Krasovski*, pe care se desfăşoară în prezent calculele geo-topografice.

În paralel cu sistemul de proiecţie stereografică 1971 se foloseşte în continuare sistemul de proiecţie *Gauss-Krüger*, în special pentru triangulaţia de ordin superior.

În situaţii speciale, pentru zone mai mici, se poate folosi şi un *plan local de proiecţie*, la care se raportează reţeaua geodezică considerată (situaţie întîlnită frecvent în lucrările inginereşti de amploare, cum ar fi complexe hidroenergetice, lucrări în bazine miniere ş.a.).

Studiul detaliat al proiecţiilor cartografice se realizează în cadrul *cursului de cartografie*.

8.1.2. DATELE GEODEZICE FUNDAMENTALE DE REFERINŢĂ

Datele geodezice fundamentale de referinţă determină poziţionarea sistemului de coordonate utilizat în interiorul sistemului cartezian geocentric. Deşi în principiu operaţiunea menţionată poate fi realizată pentru oricare dintre sistemele de coordonate posibile, în geodezie intervine în mod deosebit, şi aproape exclusiv, încadrarea sistemului de coordonate global elipsoidal $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ (fig. 2-6) în sistemul cartezian geocentric X, Y, Z (fig. 2-3).

Se consideră necesară ataşarea atributului *fundamental* la noţiunea de date geodezice de referinţă, deoarece la noi în ţară punctul geodezic care a îndeplinit rolul principal în operaţiunea menţionată a fost denumit *punct geodezic fundamental*. În plus, sistemul X, Y, Z de referinţă, este denumit şi sistem fundamental geodezic, ca urmare a rolului pe care îl îndeplineşte.

Determinarea datelor geodezice fundamentale de referinţă, precum şi a punctului geodezic fundamental constituie una dintre problemele extrem de importante, şi în acelaşi timp dificile, ale geodeziei, pentru care se cunosc diferite rezolvări (*Helmert* 1880 şi 1962, *Krasovski* 1955, *Heiskanen— — Moritz* 1967, *Torge* 1975, *Groten* 1979 ş.a.) a căror expunere detaliată, pînă la formule cu aplicabilitate practică, depăşeşte cadrul unui manual universitar.

Dificultăţile de rezolvare a problemei menţionate sînt funcţie directă de complexitatea acceptată la formularea problemei însăşi. Astfel, sub forma sa cea mai generală, determinarea datelor geodezice fundamentale de referinţă ar include determinarea următorilor parametri (fig. 8-2):

— coordonatele $X_{\overline{O}}$, $Y_{\overline{O}}$, $Z_{\overline{O}}$ ale originii sistemului global elipsoidal în interiorul sistemului cartezian geocentric;

— unghiurile de rotaţie $\varepsilon_{\overline{X}}$, $\varepsilon_{\overline{Y}}$, $\varepsilon_{\overline{Z}}$ ale axelor sistemului elipsoidal în raport de sistemul geocentric;

— deoarece se anticipează utilizarea elipsoidului ca suprafaţă de referinţă la rezolvarea problemelor geodezice, la cei 6 parametri menţionaţi se adaugă, inevitabil, parametrii a (semiaxa mare) şi f (turtirea) care definesc elipsoidul (optim) corespondent.

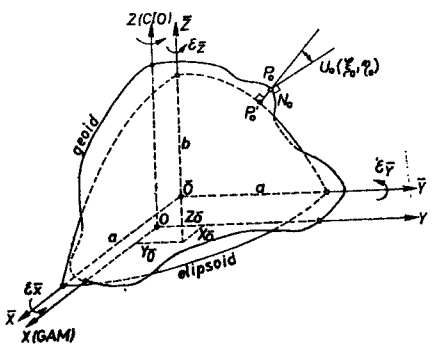


Fig. 8-2. Datele geodezice fundamentale de referinţă.

O asemenea tratare generală ar necesita un spațiu editorial mai extins. Pentru ilustrarea didactică a uneia dintre posibilitățile cele mai utilizate, se expun în continuare principiile metodei *Helmert*, metodă care a fost folosită de către *Hayford* în anul 1909 la determinarea parametrilor primului elipsoid internațional, care îi poartă numele.

În metoda *Helmert* se neglijează unghiurile de rotație dintre axele de coordonate ale celor două sisteme menționate.

$$\varepsilon_{\bar{X}} = \varepsilon_{\bar{Y}} = \varepsilon_{\bar{Z}} = 0.$$

În continuare, este înlocuită determinarea coordonatelor $X_{\bar{0}}$, $Y_{\bar{0}}$, $Z_{\bar{0}}$ cu determinarea componentelor deviației verticalei ξ_0, η_0 și a ondulației geoidului N_0 în punctul geodezic fundamental P_0. Prin intermediul celor trei mărimi ξ_0, η_0, N_0 se realizează, de asemenea, *poziționarea* și *orientarea* elipsoidului de referință în interiorul geoidului.

Recapitulînd, parametrii care definesc datele geodezice fundamentale de referință în metoda *Helmert* sînt: ξ_0, η_0, N_0, a, f.

Pentru a putea efectua prelucrarea datelor pe suprafața elipsoidului de referință, este necesară, *în principiu*, cunoașterea unui azimut geodezic inițial A_{01}, precum și lungimea unei linii geodezice inițiale s_{01} din punctul fundamental P_0 spre un alt punct P_1 din rețea. Deoarece scara rețelei considerate se poate determina și ulterior, în etapa de prelucrare a datelor, prin utilizarea unui număr oarecare de distanțe măsurate, de obicei se face abstracție de lungimea s_{01} în acest stadiu al calculelor.

Metoda *Helmert* presupune o rețea geodezică de suprafață, în care s-au efectuat determinări astronomice de Φ, Λ și α, măsurări de baze geodezice (sau măsurări directe de laturi în rețea), observații de unghiuri sau de direcții. Punctele în care s-au efectuat determinări astronomice complete sînt denumite *puncte Laplace* (v. 5.2.1) și numărul lor este mai mic în comparație cu numărul total al punctelor geodezice din rețeaua considerată.

Calculele se vor efectua pe un elipsoid oarecare, ai cărui parametri a^0 și f^0 sînt considerați ca valori provizorii. Metoda expusă caută să determine alți parametri (a și f), pentru un elipsoid care să corespundă optimal pentru rețeaua considerată:

$$\begin{aligned} a &= a^0 + \mathrm{d}a; \\ f &= f^0 + \mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{8-1}$$

Schema de calcul

1. Într-un punct *Laplace* inițial P_0 din rețea se acceptă, într-o primă etapă, identitatea dintre coordonatele astronomice și cele geodezice, precum și dintre azimutul α_{01}, măsurat către un punct P_1, și cel geodezic A_{01}^0:

$$P_0(B_0^0 = \Phi_0; \quad L_0^0 = \Lambda_0; \quad A_{01}^0 = \alpha_{01}; \quad N_0 = 0). \tag{8-2}$$

Prin urmare, în această etapă de calcul nu se ia în considerație deviația verticalei în punctul inițial și nici a ondulației geoidului în acest punct.

Este recomandabil ca punctul inițial să se afle situat în partea centrală a rețelei.

2. Pe baza elementelor inițiale menționate, precum și a observațiilor din rețea se pot determina, prin calcul, coordonatele geodezice ale tuturor punctelor rețelei, notate B_i^0, L_i^0 (inclusiv pentru punctele *Laplace* din rețea).

3. Într-un punct *Laplace* oarecare P_t, se pot calcula în continuare:

$$\begin{aligned} \Phi_t - B_t^0 &= \xi_t^0; \\ (\Lambda_t - L_t^0)\cos\Phi_t &= \eta_t^0. \end{aligned} \tag{8-3}$$

Cu aceasta se termină etapa de calcul a elementelor preliminarii și se poate trece la rezolvarea problemei propriu-zise. În această problemă necunoscutele sînt:

— modificările în parametrii elipsoidului folosit inițial ($\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}f$);

— modificările în coordonatele punctului inițial, considerate la început ca elemente fixe ($\mathrm{d}B_0$, $\mathrm{d}L_0$, $\mathrm{d}A_0$).

Pe noul elipsoid punctele din rețea vor avea coordonatele B_t, L_t:

$$\begin{aligned} B_t &= B_t^0 + \mathrm{d}B_t; \\ L_t &= L_t^0 + \mathrm{d}L_t. \end{aligned} \tag{8-4}$$

Se caută determinarea diferențelor $\mathrm{d}B_t$, $\mathrm{d}L_t$ sub forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B_t &= \frac{\partial B_t}{\partial B_0}\mathrm{d}B_0 + \frac{\partial B_t}{\partial L_0}\mathrm{d}L_0 + \frac{\partial B_t}{\partial A_0}\mathrm{d}A_0 + \frac{\partial B_t}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial B_t}{\partial f}\mathrm{d}f; \\ \mathrm{d}L_t &= \frac{\partial L_t}{\partial B_0}\mathrm{d}B_0 + \frac{\partial L_t}{\partial L_0}\mathrm{d}L_0 + \frac{\partial L_t}{\partial A_0}\mathrm{d}A_0 + \frac{\partial L_t}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial L_t}{\partial f}\mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{8-5}$$

Deducerea coeficienților necunoscutelor problemei noastre, adică derivatele $\frac{\partial B_t}{\partial B_0}, \frac{\partial B_t}{\partial L_0}, \ldots$ și apoi $\frac{\partial L_t}{\partial B_0}, \frac{\partial L_t}{\partial L_0}, \ldots$ reprezintă calcule complexe (se poate consulta *Helmert* 1880, 1962, sau *Dragomir* 1977 ș.a.).

Pe noul elipsoid, în punctul *Laplace* P_t se pot scrie relațiile cunoscute (v. 5.2.1):

$$\begin{aligned} \xi_t &= \Phi_t - B_t = \Phi_t - (B_t^0 + \mathrm{d}B_t) = \xi_t^0 - \mathrm{d}B_t; \\ \eta_t &= [\Lambda_t - (L_t^0 + \mathrm{d}L_t)\cos\varphi_t] = \eta_t^0 - \mathrm{d}L_t\cos\Phi_t, \end{aligned} \tag{8-6}$$

astfel încît rezultă:

$$\begin{aligned} \xi_t &= \xi_t^0 - \frac{\partial B_t}{\partial B_0}\mathrm{d}B_0 - \frac{\partial B_t}{\partial L_0}\mathrm{d}L_0 - \frac{\partial B_t}{\partial A_0}\mathrm{d}A_0 - \frac{\partial B_t}{\partial a}\mathrm{d}a - \frac{\partial B_t}{\partial f}\mathrm{d}f; \\ \eta_t &= \eta_t^0 - \frac{\partial L_t}{\partial B_0}\cos\Phi_t\,\mathrm{d}B_0 - \frac{\partial L_t}{\partial L_0}\cos\Phi_t\,\mathrm{d}L_0 - \frac{\partial L_t}{\partial A_0}\cos\Phi_t\,\mathrm{d}A_0 - \\ &\quad - \frac{\partial L_t}{\partial a}\cos\Phi_t\,\mathrm{d}a - \frac{\partial L_t}{\partial f}\cos\Phi_t\,\mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{8-7}$$

Pentru a da semnificația fizică completă metodei, *Helmert* introduce în locul necunoscutelor $\mathrm{d}B_0$ și $\mathrm{d}L_0$, noi necunoscute $\mathrm{d}\xi_0$ și $\mathrm{d}\eta_0$, obținute din relațiile:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \Phi_0 - B_0; \\ \eta_0 &= (\Lambda_0 - L_0)\cos\varphi_0, \end{aligned} \tag{8-8}$$

care prin diferențiere devin:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi_0 &= -\mathrm{d}B_0; \\ \mathrm{d}\eta_0 &\approx -\mathrm{d}L_0\cos\Phi_0. \end{aligned} \tag{8-9}$$

Prin această înlocuire se pune în evidență, și mai pregnant, faptul că în punctul inițial P_0 nu se mai neglijează, în noua etapă de calcul, deviația verticalei.

Cu aceasta, relațiile (8-7) devin:

$$\xi_t = \xi_t^0 + \frac{\partial B_t}{\partial B_0} d\xi_0 + \frac{\partial B_t}{\partial L_0} \sec \varphi_0 \, d\eta_0 - \frac{\partial B_t}{\partial A_0} dA_0 - \frac{\partial B_t}{\partial a} da - \frac{\partial B_t}{\partial f} df;$$

$$\eta_t = \eta_t^0 + \frac{\partial L_t}{\partial B_0} \cos \Phi_t \, d\xi_0 + \frac{\partial L_t}{\partial L_0} \frac{\cos \Phi_t}{\cos \Phi_0} d\eta_0 - \frac{\partial L_t}{\partial A_0} \cos \Phi_t \, dA_0 - \tag{8-10}$$

$$- \frac{\partial L_t}{\partial a} \cos \Phi_t \, da - \frac{\partial L_t}{\partial f} \cos \Phi_t \, df.$$

Pentru determinarea celor 5 necunoscute $d\xi_0$, $d\eta_0$, dA_0, da, df sînt necesare 3 puncte *Laplace* în care se scriu în total 3 perechi de ecuații de forma (8-10), care pot fi rezolvate prin metoda celor mai mici pătrate, pe baza condiției pusă de *Helmert*:

$$[\xi^2 + \eta^2] \rightarrow \text{minim}. \tag{8-11}$$

Prin condiția de minim (8-11) se pune în evidență *caracterul bidimensional* al metodei Helmert, poziționarea pe înălțime a elipsoidului nefiind abordată. Metoda presupune o repartizare relativ uniformă a punctelor geodezice pe suprafața considerată, motiv pentru care este cunoscută și sub denumirea de *metoda suprafețelor*. Sistemul de prelucrare condiționează reducerea observațiilor pe suprafața elipsoidului de referință (așa-numita metodă a proiecției, a lui *Helmert*).

La ecuațiile (8-10), (8-11) specifice metodei *Helmert*, se mai pot adăuga și altele, obținute din ecuația *Laplace* (v. 20.1.2.2).

$$A \approx \alpha - (\Lambda - L) \sin \Phi. \tag{20-12}$$

Considerînd și formula (5-43), relația (20-12) se poate scrie și sub forma:

$$\eta^\alpha = (\alpha - A) \operatorname{ctg} \Phi. \tag{8-12}$$

Indicele superior la componenta deviației verticalei în primul vertical η^α din relația (8-12) indică faptul că aceasta este obținută, în principal, din determinări de azimut. În acest context relația (5-43) ar trebui scrisă sub forma:

$$\eta^\Lambda = (\Lambda - L) \cos \Phi, \tag{5-43}$$

punîndu-se în evidență faptul că această componentă se poate determina și din diferențe de longitudini.

Prin urmare, relațiile (8-9) ar deveni în această situație:

$$\begin{aligned} d\xi_0 &= - dB_0; \\ d\eta_0^\Lambda &= - dL_0 \cos \Phi_0; \\ d\eta_0^\alpha &= - dA_0 \operatorname{ctg} \Phi_0, \end{aligned} \tag{8-13}$$

numărul de necunoscute mărindu-se cu necunoscuta $d\eta_0^\alpha$. În schimb se pot obține noi ecuații de forma:

$$\eta^\alpha - \eta^\Lambda = \omega \operatorname{ctg} \Phi,$$

unde:

$$\omega = \eta^\alpha \operatorname{tg} \Phi - \eta^\Lambda \operatorname{tg} \Phi = \alpha - A - (\Lambda - L) \sin \Phi. \tag{8-14}$$

Ecuațiile de forma (8-14) se dezvoltă analog ca în cazul ecuațiilor (8-6), iar condiția de minim (8-11) devine:

$$[\xi^2 + \eta^2 + \omega^2] \rightarrow \text{minim}, \tag{8-15}$$

sau, mai exact, cînd se ține seama și de abaterile standard apriorice ale mărimilor componente:

$$\left[\left(\frac{\xi}{s'_\xi}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{s'_\eta}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{s'_\omega}\right)^2\right] \rightarrow \text{minim}. \tag{8-16}$$

În acest fel se realizează și standardizarea (omogenizarea) corecțiilor, ceea ce conferă unele avantaje în prelucrare (v. 20.4.4).

În determinările cu *caracter tridimensional* intervin trei translații spațiale ale elipsoidului în raport de geoid, precum și modificări ale parametrilor elipsoidului folosit, necunoscutele problemei fiind: $d\xi_0$, $d\eta_0$, dN_0, da, df (de regulă se acceptă paralelismul axelor sistemelor global elipsoidal și respectiv global geocentric).

Aceste modificări care survin în parametrii care determină datele geodezice fundamentale de referință conduc la modificarea coordonatelor geodezice ale tuturor punctelor din rețea, respectiv la modificarea componentelor deviațiilor verticalelor și ondulațiilor geoidului în aceste puncte. În continuare se prezintă formulele *F.A. Vening Meinesz*, prin care se pot calcula aceste modificări în punctul P_k (*Torge*, 1975):

$$\begin{aligned} d\xi_k &= [\cos B_0 \cos B_k + \sin B_0 \sin B_k \cos (L_k - L_0)] \, d\xi_0 - \\ &- \sin B_k \sin (L_k - L_0) \, d\eta_0 - [\sin B_0 \cos B_k - \\ &- \cos B_0 \sin B_k \cos (L_k - L_0)] \cdot \rho'' \left[\frac{dN_0}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 B_0 \, df\right] - \\ &- 2 \cos B_k (\sin B_k - \sin B_0) \, df \rho''; \\ d\eta_k &= \sin B_0 \sin (L_k - L_0) \, d\xi_0 + \cos (L_k - L_0) \, d\eta_0 + \\ &+ \cos B_0 \sin (L_k - L_0) \, \rho'' \left(\frac{dN_0}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 B_0 \, df\right); \\ dN_k &= - \frac{M_0}{\rho''} [\cos B_0 \sin B_k - \sin B_0 \cos B_k \cos (L_k - L_0)] \, d\xi_0 - \\ &- \frac{N'_0}{\rho''} \cos B_k \sin (L_k - L_0) \, d\eta_0 + [\sin^2 B_k \sin B_0 + \\ &+ \cos B_0 \cos B_k \cos (L_k - L_0)] \cdot (dN_0 + da + a \sin^2 B_0 \, df) - da + \\ &+ (\sin^2 B_k - 2 \sin B_0 \sin B_k) \, a \, df. \end{aligned} \tag{8-17}$$

Observații. 1. Corecțiile $d\xi_0$, $d\eta_0$ sînt exprimate în secunde sexagesimale, corecțiile dN_0 și da în metri, iar df este o mărime adimensională.

2. Pentru a nu crea confuzii referitor la notații, în formulele (8-17) raza de curbură a primului vertical considerată în punctul P_k a fost notată cu N'_k.

Presupunînd cunoscute, dintr-o determinare anterioară, valorile provizorii ξ_k^0, η_k^0, N_k^0 în punctul P_k considerat, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \xi_k^0 + d\xi_k; \\ \eta_k &= \eta_k^0 + d\eta_k; \\ N_k &= N_k^0 + dN_k. \end{aligned} \tag{8-18}$$

Analog ca în cazul metodei *Helmert* rezultă ecuații de forma (8-10) și (8-14), în care intervin necunoscutele $d\xi_0$, $d\eta_0$, dN_0, da și df, iar ca termeni liberi ξ_k^0, η_k^0, N_k^0, ω_k^0, condiția de minim sub care se desfășoară prelucrarea fiind:

$$\left[\left(\frac{\xi}{s'_\xi}\right)^2+\left(\frac{\eta}{s'_\eta}\right)^2+\left(\frac{\omega}{s'_\omega}\right)^2+\left(\frac{N}{s'_N}\right)^2\right]\rightarrow \text{minim.} \qquad (8\text{-}19)$$

Desigur, cu cît suprafața considerată este mai mare, precum și cît mai dens acoperită cu puncte *Laplace* (fără goluri în zone greu accesibile), rezultatul este mai semnificativ.

O b s e r v a ț i i. **1.** Triangulația veche a României, dinaintea celui de-al doilea război mondial, a avut ca punct fundamental observatorul astronomic militar din *Dealul Piscului* (în *București*, în imediata apropiere a *Parcului Tineretului*). Determinarea datelor fundamentale s-a făcut numai în ipotezele (8-2). Rezultă că s-a acceptat tangența elipsoidului la geoid în punctul fundamental, iar orientarea elipsoidului *Hayford* folosit s-a bazat numai pe determinările astronomice din acest punct.

2. Actuala triangulație de stat a *R.S. România*, ca și a altor țări socialiste europene, are următoarele date geodezice fundamentale:

— elipsoidul de referință este elipsoidul *Krasovski* 1942 (v. tabelul 6 — 1);

— punctul fundamental este punctul *Pulkovo* (*U.R.S.S*) cu următoarele coordonate: latitudinea = 59°46'15'', 359, longitudinea = 30°19'28'', 318.

Azimutul geodezic din *Pulkovo* (piramida *A*) spre punctul *Bugrî* este 121°06'42'', 305. Prin urmare ipotezele folosite sînt de asemenea (8-2).

3. În prezent, colectivul de specialitate din cadrul *Direcției topografice militare — DTM* (*Rotaru* 1982) lucrează la elaborarea unui nou sistem de date geodezice fundamentale de referință, pentru triangulația de stat din țara noastră. Avînd în vedere că în rețeaua de triangulație de stat există un număr însemnat de puncte *Laplace*, noul sistem de date geodezice fundamentale de referință va depăși, în mod cert, stadiul ipotezelor (8-2), avînd și avantajul unei mai bune adaptări la suprafața geoidului pe teritoriul țării noastre.

4. În funcție de mărimea suprafeței acoperite de observațiile geodezice și astronomice avute la dispoziție, determinările datelor geodezice fundamentale de referință au un caracter local (cînd rețeaua astronomo-geodezică acoperă o anumită zonă dintr-o țară sau o țară de suprafață mică sau medie) ori un caracter regional, continental (cînd rețeaua astronomo-geodezică acoperă astfel de teritorii). Rezultatul este diferit, de la caz la caz, constînd din determinarea unui anume elipsoid, care, prin dimensiuni, poziție și orientare, aproximează geoidul în mod optim, dar numai pentru suprafața considerată (sau cel mult și pentru zone învecinate).

5. Determinarea elipsoidului terestru mediu, precum și poziționarea și orientarea absolută a sistemului de coordonate global elipsoidal, în raport cu sistemul global geocentric, sînt posibile după determinări de coordonate carteziene global-geocentrice pentru unul sau mai multe puncte geodezice ale rețelei considerate.

6. Determinarea datelor geodezice fundamentale de referință este funcție directă de diferențele existente între mărimile astronomice și cele geodezice (ecuațiile (8-3), (8-12) ș.a.). Dar, obținerea mărimilor geodezice este dependentă, la rîndul său, de datele geodezice fundamentale de referință. Prin urmare, pentru rezolvarea acestui complex de probleme, care se intercondiționează, se impune un sistem iterativ de calcul.

7. *Helmert* a menționat pentru prima dată necesitatea scrierii ecuațiilor de forma (8-10) și în punctul inițial P_0. Desigur mențiunea își păstrează valabilitatea și pentru ecuații de forma (8-17). În astfel de ecuații mărimile $d\xi_0$, $d\eta_0$, dN_0 au un dublu rol: al unor corecții și al unor necunoscute, intervenind atît în membrul stîng, cît și în membrul drept al ecuației [datorită ipotezei introdusă prin formula (8-2) rezultă $\xi_0 = \eta_0 = 0$].

8. Pentru rețele geodezice locale, neconstrînse pe rețeaua geodezică de stat, datele de referință pot fi, de exemplu: coordonatele unui punct, preluate din rețeaua de stat, precum și orientarea unei laturi, urmînd ca scara rețelei să fie determinată prin măsurători de laturi efectuate în rețeaua geodezică locală.

8.1.3. PUNCTUL ZERO FUNDAMENTAL ÎN REȚEAUA DE NIVELMENT

Rețelele de nivelment de stat sînt racordate la un *punct fundamental* numit și *punct zero fundamental* sau *punct origine*.

Stabilirea și utilizarea punctului zero fundamental implică, în principiu, următoarele două probleme:

8.1.3.1. **Problema amplasamentului punctului zero fundamental.** Se pot semnala următoarele tipuri de soluționări ale acestei probleme:

● Amplasarea punctului zero fundamental în imediata apropiere a coastelor mărilor și oceanelor, ceea ce oferă avantajul unor legături directe, prin volum minim de lucrări, dintre acest punct și instrumentele prin care se controlează și înregistrează variația în timp a nivelului mării respective. În schimb, stabilitatea reperului este mică, deoarece zonele de coastă sînt, aproape fără excepție, zone caracterizate prin mișcări verticale remarcabile în decursul anilor.

● Amplasarea punctului zero fundamental în zone geologice stabile, de preferat în zone stîncoase, la o depărtare oarecare de nivelul mării. Desigur asemenea soluție oferă o mai bună stabilitate în timp a reperului zero fundamental. Depărtarea față de coastă reprezintă un impediment mai mic în raport cu avantajul obținut, mai ales dacă se are în vedere precizia actuală a lucrărilor de nivelment, precum și viteza de execuție.

8.1.3.2. **Problema verificării stabilității punctului zero fundamental.** O rezolvare definitivă, cu pretenții de rigoare deplină, pentru această problemă este practic imposibilă. Sînt însă practicate soluțiile prezentate în continuare:

● Stabilitatea reperului fundamental este urmărită în raport cu nivelul mării, cu care reperul se află în legătură. Concluziile nu pot fi însă acceptate ca edificatoare, deoarece însuși nivelul mărilor este în continuă modificare în timp.

Înregistrarea continuă a variațiilor temporale ale nivelului mării se realizează fie prin instalații complexe denumite *medimaremetre*, *medimaregrafe* sau mai simplu *maregrafe*, fie mai simplu prin mire maritime. Cauzele acestor variații sînt extrem de complexe (*Dragomir* ș.a. 1977), ceea ce generează dificultăți mari în filtrarea numerică a rezultatelor în scopul evidențierii unuia dintre parametrii principali componenți.

Fiecare maregraf este racordat la un grup de 3-5 repere de nivelment (unul dintre aceștia fiind denumit „reper principal") amplasați în apropierea sa, iar prin intermediul „nivelmentului de coastă" la rețeaua de nivelment de stat. În plus, sînt absolut necesare informații cu caracter continuu privind condițiile climaterice, temperatura și densitatea apei mării pentru a se putea efectua prelucrările matematice ulterioare.

La noi în țară *Institutul geografic militar* (*IGM*) a instalat un medimaremetru în anul 1895 în *Constanța* (lîngă farul genovez) care a funcționat pînă în anul 1903. În anul 1910 *IGM* reinstalează un medimaremetru care este distrus în anul 1916, determinările reducîndu-se la citiri pe o miră pînă în anul 1932. *Direcția porturilor maritime* a instalat un maregraf, în anul 1932, între danele 10 și 11, care funcționează și în prezent.

Recent s-au instalat noi maregrafe pe litoralul nostru şi anume în august 1974 în portul *Tomis* şi în anul 1975 în portul Mangalia, responsabilitatea funcţionării, prelucrării şi interpretării rezultatelor revenind *Institutului de geodezie, fotogrammetrie, cartografie şi organizarea teritoriului* (*IGFCOT*).

Prelucrarea înregistrărilor continue de maregraf a pus în evidenţă o ridicare a nivelului mărilor şi oceanelor în valoare medie de aproximativ +0,8 mm/an. Pentru asemenea scopuri se pot utiliza, cu rezultate pozitive, doar observaţii care acoperă o perioadă mai mare de 18,6 ani cît este estimată perioada pe care o are mareea nodală.

Pe baza datelor înregistrate la maregraful din *Constanţa*, pe o perioadă de 40 ani, *IGFCOT* a determinat viteza de creştere a nivelului *Mării Negre* ca fiind de aproximativ +4 mm/an (*Drăghici*, 1974).

● Maregrafele instalate în lungul coastei la intervale de 100—300 km sînt racordate între ele printr-o reţea de nivelment geodezic repetat, la anumite intervale de timp. Prelucrarea în comun, atît a înregistrărilor de maregraf, cît şi a nivelmentului repetat are ca obiectiv determinarea unor corecţii şi pentru determinările nivelitice, dar şi pentru înregistrările de maregraf (*Ghiţău* 1976, *Dragomir* ş.a., 1977). În acest fel maregrafele apar ca instrumente de control relativ al variaţiilor nivelului mării. În plus, o asemenea prelucrare porneşte de la ipoteza existenţei deplasărilor verticale ale scoarţei terestre, care va fi obţinută prin modelul de calcul folosit.

Dacă se realizează şi o legătură între diferite mări şi oceane, ceea ce presupune lucrări de mare amploare, controlul reciproc al maregrafelor şi respectiv al reţelei de nivelment general se răsfrînge şi asupra verificării stabilităţii diferitelor puncte zero fundamentale naţionale.

● Pentru punctele zero fundamentale amplasate în zone continentale cu mişcări crustale verticale mici, se acceptă, de regulă, o stabilitate mult mai mare în comparaţie cu ceilalţi reperi din reţeaua de nivelment de ordin superior. În acest fel problema verificării stabilităţii reperului zero fundamental nu se mai pune. Dar, nu trebuie pierdut din vedere faptul că poziţionarea sa într-o astfel de zonă are un caracter relativ, fiind rezultată din studii care au avut la bază tot lucrări de nivelment şi înregistrări de maregraf.

Lucrările de nivelment executate înainte de 1951 au fost racordate la o placă de bronz instalată pe chei în apropierea maregrafului din *Constanţa*. Această placă poartă, printre altele, înscrisă altitudinea sa de 2,48 m faţă de „zero mină maregraf", adică faţă de nivelul mării, acceptat sau presupus la data instalării maregrafului.

Direcţia topografică militară, folosind datele înregistrărilor la maregraful din portul *Constanţa*, în intervalul 1933—1975, a stabilit nivelul mediu al *Mării Negre* la epoca 1975. A rezultat o creştere a nivelului mării cu + 0,139 m faţă de zero al mirei maregrafului, astfel încît altitudinea plăcii de bronz, menţionată mai înainte, a fost stabilită la 2,341 m. Prin intermediul unor lucrări de nivelment geodezic repetat (în anii 1962, 1963, 1964, 1970 şi 1972) însoţite de determinări gravimetrice, s-a calculat altitudinea reperului fundamental de tip *I-DTM* din *Capela militară* din *Constanţa*, care a fost considerat, pînă în anul 1982, reperul zero fundamental pentru reţeaua de nivelment de stat din ţara noastră. Sistemul de nivelment folosit actualmente în ţara noastră este denumit „sistem *Marea Neagră* zero 1975".

Fig. 8-3. Diferenţele de nivel dintre „zero *Marea Neagră*" şi „zero *Marea Baltică*":
1 — determinare a Direcţiei topografice militare; *2, 3* — determinări ale Comisiei de stat a apelor; *4* — determinare a Institutului de geodezie, fotogrammetrie, cartografie şi organizarea teritoriului.

Nivelmentul raportat la zero *Marea Baltică* a fost introdus în ţară prin mai multe puncte, dintre care *Giurgiuleşti* şi *Ungheni* au constituit, de asemenea, puncte de plecare în noi sisteme de altitudini (aşa-numitele sisteme *Marea Baltică I* şi respectiv II). Reperii de legătură la reţeaua noastră au fost amplasaţi în apropierea punctelor de frontieră menţionate, în localităţile *Galaţi* şi respectiv *Iaşi*.

Studii mai recente întreprinse în cadrul *IGFCOT* (*Drăghici* ş.a., 1979) au condus la necesitatea creării unui nou amplasament pentru reperul zero fundamental, în *Dobrogea centrală*, la circa 53 km nord de *Constanţa* între localităţile *Tariverde* şi *Cogealac*. În această zonă stînca formată din şisturi verzi este la suprafaţă. Reperul, construit din oţel inox, este protejat de o construcţie de beton.

Există mai multe determinări ale diferenţei dintre „zero *Marea Neagră*" şi „zero *Marea Baltică*", efectuate la diferite perioade de timp, dintre care unele pot fi urmărite în figura 8-3. Se poate semnala faptul că şi alte instituţii au făcut astfel de determinări, în diverse zone din ţară, rezultînd însă alte diferenţe. De aceea problema utilizării unitare a întregului volum de măsurători de nivelment geodezic, efectuate în diverse perioade de timp, preocupă încă specialiştii din cadrul *DTM* şi *IGFCOT* (*Jalbă*, 1982). Adoptarea unei diferenţe unitare pentru tot teritoriul ţării, dintre măsurători efectuate în sistem *Marea Baltică* şi respectiv sistem *Marea Neagră*, s-a dovedit a nu fi o soluţie acceptabilă pentru determinări de producţie.

În ţara noastră s-au mai folosit pentru unele lucrări şi alte „puncte zero" (*Botez* 1969, *Drăghici*, 1974 ş.a.):

— *punctul zero Sulina*, stabilit pe baza observaţiilor la mira din port, în anul 1857;

— *punctul zero Marea Adriatică* situat mai sus cu 0,153 m faţă de zero *Marea Neagră* (valoarea stabilită în anul 1923).

8.1.4. PUNCTUL FUNDAMENTAL ÎN REŢEAUA GRAVIMETRICĂ

Reţeaua gravimetrică a ţării noastre are ca reper fundamental staţia de pendul *Surlari*, în cadrul *Observatorului geofizic*, punctul gravimetric fiind cunoscut fie sub numele de *Surlari*, fie sub numele de *Căldăruşani*. Determinările au fost efectuate în anii 1947 şi 1948 cu un aparat tetrapendular *Askania*, de către *M. Socolescu* obţinîndu-se valoarea 980 542,90 mgal în sistemul vechi *Potsdam* (*Kühnen-Furtwängler*).

În gravimetrie este de remarcat, mult mai pregnant decît în cazul triangulaţiei sau nivelmentului, definirea unui *sistem internaţional de referinţă*, la care urmează să se racordeze reţelele naţionale.

În țara noastră punctele *Surlari* și *Roșu* (*București*) au fost racordate de către *M. Socolescu* la punctul fundamental internațional *Potsdam*. Acesta publică în 1950 rezultatele obținute pentru punctul *Roșu*:

$$g_{Potsdam} - g_{Roşu} = 2\, g_{Potsdam} \frac{T_{Roşu} - T_{Potsdam}}{T_{Potsdam}} =$$

$$= 2 \cdot 981\,275{,}3 \frac{0{,}990\,277\,97 - 0{,}989\,912\,54}{0{,}989\,912\,54} = 724{,}5 \text{ mgal}, \qquad (8\text{-}20)$$

adică:

$$g_{Roşu} = 981\ 275{,}3 - 724{,}5 = 980\ 550{,}8 \text{ mgal}. \qquad (8\text{-}21)$$

De menționat că la nivel internațional au intervenit modificări în intervalul de timp scurs, ceea ce ar implica reconsiderări și noi determinări pentru punctul fundamental gravimetric din țara noastră. Dintre modificările mai semnificative produse, se menționează, în ordine cronologică:

— pornind de la faptul că în raport de determinările lui *Kühnen — Furtwängler*, efectuate la *Potsdam* în perioada 1898—1906, au urmat numeroase determinări în alte puncte de observație (*Heyl* și *Cook — Washington* 1934—1935, *Clark — Londra* 1936—1938, *Agaletki* și *Egorov — Leningrad* 1956 ș.a.) la a XIV-a Adunare generală a *UIGG* din anul 1967 s-a recomandat o nouă valoare a gravității la *Potsdam*:

$$g_{Potsdam} = 981\ 260 \text{ mgal}. \qquad (8\text{-}22)$$

care diferă de cea care intervine în relația (8-20);

— valoarea dată în relația (8-22) era caracterizată de o eroare medie de ± 14 mgal, precum și de alte erori regionale sistematice. Din acest motiv, la a XV-a Adunare generală a *UIGG* din anul 1971, desfășurată la *Moscova*, s-a hotărît adoptarea unui *sistem internațional de referință* a cărui denumire în limba engleză este *International Gravity Standardization Net 1971* (*IGSN 71*). Acest nou sistem de referință, la care ar trebui racordate rețelele gravimetrice naționale, înlocuiește sistemul *Potsdam*, fiind reprezentat de 1854 stații gravimetrice. Sistemul este caracterizat printr-o precizie mult mai mare, de ordinul $\pm 0{,}1$ mgal, în zone cu densitate mai mare de măsurători și de stații de reper precizia fiind chiar de $\pm 0{,}01$ mgal.

8.2. TIPURI DE MĂSURĂTORI EFECTUATE ÎN REȚELELE GEODEZICE

Lucrările efectuate în rețelele geodezice de sprijin au ca obiectiv final determinarea coordonatelor punctelor rețelei într-un anumit sistem de referință. Pentru a realiza acest obiectiv în rețelele geodezice se efectuează diverse măsurători, a căror natură depinde de tipul și destinația rețelei. Prin urmare, într-o rețea dată nu pot fi întîlnite toate tipurile de măsurători geodezice posibile.

8.2.1. UNGHIURI ȘI DIRECȚII AZIMUTALE

Unghiurile și direcțiile azimutale pot determina o rețea de triangulație din punct de vedere geometric. Pentru un triunghi ABC, în care latura AB este cunoscută, ar fi necesar și suficient să se cunoască unghiurile din punctele A și B (fig. 8-4, *a*). În lucrările de triangulație această determinare reprezintă un caz izolat, măsurîndu-se aproape întotdeauna și unghiul din punctul C (fig. 8-4, *b*). În acest fel, măsurătorile unghiulare din punctele A, B, C sînt caracterizate printr-un „grad de libertate" care poate fi anihilat de necesitatea ca unghiurile *compensate* să satisfacă o anumită *condiție geometrică*.

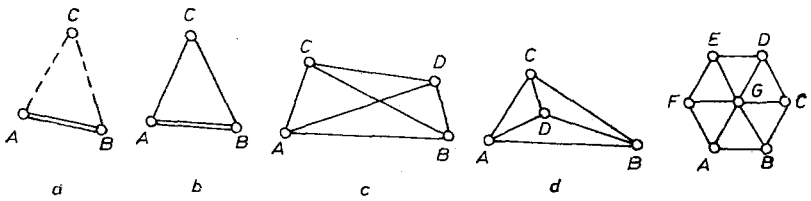


Fig. 8-4. Figuri elementare, componente ale rețelelor de triangulație:
a, *b* — triunghiuri geodezice; *c* — patrulaterul geodezic; *d*, *e* — poligoane cu punct central.

Introducerea unor măsurători unghiulare suplimentare (fig. 8-4, *c*, *d*, *e*) conduce la crearea de noi grade de libertate în rețea, reclamînd respectarea de către valorile compensate a unui număr corespunzător de condiții geometrice.

8.2.2. LUNGIMI

Lungimile măsurate determină scara rețelei de triangulație. Pentru acest scop ar fi strict necesară cunoașterea unei singure lungimi, orice măsurătoare suplimentară conducînd, ca și cazul precedent, la necesitatea respectării unei noi condiții geometrice.

Lungimile din rețelele de triangulație pentru care se acceptă ponderea $p = \infty$ se numesc *baze geodezice*. Asemenea valori provin din măsurători precise, efectuate cu firul invar sau cu ajutorul instrumentelor electronice. Se pot introduce și valori finite pentru ponderi, urmînd ca valoarea cea mai probabilă a acestor lungimi să fie determinată prin compensarea rețelei de triangulație.

Este de menționat că măsurările de lungimi micșorează propagarea erorilor longitudinale din rețelele de triangulație.

În rețelele de triangulație de ordin inferior lungimile pot fi calculate din coordonatele punctelor de ordin superior existente, eventual, în rețea, și care sînt considerate *puncte vechi*.

8.2.3. AZIMUTE ASTRONOMICE

Azimutele astronomice α, determinate după metodele cunoscute de la cursul de *astronomie geodezică* și transformate în azimute geodezice A, pe baza ecuației *Laplace*, determină orientarea rețelei de triangulație.

Utilizarea azimutelor *Laplace* are ca urmare micșorarea propagării erorilor transversale ale rețelelor de triangulație.

În principiu, utilizarea azimutelor *Laplace* este specifică rețelelor mari de triangulație, denumite și *rețele astronomo-geodezice*. Avînd în vedere efectul unor asemenea măsurători este posibil ca în viitor utilizarea azimutelor *Laplace* să se extindă și în rețelele geodezice locale, care au extinderea numai pe o anumită direcție (uneori de ordinul zecilor de kilometri).

Deoarece aceste rețele se realizează cu o precizie superioară rețelelor de stat, micșorarea posibilelor erori de rotație ale întregii rețele se poate realiza prin măsurarea unor azimute *Laplace*, la capetele rețelei.

Prin relații de forma (20-12) — (20-13) azimutele *Laplace* sînt reduse la planul de proiecție, transformîndu-se în orientări notate θ.

În rețelele de ordin inferior, orientările θ pot fi calculate din coordonatele punctelor de ordin superior existente, eventual, în rețea, și care sînt considerate puncte vechi.

8.2.4. COORDONATE ASTRONOMICE

Coordonatele astronomice Φ și Λ, determinate prin metodele prezentate la cursul de *astronomie geodezică* și transformate în coordonate geodezice B și L pe baza relațiilor (5-43) și (5-44):

$$\begin{aligned} B &= \Phi - \xi; \\ L &= \Lambda - \eta \sec \Phi, \end{aligned} \tag{8-23}$$

pot determina poziția rețelei de triangulație pe elipsoidul de referință. Trecerea coordonatelor geodezice B, L în coordonate plane x, y constituie o problemă de transcalculare, tratată în cadrul cursului de *cartografie matematică*.

Coordonatele punctelor de ordin superior sînt preluate, de regulă, ca *elemente fixe* la prelucrarea rețelelor de ordin inferior.

8.2.5. UNGHIURI ZENITALE

Determinarea altitudinilor în rețelele de triangulație se realei zează de cele mai multe ori prin metoda nivelmentului trigonometric care presupune măsurători de unghiuri zenitale.

Așa cum s-a mai menționat, prelucrarea observațiilor zenitale se efectuează, în mod obișnuit, independent de prelucrarea unghiurilor azimutale și a lungimilor. În cadrul „geodeziei tridimensionale", prelucrarea tuturor acestor măsurători se execută în bloc.

8.2.6. DIFERENȚE DE NIVEL

Rețelele de nivelment de stat, precum și alte rețele de nivelment sînt determinate prin măsurători de diferențe de nivel geometric. Metoda nivelmentului geometric este mult mai precisă în comparație cu metoda nivelmentului trigonometric, însă mult mai laborioasă. De aceea, metoda este puțin utilizată în cadrul așa-numitelor rețele geodezice planimetrice (triangulație, trilaterație), numai unde accesul la punctele geodezice prin nivelment geometric nu este extrem de dificil.

8.2.7. MĂSURĂTORI GRAVIMETRICE

În cadrul rețelelor gravimetrice se fac determinări absolute și relative ale accelerației greutății. Determinări relative intervin și în rețelele de nivelment geometric, fiind necesare la calculul corecțiilor specifice sistemului de altitudini folosit (v. cap. 4).

Deși nu în mod direct, determinările gravimetrice intervin și în rețelele de triangulație de ordin superior, la calculul componentelor astronomo-geodezice ale deviației verticalei ξ_{ag}, η_{ag} (5.2.1), precum și al ondulațiilor cvasigeoidului ζ (5.1—5.4) necesare la reducerea observațiilor geodezice la suprafața elipsoidului de referință (v. cap. 20).

8.3. CLASIFICAREA REȚELELOR GEODEZICE

Clasificarea rețelelor geodezice poate fi făcută din mai multe puncte de vedere și are nu numai o importanță formală, de clarificare a noțiunilor care vor fi folosite în continuare, ci va releva mai precis funcțiunea și destinația tipurilor de rețele întîlnite în practică.

8.3.1. CLASIFICAREA REȚELELOR GEODEZICE DUPĂ NUMĂRUL ELEMENTELOR FIXE DIN REȚEA

8.3.1.1. **Rețea geodezică liberă.** Prin rețea geodezică liberă se înțelege, în prezent, o rețea în care intervin numai măsurătorile corespondente necesare determinării geometrice a rețelei. Se consideră că astfel de rețele au un anumit „defect", reflectat de faptul că măsurătorile geodezice propriu-zise nu pot încadra rețeaua considerată într-un anumit sistem de coordonate.

8.3.1.2. **Rețea geodezică fără constrîngeri.** O astfel de rețea geodezică cuprinde, în afara măsurătorilor care determină geometria rețelei, un număr limită, strict necesar și suficient, de elemente pentru încadrarea rețelei considerate în sistemul de coordonate adoptat (v. 10.1.1).

8.3.1.3. **Rețea geodezică constrînsă.** Aceasta este o rețea geodezică in care există un număr suplimentar de elemente, în raport de cele strict necesare și suficiente, pentru determinarea poziționării rețelei în sistemul de coordonate adoptat. Pe astfel de elemente urmează să se realizeze, prin procesul de prelucrare a măsurătorilor, constrîngeri de natură geometrică, analitică.

8.3.2. CLASIFICARE DUPĂ FORMA

Rețelele naționale de triangulație au fost create în mod diferit în decursul vremii fiind îmbunătățite continuu și din punctul de vedere al formei utilizate.

8.3.2.1. **Rețea formată din lanțuri de triangulație.** Acestea erau constituite din triunghiuri, patrulatere geodezice și uneori poligoane cu puncte centrale, fiind dispuse în lungul meridianelor și paralelelor, la distanțe de circa 200 km, la intersecția lor existînd puncte *Laplace*.

Pentru *România* au existat trei lanțuri primordiale dispuse în lungul meridianelor și două lanțuri dispuse în lungul paralelelor, care făceau parte din lanțuri internaționale, fiind sprijinite pe 9 baze geodezice.

În interiorul poligoanelor formate de lanțurile primordiale de ordinul I se crea rețeaua de triangulație complementară de ordinul I, de îndesire, care era ulterior compensată ca o triangulație constrînsă, pe elemente fixe ale lanțurilor primordiale, anterior și independent compensate.

8.3.2.2. **Rețea compactă de triangulație sau rețea de suprafață.** Aceasta acoperă integral teritoriul considerat, fără a se mai crea golurile existente în rețelele formate din lanțuri de triangulație. Compensarea rețelelor compacte este efectuată *în bloc* sau prin metode riguroase de compensare *pe grupe* (care furnizează rezultate egale cu cele de la compensarea în bloc) fiind astfel bazată pe un bogat material informațional, reprezentat de totalitatea măsurătorilor existente pe întregul teritoriu.

Actuala rețea de triangulație a țării noastre este o rețea compactă. Afirmația poate fi extinsă și asupra rețelei de nivelment care, deși este creată sub *formă de poligoane*, asigură acoperirea întregii suprafețe a țării în mod uniform. Rețeaua gravimetrică se realizează, de asemenea, sub forma unor poligoane.

8.3.3. CLASIFICARE DUPĂ DESTINAȚIE

Destinația rețelelor geodezice condiționează forma și structura acestora, existînd o legătură reciprocă între criteriile după care se pot clasifica rețelele geodezice.

8.3.3.1. **Rețea geodezică internațională.** Este creată pe teritoriul mai multor state, pe baza unor convenții și colaborări internaționale. Pe lîngă scopurile științifice, de determinare a formei și dimensiunilor Pămîntului, rețelele internaționale sînt utilizate în scopuri cartografice, militare, economice ș.a. Actualele rețele internaționale sînt de formă compactă, cu structură foarte complexă, cuprinzînd în general toate categoriile de măsurători menționate în 8.2.

Astfel, în figura 8-5 se prezintă rețeaua de triangulație vest-europeană specificînd și faptul că unele țări socialiste din *Europa* au creat o rețea de triangulație similară. În această rețea s-au determinat și coordonatele punctelor rețelei de triangulație de ordin superior a țării noastre.

Din figura 8-5 se observă că unele țări europene au încă, și în prezent, rețeaua de triangulație, de ordin superior sub formă de lanțuri de triangulație.

8.3.3.2. **Rețea geodezică de stat.** Rețeaua geodezică de stat, creată separat pentru triangulație și respectiv pentru nivelment, constituie principala rețea de sprijin pentru toate lucrările topografice-fotogrammetrice, precum și pentru lucrările geodezice de importanță locală, fiind împărțită pe *ordine*: I, II, III și IV.

Rețelele de ord. I (uneori și cele de ord. II) sînt denumite rețele de *ordin superior* [de triangulație (fig. 8-6) și respectiv de nivelment (fig. 8-7)]. Aceste rețele au fost create de către *Direcția topografică militară* începînd cu anul 1956.

Rețeaua gravimetrică de ord. I (fig. 8-8) a fost creată de *Academia R.P.R.*, și *Comitetul Geologic* în perioada 1956—1957.

Rețeaua de triangulație de stat a fost completată cu o *rețea de îndesire* de ord. V, ale cărei puncte au fost determinate nu numai prin metoda triangulației, ci și prin metodele trilaterației, poligonometriei, prin intersecții înainte, înapoi sau combinate. În mod similar, rețeaua de nivelment de stat a fost, de asemenea, îndesită și completată prin numeroase lucrări de

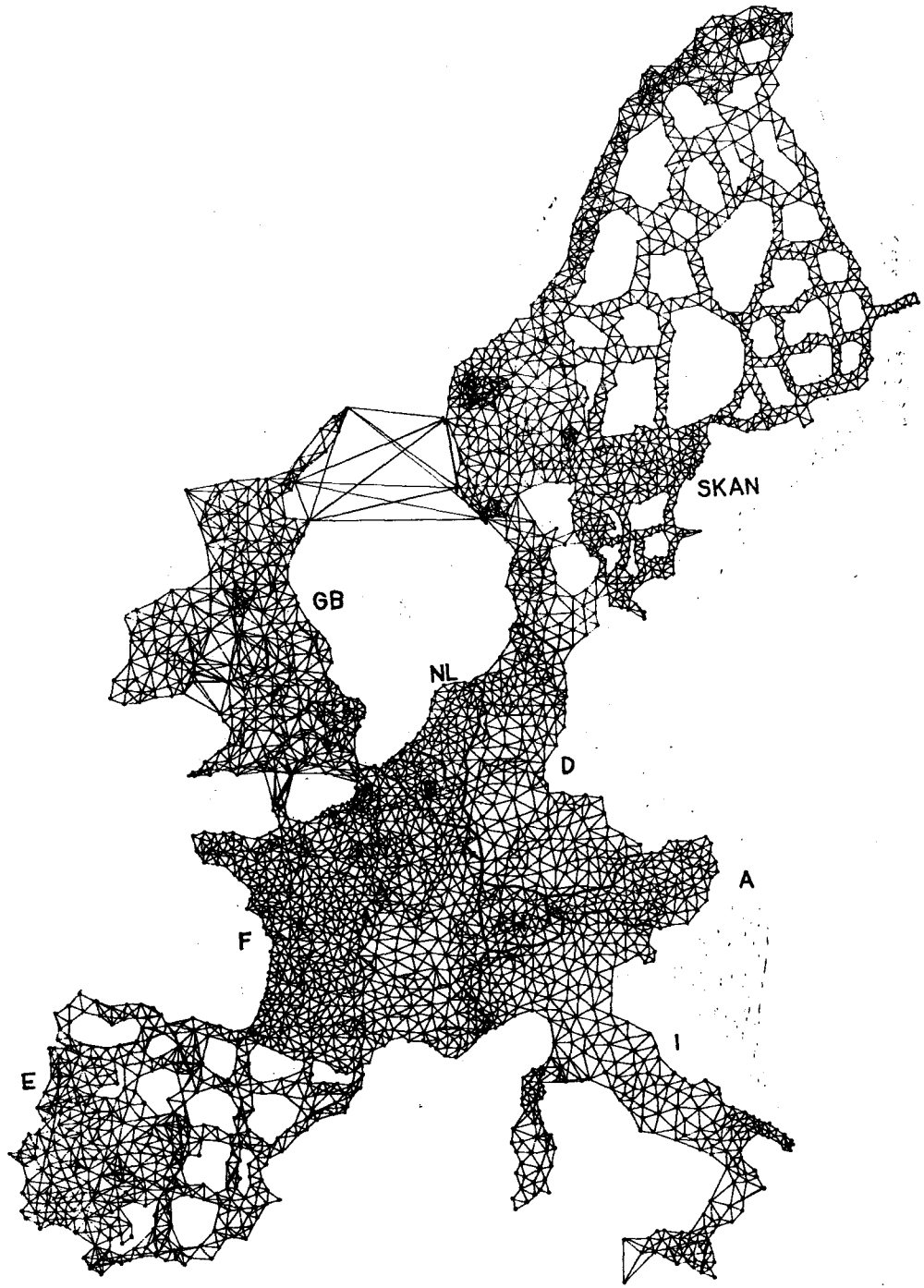


Fig. 8.5. Rețeaua de triangulație vest-europeană.

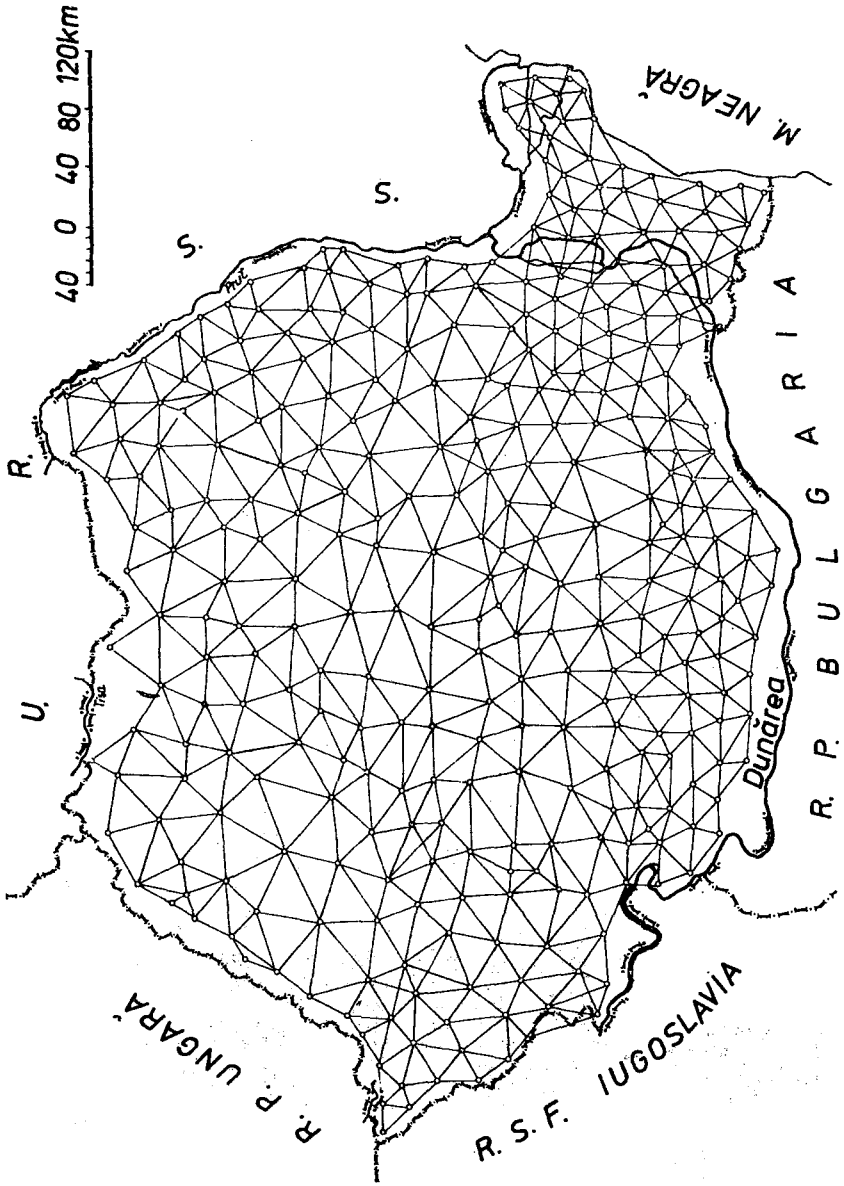


Fig. 8.6. Rețeaua de triangulație de ord. I a *R.S. România.*

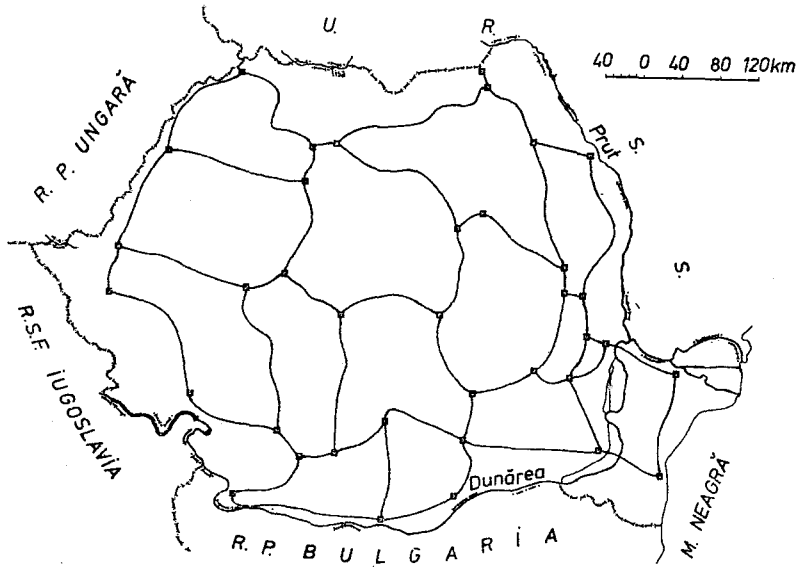


Fig. 8.7. Rețeaua de nivelment de ord. I a *R.S. România.*

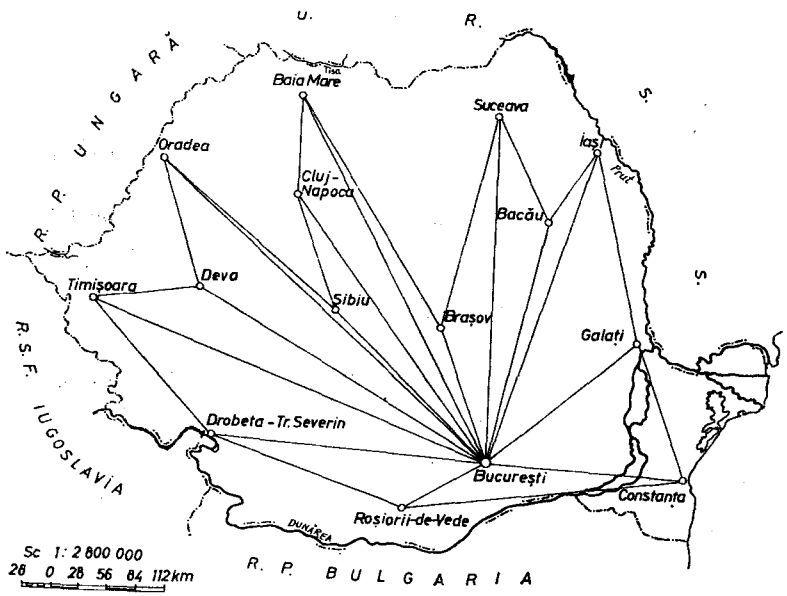


Fig. 8.8. Rețeaua gravimetrică de ord. I a *R.S. România.*

nivelment tehnic, în localităţi ş.a. Aceste ample lucrări de creare a reţelelor geodezice de planimetrie şi de nivelment s-au desfăşurat în cadrul a numeroase instituţii şi întreprinderi de specialitate dintre care un rol deosebit revine *Direcţiei topografice militare* (*DTM*) şi *Institutului de geodezie, fotogrammetrie, cartografie şi organizarea teritoriului* (*IGFCOT*).

În cadrul *IGFCOT* s-a creat *Fondul geodezic şi cartografic republican* care răspunde, printre altele, şi de evidenţa tuturor punctelor geodezice existente pe teritoriul ţării noastre. În acest scop în anul 1975 a luat fiinţă *Banca de date şi informaţii topografice* (*Jalbă*, 1982) care printr-un sistem original de lucru stochează şi pune la dispoziţia tuturor solicitanţilor coordonate şi alte informaţii utile pentru cele peste 150 000 puncte planimetrice şi peste 250 000 repere de nivelment din reţelele noastre geodezice. Eforturile cu totul meritorii pentru realizarea unei asemenea evidenţe au fost coroborate şi cu preocupări de clarificare a sistemelor de coordonate folosite la noi în diverse perioade de timp, precum şi cu utilizarea unor modalităţi diferite de furnizare a datelor, în funcţie de dorinţa utilizatorului.

8.3.3.3. **Reţea geodezică locală.** Pentru lucrări inginereşti de amploare, cum ar fi marile complexe hidroenergetice sau de irigaţii-desecări ş.a., se creează reţele geodezice locale. Uneori precizia interioară a unor astfel de reţele este mai ridicată, în comparaţie cu precizia din reţeaua geodezică de stat. De aceea, în mod obişnuit, reţelele geodezice locale *nu se constrîng*, ci se realizează doar o *încadrare* în reţelele geodezice de stat corespondente.

8.3.4. CLASIFICARE DUPĂ NUMĂRUL DE DIMENSIUNI AL SPAŢIULUI ÎN CARE ESTE AMPLASATĂ REŢEAUA GEODEZICĂ

8.3.4.1. **Reţea geodezică unidimensională.** În această categorie de reţele geodezice se pot încadra reţelele de nivelment, deoarece punctele care constituie aceste reţele au doar *una* dintre coordonate (altitudinea) determinată omogen, într-un sistem de coordonate unitar de referinţă. Celelalte coordonate, ataşate punctelor respective, au un rol de identificare, fiind determinate aproximativ.

8.3.4.2. **Reţea geodezică bidimensională.** În aceste reţele punctele au determinate două coordonate într-un sistem unitar de referinţă: x, y în planul de proiecţie sau B, L pe elipsoidul de referinţă. Aceste reţele se mai numesc şi *reţele planimetrice*, deşi în ultimul caz denumirea este improprie. Cealaltă coordonată (altitudinea) este determinată separat, într-un sistem de coordonate unidimensional.

8.3.4.3. **Reţea geodezică tridimensională.** În aceste reţele toate cele trei coordonate care descriu poziţia punctului într-un sistem cartezian de referinţă sînt determinate omogen şi unitar.

8.3.4.4. **Reţea geodezică în spaţiu cu patru dimensiuni.** Această denumire este atribuită reţelelor geodezice care sînt determinate în mod repetat, la anumite intervale de timp. De menţionat că cele trei coordonate care definesc poziţia spaţială a unui punct din reţea nu sînt determinate, întotdeauna, omogen şi unitar (ca la 8.3.4.3.) ci, adesea, se foloseşte şi soluţia menţionată la 8.3.4.2. Timpul constituie cea de a patra coordonată.

Capitolul 9
MODELE FUNCŢIONAL-STOCHASTICE FOLOSITE CURENT LA PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR EFECTUATE ÎN REŢELELE GEODEZICE DE SPRIJIN

Proiectarea reţelelor geodezice de sprijin constituie o operaţiune complexă, proiectul trebuind să anticipeze şi să se coordoneze corespunzător cu celelalte etape ale realizării reţelelor de sprijin: materializarea reţelelor, executarea observaţiilor şi prelucrarea acestora.

În etapa de proiectare intervin necesităţi de utilizare a unor modele de prelucrare şi de aceea se consideră indicată, atît din punct de vedere didactic, cît şi al economiei de spaţiu, examinarea, în acest capitol, a modelelor funcţional-stochastice care se folosesc curent în operaţiunile de prelucrare a măsurătorilor în reţelele geodezice de sprijin.

Principiile de prelucrare a măsurătorilor geodezice sînt cunoscute studenţilor secţiei de geodezie de la *cursul de teoria erorilor şi metoda celor mai mici pătrate* (*Botez* 1961, *Wolf* 1968, 1975, 1979, *Fotescu* 1975 ş.a.). De aceea, în acest capitol unele dintre noţiuni sau algoritmi de calcul vor fi preluate fără reveniri la demonstraţii, presupuse cunoscute. Din necesităţi de conexiune cu această disciplină, în manual se vor face particularizări sau dezvoltări ale principiilor cunoscute, în funcţie de specificul problematicii abordate.

Se consideră un şir de măsurători:

$$\mathbf{M}^{0T} = \left\| M_1^0, M_2^0, \ldots, M_n^0 \right\|, \tag{9-1}$$

efectuate într-o reţea geodezică de sprijin. În acest capitol atît măsurătorile, cît şi reţeaua geodezică sînt considerate generale, urmînd ca, după necesităţi concrete, în celelealte capitole din manual, să se facă particularizările şi adaptările corespondente.

Componentele vectorului $\mathbf{M}^0$ sînt mărimi rezultate dintr-un proces complex de măsurare, în care intervine *un număr mult mai mare de observaţii elementare* decît cele care sînt marcate explicit în relaţia (9-1). Tehnologiile de lucru sau de prelucrare preliminară permit eliminarea erorilor de natură sistematică astfel încît vectorul $\mathbf{M}^0$ va fi considerat o *mărime aleatoare*. *Valoarea aşteptată* pentru vectorul $\mathbf{M}^0$ (atunci cînd fiecare mărime componentă ar proveni din media unui număr infinit de mare de determinări) se notează $\tilde{\mathbf{M}}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}(\mathbf{M}^0).$$

În mod curent, inclusiv în geodezie, mărimile $\tilde{M}$ sînt denumite *valori adevărate* ale măsurătorilor M^0, deşi există diferenţe între cele două categorii de mărimi. Pentru simplitatea expunerii, în special din punct de vedere formal, în dezvoltările ulterioare se va accepta egalitatea acestora.

9.1. MODELUL STOCHASTIC

Diferenţele dintre măsurătorile M^0 şi valorile lor adevărate $\tilde{M}$ sînt denumite uzual *erori adevărate*:

$$\varepsilon = \mathbf{M}^0 - \tilde{\mathbf{M}}. \tag{9-2}$$

Proprietățile stochastice ale mărimilor ε sînt definite de matricea de *varianță — covarianță*, pe care în manual o vom numi, pentru simplitate, *matricea de covarianță* $\mathbf{C}_M$:

$$\mathbf{C}_M = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & r_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ r_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & r_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}\sigma_n\sigma_1 & r_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \dots & \sigma_n^2 \end{Vmatrix} \tag{9-3}$$

Aici s-au folosit notațiile cunoscute:
$\sigma_i^2 =$ *varianța* (*teoretică*) a măsurătorii M_i^0;

$$\sigma_i^2 = E(\varepsilon_i^2); \tag{9-4}$$

$r_{ij} =$ *coeficient de corelație* între măsurătorile M_i^0 și M_j^0:

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}; \quad i, j, = 1, 2, \dots, n; \tag{9-5}$$

$\sigma_{ij} = E(\varepsilon_i\varepsilon_j) =$ *covarianța* (*teoretică*) a măsurătorilor M_i^0 și M_j^0. (9-6)

Mărimea σ_i este denumită în statistică *abatere standard*, iar în geodezie *eroare medie* (în publicații mai vechi *eroare medie pătratică*). Este cunoscut, de asemenea:

$$-1 \leqslant r_{ij} \leqslant +1, \tag{9-7}$$

valorile limită ± 1 fiind atinse în cazul în care între variabilele aleatoare ε_i și ε_j există o dependență liniară ($\varepsilon_i = \pm a\varepsilon_j$, unde a este o constantă oarecare).

Ansamblul coeficienților r poate fi grupat în *matricea de corelație* $\mathbf{R}_M$

$$\mathbf{R}_M = \begin{Vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \dots & 1 \end{Vmatrix} \tag{9-8}$$

Corelația evidențiază dependența existentă între observațiile inițial- (originare) prin coeficienții de corelație dreptunghiulari r_{ij} ai matricei afee rente $\mathbf{R}_M$ (9-8).

Teoria compensării observațiilor corelate dezvoltată teoretic de *J.M. Tienstra* (1947, 1948) are o deosebită importanță în prelucrarea observațiilor geodezice, deoarece prin aplicarea sa pot fi obținute rezultate riguroase la prelucrarea măsurătorilor $M_1^0 \dots M_n^0$.

Corelațiile sau posibilitățile de dependență stochastică între elementele destinate unei compensări riguroase sînt categorisite în: corelații fizice și corelații matematice.

Analizînd strict riguros procesele de măsurare, se poate afirma că nu există măsurători independente, deoarece erorile instrumentale remanente, precum și condițiile atmosferice de lucru, determină calitatea rezultatelor obținute, grupîndu-le din acest punct de vedere, ceea ce înseamnă, de fapt, o legătură stochastică între observațiile cuprinse într-un grup. Asemenea *corelații fizice* se pot stabili numai pe baza unor studii profunde ale condi-

ților concrete de măsurare. În rezolvările practice, corelațiile riguroase de acest gen au fost pînă în prezent aproximate sau, uneori, ignorate, deoarece determinarea lor necesită, în unele cazuri, fonduri importante (în special pentru problemele de refracție atmosferică).

Corelațiile matematice sînt create în special de utilizarea unui model matematic incomplet, sau afectat de erori de concepție, pe care *F.R. Helmert* (1924) le-a denumit *erori ale teoriei*.

În lucrări mai recente (*Baarda* 1973, *Grafarend* ș.a. 1979, *Schmidt* 1979, *Pelzer* 1980 ș.a.) aceste ultime aspecte au căpătat o dezvoltare cu totul remarcabilă. A fost fundamentată noțiunea de *grad de încredere în rețeaua geodezică*, prin care se înțelege capacitatea de punere în evidență (prin modelul de prelucrare folosit) a unor eventuale erori neobișnuite ca mărime existente în rețea. Această *calitate de autocontrol*, care este îndeplinită într-o măsură mai mare sau mai mică de către orice model de prelucrare și de orice rețea geodezică, poate fi evidențiată prin relații matematice a căror deducere și mod de utilizare pot fi urmărite în lucrările de specialitate menționate.

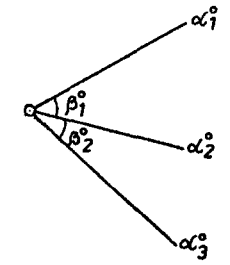


Fig. 9-1. Exemple de corelații matematice la compensarea rețelelor de triangulație.

Exemple de corelații

1. Rezultatele compensării în stație a unor observații unghiulare azimutale în rețelele de triangulație nu sînt întotdeauna elemente independente. Compensarea acestora în rețea ca elemente independente ar fi prin urmare neriguroasă.

2. Transformarea măsurătorilor originare (spre exemplu, direcții măsurate în unghiuri etc.) și tratarea lor ca observații independente, conduce de asemenea la obținerea unor soluții neriguroase aproximative.

Astfel, dacă în locul direcțiilor α_1^0, α_2^0, α_3^0 (fig. 9-1), care sînt mărimi independente, s-ar compensa unghiurile β_1^0, β_2^0, obținute din simple transformări liniare (în speță, scăderi de forma $\beta_1^0 = \alpha_2^0 - \alpha_1^0$), ca mărimi independente, s-ar neglija corelația între β_1^0 și β_2^0.

Dificultățile de determinare a corelațiilor, în special a corelațiilor fizice, se răsfrîng și asupra posibilităților practice, de determinare a matricei de covarianță $\mathbf{C}_M$, ceea ce justifică, într-o oarecare măsură, stadiul actual de utilizare relativ restrînsă a acesteia în prelucrările geodezice.

Este cunoscută, de asemenea, legătura:

$$\mathbf{C}_M = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_M \tag{9-9}$$

unde σ_0^2 *este o constantă*, denumită uzual *varianța unității de pondere*, iar $\mathbf{Q}_M$ matricea cofactorilor măsurătorilor:

$$\mathbf{Q}_M = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{C}_M = \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{Vmatrix} \tag{9-10}$$

Coeficienţii Q sînt numiţi *cofactori* sau *coeficienţi de pondere*. În raport cu aceştia se poate formula o altă posibilitate de determinare a coeficienţilor de corelaţie:

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}\, Q_{jj}}}; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9-11}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca măsurătorile M_i^0 să fie independente este ca toţi coeficienţii de pondere dreptunghiulari ai matricei cofactorilor (9-10) să fie nuli:

$$Q_{ij} = 0; \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \quad i \neq j. \tag{9-12}$$

În calculele de prelucrare a observaţiilor geodezice se determină şi erorile unor funcţiuni de mărimi măsurate sau de alţi parametri ai prelucrării, în care termenii principali sînt asemenea cofactori (coeficienţi de pondere).

Funcţiile pentru care sînt îndeplinite toate condiţiile posibile de tipul (9-12) se numesc *funcţii ortogonale* şi au o deosebită importanţă în teoria prelucrării observaţiilor deoarece pot fi tratate ca elemente independente, într-o prelucrare ulterioară, avînd acelaşi caracter de independenţă ca şi observaţiile originare.

Se poate arăta că matricele $\mathbf{C}_M$ şi $\mathbf{Q}_M$ sînt pozitiv definite, astfel încît admit matrice inverse. Se notează:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_M^{-1}, \tag{9-13}$$

matricea $\mathbf{P}$ fiind numită *matricea ponderilor*. Prin convenţie nu se va mai folosi indice suplimentar la scrierea matricei ponderilor, deoarece această matrice este ataşată, aproape întotdeauna, vectorului măsurătorilor geodezice $\mathbf{M}^0$.

Prin modelul stochastic al unui proces de prelucrare se înţelege uzual matricea $\mathbf{Q}_M$ (sau $\mathbf{P}$). În unele publicaţii în această noţiune se include şi condiţia (9-31), respectiv (9-32).

Particularizare. În practica lucrărilor geodezice se introduce frecvent ipoteza independenţei observaţiilor geodezice:

$$r_{ij} = 0. \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \quad i \neq j \tag{9-14}$$

Într-un asemenea caz matricea cofactorilor şi respectiv matricea ponderilor devin matrice diagonale:

$$\mathbf{Q}_M = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{Vmatrix}; \tag{9-15}$$

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{Vmatrix}. \tag{9-16}$$

Avîndu-se în vedere (9-13) rezultă că legătura dintre elementele de pe diagonalele acestor ultime matrice este dată de relaţia:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{9-17}$$

Mărimile p se numesc ponderi. Presupunînd că una dintre măsurătorile oarecare M_k^0 are abaterea standard σ_k egală cu valoarea constantei σ_0, rezultă că ponderea acestei observaţii va fi:

$$p_k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_k^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2} = 1, \tag{9-18}$$

motiv pentru care σ_0 se numeşte abaterea standard a unităţii de pondere.

O b s e r v a ţ i i. **1.** Deoarece σ_0^2 *este o constantă*, rezultă că dimensiunea ponderii p_k este condiţionată de dimensiunea varianţei σ_k^2.

2. În geodezie se folosesc, în diverse etape, ponderi ale măsurătorilor, şi uneori ale unor parametri. Definirea ponderilor fiind dată de relaţia (9-17) rezultă că acestea nu pot fi determinate arbitrar, ci în urma unei analize temeinice a procesului de măsurare. Utilizarea unor ponderi incorect determinate poate denatura prelucrarea măsurătorilor, obţinîndu-se rezultate false.

Teoria erorilor şi metoda celor mai mici pătrate oferă o gamă largă de posibilităţi de prelucrare a observaţiilor geodezice.

Dintre acestea două intervin în mod frecvent în practica prelucrării observaţiilor efectuate în reţele geodezice şi anume:

— *metoda observaţiilor indirecte;*

— *metoda observaţiilor condiţionate,*

care se vor examina în continuare din punctul de vedere al posibilităţilor concrete de utilizare.

9.2. PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR GEODEZICE PRIN METODA OBSERVAŢIILOR INDIRECTE

9.2.1. MODELUL FUNCŢIONAL

Măsurătorile M_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt efectuate în reţeaua geodezică pentru determinarea unui număr de u parametri prin care se defineşte, de cele mai multe ori, amplasamentul punctelor (de exemplu în poziţie planimetrică, în înălţime sau într-un sistem tridimensional etc.) care formează reţeaua geodezică.

Vom nota cu $\tilde{X}$ mărimea acestor parametri, care s-ar determina în eventualitatea utilizării valorilor adevărate $\tilde{M}$:

$$\tilde{\mathbf{X}}^T = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_u]. \tag{9-19}$$

Determinarea parametrilor se realizează prin intermediul unor relaţii dintre aceştia şi mărimile $\tilde{M}$, relaţii care depind de geometria intrinsecă a reţelei geodezice considerate, precum şi de natura sau tipul măsurătorilor geodezice care stau la baza determinării:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \varphi(\tilde{\mathbf{X}}). \tag{9-20}$$

În general relațiile (9-20) nu sînt de formă liniară și de aceea acestea constituie *modelul funcțional neliniarizat al prelucrării măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor indirecte*.

Datorită imperfecțiunilor inerente, specifice oricărui proces de observații (determinate de gradul de dezvoltare a tehnicii folosite, de condițiile naturale concrete în care se efectuează observațiile, de calificarea operatorului ș.a.), precum și datorită faptului că în determinările practice, efective, numărul de măsurători asupra unei mărimi nu poate fi infinit de mare, valorile numerice pentru σ, σ^2, ε și respectiv $\tilde{X}$, $\tilde{M}$ rămîn necunoscute. Prin prelucrări, bazate pe diverse ipoteze, se vor obține *valori estimate* ale acestor mărimi.

Prelucrările care se bazează pe metoda celor mai mici pătrate conduc la obținerea unor mărimi diferite, notate în cele ce urmează cu M și respectiv X:

M — *observații compensate*;

X — *valori estimate ale parametrilor sau valori compensate ale necunoscutelor*.

După cum este cunoscut, legătura dintre noile mărimi introduse M și măsurătorile inițiale M^0 este dată de relațiile:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{v}. \tag{9-21}$$

Pentru parametrii X se introduc în scopul ușurării calculelor, valori provizorii sau aproximative X^0, astfel încît:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \mathbf{x}. \tag{9-22}$$

Formal atît v, cît și x au rolul unor „corecții", fiind în același timp și „necunoscutele" generale care intervin în întregul complex de prelucrare. Pentru a se putea puncta și mai bine proprietățile lor specifice sînt folosite denumiri diferite și anume:

— pentru mărimile v s-a adoptat denumirea de *corecții*:

$$\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \ldots, v_n], \tag{9-23}$$

deoarece acestea sînt atașate măsurătorilor geodezice M^0 efectuate în rețea. Fiecare dintre aceste corecții v_i are rolul de a anihila un șir întreg de erori elementare care se produc la efectuarea observației corespondente M_i^0;

— pentru mărimile x s-a adoptat denumirea de *necunoscute*:

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_u], \tag{9-24}$$

acestea fiind atașate parametrilor X^0 cu care se operează în modelul funcțional.

Cu aceste notații relațiile (9-20) devin:

$$\mathbf{M}^0 + \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{X}^0 + \mathbf{x}). \tag{9-25}$$

Prelucrările care intervin în geodezie se restrîng, de cele mai multe ori, numai la termenii liniari care rezultă din dezvoltarea în serie *Taylor* a relațiilor (9-25):

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{l}, \tag{9-26}$$

unde:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)_0; \tag{9-27}$$

$$\mathbf{l} = (\mathbf{X}^0) - \mathbf{M}^0. \tag{9-28}$$

Indicele inferior $_0$ din relația (9-27) indică faptul că valorile derivatelor parțiale din matricea $\mathbf{B}$ sînt calculate prin utilizarea valorilor aproximative $\mathbf{X}^0$ ale parametrilor cuprinși în prelucrare.

Pentru păstrarea unei legături cu publicațiile de specialitate se notează:

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_n & b_n & \ldots & u_n \end{Vmatrix}, \tag{9-29}$$

astfel încît:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + u_1x_u + l_1; \\ v_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + u_2x_u + l_2; \\ &\vdots \\ v_n &= a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + u_nx_u + l_n. \end{aligned} \tag{9-30}$$

Relațiile (9-26) și (9-30) sînt denumite *ecuații liniarizate ale corecțiilor* și reprezintă *forma liniară a modelului funcțional din cadrul prelucrării măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor indirecte*.

După cum este cunoscut de la *cursul de teoria erorilor*, principiul clasic de compensare elaborat de *Gauss* (1809) și *Legendre* (1806, 1810), se bazează pe cunoscuta relație:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \text{minim} \tag{9-31}$$

unde $\mathbf{P}$ are definiția generală dată de relația (9-13). Dacă se au în vedere observații independente, pentru care sînt valabile relațiile (9-14) — (9-17), rezultă din (9-31) cunoscuta condiție:

$$[p\,v\,v] \rightarrow \text{minim} \tag{9-32}$$

folosită în marea majoritate a prelucrărilor geodezice actuale.

9.2.2. OBSERVAȚII PRIVIND FORMAREA MODELULUI FUNCȚIONAL-STOCHASTIC

După prezentarea aspectelor de ordin teoretic care stau la baza prelucrării măsurătorilor efectuate în rețelele geodezice, în continuare se prezintă unele indicații cu caracter aplicativ.

1. Prelucrarea riguroasă a măsurătorilor geodezice trebuie să se raporteze la un sistem de referință unitar. De aceea, înainte de a fi prelucrate, măsurătorile geodezice sînt reduse la sistemul de referință acceptat (planul de proiecție, elipsoidul de referință, un sistem de coordonate tridimensional etc.).

2. Orice compensare geodezică este dirijată prin modelul funcțional stochastic.

În funcție de atenția cu care s-a alcătuit acest model se vor obține rezultate mai mult sau mai puțin apropiate de realitate.

Astfel:

— modelul funcțional poate fi denaturat de existența unor erori sistematice importante, neeliminate înainte de compensare. Astfel, de exemplu este recomandat ca, în cazul utilizării unui instrument pentru măsurarea

pe cale electronică a distanțelor, insuficient de bine etalonat, să se introducă o necunoscută „de scară" suplimentară, în modelul funcțional;

— neglijarea unor corelații, ceea ce înseamnă un model stochastic incomplet, poate pune sub semn de întrebare unele precauții de mare finețe avute în vedere la formarea modelului funcțional.

Din aceasta rezultă că este necesar un echilibru adecvat între cele două laturi ale modelului folosit: în rețelele geodezice de ordin superior trebuie avute în vedere toate amănuntele posibile din acest punct de vedere, urmînd ca pentru rețelele de ordin inferior să se accepte anumite concesii, atît de natură funcțională, cît și de natură stochastică.

3. Orice schimbare în modelul stochastic-funcțional modifică rezultatul compensării.

4. Modelul funcțional-stochastic acceptat inițial poate fi îmbunătățit pe baza unor rezultate obținute (eventual, compensări parțiale sau chiar o compensare globală preliminară). În acest sens se menționează: analiza ponderilor grupelor de măsurători, examinarea semnificației statistice a unor necunoscute folosite ș.a.m.d. O compensare modernă a unei rețele geodezice apare astfel, de fapt, ca o succesiune de compensări parțiale, continuu îmbunătățite.

9.2.3. DETERMINAREA ELEMENTELOR COMPENSATE

Din condiția de minim (9-31) rezultă:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P}\, \mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{9-33}$$

care are ca echivalent în cazul observațiilor independente:

$$[p\, a\, v] = [p\, b\, v] = \ldots = [p\, u\, v] = 0. \tag{9-34}$$

Din (9-26) și (9-33), se formează sistemul ecuațiilor normale:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P}\, \mathbf{B}\, \mathbf{x} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}\, \mathbf{l} = \mathbf{0} \tag{9-35}$$

Pentru simplificarea scrierii se notează:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P}\, \mathbf{B} = \mathbf{N} \tag{9-36}$$

și

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P}\, \mathbf{l} = \mathbf{l}^*, \tag{9-37}$$

astfel încît rezultă o formă mai prescurtată pentru sistemul ecuațiilor normale:

$$\mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{l}^* = \mathbf{0}. \tag{9-38}$$

Sistemul (9-38) are următorul echivalent în cazul observațiilor geodezice independente:

$$\begin{aligned}
&[paa]\, x_1 + [pab]\, x_2 + \ldots + [pau]\, x_u + [pal] = 0;\\
&[pab]\, x_1 + [pbb]\, x_2 + \ldots + [pbu]\, x_u + [pbl] = 0;\\
&\quad\ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots\\
&[pau]\, x_1 + [pbu]\, x_2 + \ldots + [puu]\, x_u + [pul] = 0.
\end{aligned} \tag{9-39}$$

Determinarea elementelor componente se execută în baza următorului algoritm:

● *Soluțiile pentru parametrii (necunoscutele)* x rezultă din rezolvarea sistemului (9-38), respectiv (9-39):

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{l}^*. \tag{9-40}$$

Matricea inversă a sistemului ecuațiilor normale este matricea cofactorilor necunoscutelor $\mathbf{Q}_x$:

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^{-1} \tag{9-41}$$

O b s e r v a ț i e. Relația (9—41) presupune existența matricei inverse $\mathbf{N}^{-1}$. În cazul rețelelor geodezice libere condiția nu este îndeplinită, fiind necesare ipoteze suplimentare (v. 10.1.1.).

● *Corecțiile v* rezultă din (9-26), respectiv (9-30).

● *Valorile compensate ale parametrilor X și ale măsurătorilor M* rezultă din (9-22) și (9-21).

● *Verificarea generală a compensării* constă în controlul respectării *tuturor egalităților din modelul funcțional neliniarizat* (9-20), în limita aproximației de calcul acceptată inițial.

O b s e r v a ț i e. Pentru calculele de evaluare a preciziei care se vor expune în continuare se notează posibilitatea de determinare a următoarelor mărimi caracteristice oricărui proces de prelucrare:

$$\hat{\mathbf{l}} = -\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{x}. \tag{9-42}$$

Din (9-41) și (9-28) rezultă:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{v} - \varphi\,(\mathbf{X}^0),$$

adică:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{M} - \varphi\,(\mathbf{X}^0). \tag{9-43}$$

Relația (9-43) oferă posibilitatea afirmării că mărimile $\hat{\mathbf{l}}$ și valorile compensate ale măsurătorilor $\mathbf{M}$ au aceleași proprietăți stochastice, funcțiile $\varphi\,(\mathbf{X}^0)$ fiind mărimi constante, nealeatoare.

9.2.4 EVALUAREA PRECIZIEI

Se examinează evaluarea preciziei măsurătorilor geodezice corelate, executate într-o rețea geodezică oarecare.

La calculele de evaluare a preciziei elementelor care intervin într-o prelucrare se pot distinge următoarele două etape.

1. Din măsurătorile individuale se pot calcula abaterile standard s_0', pentru fiecare dintre tipurile de măsurători avute la dispoziție, *înainte de prelucrarea în rețea*. Erorile s_0' caracterizează *precizia interioară a tipului de măsurători considerat*, depinzînd de natura și numărul lor, de metoda de lucru, de instrumentul utilizat, de calificarea operatorului, de condițiile atmosferice ș.a.m.d. Astfel:

— în rețelele de triangulație intervine etapa prelucrării în stație (diferită pentru metoda seriilor, respectiv pentru metoda *Schreiber* care se vor expune în manual) în care se determină pentru fiecare punct staționat abaterea standard a unei direcții compensate (în stație);

— în rețelele de nivelment precizia interioară se determină din rezultatele obținute pe un interval sau pe o linie de nivelment (măsurători în dublu sens de măsurare).

2. Un indicator de precizie globală a măsurătorilor din rețea se obține *după calculul corecțiilor v*, prin *abaterea standard (empirică) a unității de pondere*, denumită în mod uzual în geodezie *eroarea medie a unității de pondere*:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u}}, \tag{9-44}$$

unde:

$$E(s_0^2) = \sigma_0^2. \tag{9-45}$$

respectiv s_0 reflectă *precizia exterioară a măsurătorilor considerate*. Pentru *rețelele geodezice libere* (v. 24.1) eroarea s_0 se calculează cu formula (24-8) și reflectă *precizia interioară a rețelei considerate*. Prin analogie, eroarea determinată cu formula (9-44) în cazul *rețelelor geodezice, cu sau fără constrîngeri* reflectă *precizia relativă a rețelei considerate* (termenul *relativ* provine ca urmare a acceptării unor puncte geodezice ca fixe, pentru încadrarea acestor genuri de rețele în sistemul de coordonate considerat, astfel încît rezultatele prelucrării, inclusiv s_0, sînt relative).

3. O situație tipică este reprezentată de evaluarea preciziei de determinare a unui vector aleator $\mathbf{f}$ care poate fi exprimat în raport de vectorul $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{l} \tag{9-45}$$

prin intermediul matricei $\mathbf{F}$, presupusă cunoscută.

Matricea de covarianță a vectorului $\mathbf{f}$, prin care se pun în evidență proprietățile lui stochastice și se pot calcula toate elementele de precizie necesare, se obține din (9-45) prin aplicarea legii de propagare a erorilor:

$$\mathbf{s}_f^2 = \mathbf{C}_f = \mathbf{F}\mathbf{C}_M\mathbf{F}^T = s_0^2\mathbf{F}\mathbf{Q}_M\mathbf{F}^T = s_0^2\mathbf{Q}_f. \tag{9-46}$$

Prin particularizare se obține precizia elementelor principale care intervin în prelucrarea observațiilor în rețelele geodezice: $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\hat{\mathbf{l}}$.

Prin urmare, se exprimă dependența dintre aceste mărimi compensate și vectorul $\mathbf{l}$:

● *Pentru necunoscutele x* se folosesc relațiile (9-40), (9-41) și (9-37):

$$\mathbf{x} = -\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{l}. \tag{9-47}$$

● *Pentru corecțiile v* se folosesc relațiile (9-26) și (9-47):

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{l} = -\mathbf{B}\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{l} + \mathbf{l} = (\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{l}. \tag{9-48}$$

● *Pentru observațiile compensate* se folosesc (9-43):

$$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{l}} + \varphi(\mathbf{X}^0),$$

în care:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{B}\mathbf{x} = -\mathbf{B}\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{l}. \tag{9-49}$$

Rezultatele obținute pot fi concentrate sub forma (*Pelzer* 1980 a):

$$\mathbf{f} = \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{l}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P} \\ \mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P} \\ -\mathbf{B}\mathbf{Q}_x\mathbf{B}^T\mathbf{P} \end{Vmatrix} \mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{l}, \tag{9-50}$$

din care rezultă prin aplicarea relației (9-46), după calcule ce nu se prezintă detaliat aici:

$$\mathbf{C}_f = s_0^2 \begin{Vmatrix} \mathbf{Q}_{xx} & \mathbf{Q}_{x\hat{l}} & \mathbf{Q}_{vx} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}x} & \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} & \mathbf{Q}_{\hat{l}f} \\ \mathbf{Q}_{vx} & \mathbf{Q}_{v\hat{l}} & \mathbf{Q}_{vv} \end{Vmatrix} = s_0^2 \begin{Vmatrix} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}^T & 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{N}^{-1} & \mathbf{B}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_M - \mathbf{B}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}^T \end{Vmatrix}. \tag{9—51}$$

Din relația (9-51) rezultă *independența stochastică* a vectorului corecțiilor $\mathbf{v}$ în raport de celelalte rezultate principale ale compensării $\mathbf{x}$ și $\hat{\mathbf{l}}$ (coeficienții de pondere dreptunghiulari corespondenți sînt nuli).

4. *Abaterea standard a unei observații* M_i^0 este determinabilă cu formula:

$$s_i = s_0\sqrt{Q_i}, \tag{9-52}$$

coeficientul de pondere Q_i fiind situat pe diagonala matricei cofactorilor $\mathbf{Q}_M$ în poziția corespondentă pentru observația M_i^0.

5. În cazul observațiilor geodezice independente relațiile corespondente, obținute prin particularizarea relațiilor deduse anterior sînt:

— *abaterea standard empirică (eroarea medie) a unității de pondere*:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}; \tag{9-52}$$

— *abaterea standard (eroarea medie) a necunoscutei* x_k:

$$s_{x_k} = s_0\sqrt{Q_{x_kx_k}}; \tag{9-53}$$

— *abaterea standard (eroarea medie) a unei măsurători* M_i^0:

$$s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}; \tag{9-54}$$

— *abaterea standard (eroarea medie) a unei funcții de necunoscute*:

$$F = F(X_1, X_2), \tag{9-55}$$

este:

$$s_F = s_0\sqrt{Q_{FF}}, \tag{9-56}$$

unde:

$$Q_{FF} = \left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^2 Q_{x_1x_1} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right) Q_{x_1x_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^2 Q_{x_2x_2}. \tag{9-57}$$

Relația (9-57) este cunoscută și sub denumirea de *regula lui Tienstra*;

— *eroarea medie a unei observații compensate* se determină cu o relație de forma (9-56), după ce în prealabil observația considerată s-a exprimat ca o funcție de parametrii X.

6. *În rețelele de triangulație*, elementele cele mai des utilizate în evaluarea preciziei sînt cele care au un caracter local, adică se referă la precizia în determinarea poziției planimetrice a unui punct nou oarecare. Desigur analiza poate cuprinde unul, mai multe sau chiar toate punctele noi din rețea.

● *Erorile medii ale coordonatelor* x, y. Din relația (9-56) care are un caracter general se pot calcula abaterile standard (erorile medii) ale coordonatelor x, y ale punctului considerat:

$$s_x = s_0 \sqrt{Q_{xx}}; \quad s_y = s_0 \sqrt{Q_{yy}}. \tag{9-58}$$

● *Elipsa erorilor*. Deoarece s_x și s_y își modifică valoarea în cazul unei schimbări a sistemului de coordonate folosit (roto-translație), precizia locală se exprimă în mod frecvent și prin elipsa erorilor, care este un invariant al matricei de covarianță, adică nu depinde de sistemul de axe în care se desfășoară compensarea, ci numai de configurația rețelei geodezice și de precizia de măsurare. Elipsa erorilor reprezintă domeniul de încredere pentru poziția planimetrică a unui punct.

Este cunoscută modalitatea practică de determinare a parametrilor elipsei erorilor:

— *semiaxa mare* a, respectiv *semiaxa mică* b se calculează cu relațiile:

$$a = s_0 \sqrt{\lambda_1}; \quad b = s_0 \sqrt{\lambda_2}, \tag{9-59}$$

unde:

$$\lambda_1 = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2};$$
$$\lambda_2 = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}; \tag{9-60}$$

— *orientarea axei mari a elipsei* în raport de axa x a sistemului de coordonate se determină cu relația:

$$0 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}. \tag{9-61}$$

● *Abaterea standard (eroarea medie) pe o anumită direcție*, care face unghiul ψ cu semiaxa mare a elipsei, rezultă din relația:

$$s_u^2 = s_0^2 (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi), \tag{9-62}$$

prin particularizare putînd rezulta și abaterile standard ale coordonatelor s_x și s_y.

● *Eroarea medie Helmert*

Abaterea standard totală sau, cum este numită în geodezie, *eroarea medie Helmert*:

$$s_t = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}, \tag{9-63}$$

este un invariant al matricei de covarianță a necunoscutelor:

$$s_t^2 = s_0^2 (Q_{xx} + Q_{yy}). \tag{9-64}$$

Geometric, s_t reprezintă jumătate din diagonala dreptunghiului în care este înscrisă elipsa erorilor.

Revenind la matricea de covarianță $\mathbf{C}_x$ a parametrilor $\mathbf{x}$ din care se extrage submatricea $\mathbf{C}_P$ aferentă punctului P considerat:

$$\mathbf{C}_P = s_0^2 \begin{Vmatrix} Q_{x_P x_P} & Q_{x_P y_P} \\ Q_{y_P x_P} & Q_{y_P y_P} \end{Vmatrix}, \tag{9-65}$$

adică:

$$\mathbf{C}_P = s_0^2 \mathbf{Q}_P, \tag{9-66}$$

relația (9-64) se mai poate scrie și sub forma:

$$s_t = \sqrt{\text{urma } \mathbf{Q}_P}. \tag{9-67}$$

● *Eroarea medie de poziție Werkmeister*

Eroarea medie de poziție *Werkmeister* este definită de:

$$s_w = \sqrt{s_x s_y}, \tag{9-68}$$

fiind de asemenea un invariant al matricei de covarianță a necunoscutelor:

9.3. PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR GEODEZICE PRIN METODA OBSERVAȚIILOR CONDIȚIONATE

Comparativ cu metoda observațiilor indirecte, metoda observațiilor condiționate a cunoscut o aplicabilitate mai restrînsă în ultimele decenii. Cauza este generată în mod deosebit de faptul că metoda observațiilor indirecte se pretează mult mai complet și mai comod la programarea pe calculator electronic.

Prezentarea metodei observațiilor condiționate este justificată prin faptul că în anumite situații, este adevărat restrînse ca număr, metoda oferă soluții cu mai multă rapiditate în comparație cu metoda observațiilor indirecte. Asemenea cazuri vor fi examinate concret în capitolele destinate prelucrării efective a rețelelor geodezice de anumite tipuri.

9.3.1 MODELUL FUNCȚIONAL

Măsurătorile geodezice M_i^0 ($i = 1, 2, \ldots, n$) definite prin vectorul (9-1) într-o rețea geodezică, corectate cu corecțiile v_i ($i = 1, 2, \ldots, n$ corespondente, trebuie să satisfacă un număr oarecare r de condiții ($r < n$) de natură geometrică:

$$\Phi (\mathbf{M}^0 + \mathbf{v}) = 0 \tag{9-69}$$

Ecuațiile (9-69) constituie *modelul funcțional sub formă neliniară la prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor condiționate*. Prin dezvoltarea în serie a acestor relații și renunțarea la termenii de ordinul doi și superiori, se obține *forma liniară a modelului funcțional în metoda observațiilor condiționate*:

$$\mathbf{Av} + \mathbf{w} = 0, \tag{9-70}$$

unde:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \Phi (\mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}}\right)_0; \tag{9-71}$$

$$\mathbf{w} = \Phi (\mathbf{M}^0). \tag{9-72}$$

Pentru păstrarea unei legături cu publicațiile de specialitate, atît de la noi din țară cît și din străinătate, se acceptă notația:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & & \dots & \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{matrix} \right\|, \tag{9-73}$$

atrăgînd însă imediat atenția că termenii din interiorul matricei **A** *nu sînt aceiași* cu termenii din interiorul matricei **B** [relația (9-29)], deși sînt reprezentați prin aceleași litere. Forma uzuală a modelului funcțional liniarizat la prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor condiționate este:

$$\begin{aligned} &a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + w_1 = 0; \\ &b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n + w_2 = 0; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n + w_r = 0. \end{aligned} \tag{9-74}$$

Observații. 1. Modelul stochastic expus în 9.1 este utilizat și în cazul metodei observațiilor condiționate.

2. Observațiile de natură aplicativă, expuse în 9.2.2, își păstrează valabilitatea și în cazul metodei observațiilor condiționate.

9.3.2. DETERMINAREA ELEMENTELOR COMPENSATE

De la cursul de *teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate* este cunoscută necesitatea introducerii *corelatelor k*, denumite și *multiplicatori Lagrange*, pentru deducerea corecțiilor *v*:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_M \mathbf{A}^T \mathbf{k}. \tag{9-75}$$

Din (9-70) și (9-75) rezultă sistemul ecuațiilor normale:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{k} + \mathbf{w} = 0, \tag{9-76}$$

din care se calculează corelatele **k**:

$$\mathbf{k} = -\,\mathbf{N}_0^{-1}\,\mathbf{w}, \tag{9-76, a}$$

unde:

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{A}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{A}^T. \tag{9-77}$$

În cazul observațiilor geodezice independente, ecuațiile (9-75) au forma:

$$v_i = \frac{1}{p_i}\,(a_i\,k_a + b_i\,k_b + \dots + r_i\,k_r), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{9-78}$$

iar sistemul ecuațiilor normale este:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]k_b + \dots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_a = 0; \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + \dots + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + w_b = 0; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ &\left[\frac{ar}{p}\right]k_a + \left[\frac{br}{p}\right]k_b + \dots + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r + w_r = 0. \end{aligned} \tag{9-79}$$

Control

La deducerea corelatelor **k** se folosește următoarea relație de control:

$$\mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{v} = -\,\mathbf{w}^T\,\mathbf{k}, \tag{9-80}$$

al cărui echivalent în cazul observațiilor independente este:

$$[pvv] = -\,[kw] \tag{9-81}$$

● *Corecțiile v* rezultă din (9-75), respectiv (9-78), astfel încît se pot calcula *valorile compensate ale măsurătorilor M* din (9-21).

● *Verificarea generală a compensării* constă în respectarea tuturor egalităților din modelul funcțional neliniarizat (9-69), în limita aproximației de calcul acceptată inițial.

9.3.3. EVALUAREA PRECIZIEI DUPĂ PRELUCRARE

● Abaterea standard (empirică) a unității de pondere, denumită în mod uzual în geodezie eroarea medie a unității de pondere:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{r}}. \tag{9-82}$$

Din compararea relațiilor (9-44) și (9-82) rezultă o formulă foarte utilă în calculele de prelucrare:

$$r = n - u, \tag{9-83}$$

prin care se poate deduce numărul total al ecuațiilor de condiție, necesar și suficient, pentru prelucrarea măsurătorilor geodezice în rețeaua considerată.

● *Abaterea standard a unei funcțiuni oarecare de mărimile compensate*, dintr-un șir de funcțiuni considerate:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f} = \mathbf{F}\,(\mathbf{M}^0 + \mathbf{v}); \\ &\mathbf{f}^T = \|\,F_1, F_2, \dots, F_t\,\|, \end{aligned} \tag{9-84}$$

se determină cu formula:

$$s_{F_k} = s^0\sqrt{Q_{F_kF_k}}. \tag{9-85}$$

Pentru calculul coeficientului de pondere $Q_{F_kF_k}$ se pot folosi mai multe posibilități:

— *determinarea directă*, prin utilizarea unei relații cunoscute de la *cursul de teoria erorilor* (*Fotescu* 1975, *Wolf* 1975 ș.a.), prin care se determină matricea cofactorilor:

$$\mathbf{Q}_f = \mathbf{F}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{N}_0^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{F}. \tag{9-86}$$

Coeficientul de pondere căutat se află pe diagonala matricei $\mathbf{Q}_f$ în poziția corespondentă funcției F_k;

— *utilizarea algortimului Gauss*; la operațiunea de rezolvare a sistemului de ecuații normale se atașează un număr suplimentar de coloane ai căror coeficienți sînt calculați cu relațiile:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{F}^T; \qquad \mathbf{F}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{F}^T. \tag{9-87}$$

Rezolvarea concomitentă a sistemului de ecuații normale (coloana termenilor liberi **w**) și a coloanelor noi adăugate conduce la determinarea corelatelor **k** și a coeficienților de pondere căutați, care vor fi reprezentați de *algoritmii Gauss* corespunzători, de ordinul r (r fiind numărul ecuațiilor normale):

$$[\mathbf{F}\,\mathbf{Q}_M\,\mathbf{F}^T \cdot r]. \tag{9-88}$$

Această ultimă metodologie este mai eficientă la calculul manual, dar este mai greu de programat, decît metoda precedentă, mai ales dacă la rezolvarea sistemului normal nu se folosește metoda eliminărilor succesive.

Prin *particularizare*, dacă:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E},$$

adică:

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{v}, \tag{9-89}$$

matricea cofactorilor (9-86) devine $\mathbf{Q}_{M+v}$, putîndu-se determina astfel precizia măsurătorilor compensate.

● *Abaterea standard a unei observații* M_i^0 este determinată cu formula (9-52).

● *În cazul observațiilor geodezice independente* se notează relațiile corespondente, obținute prin particularizarea formulelor prezentate:

— *abaterea standard* (*empirică*) *a unității de pondere*:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}; \tag{9-90}$$

— *abaterea standard a unei funcțiuni de mărimile compensate*, exprimată sub formă liniară:

$$F = f_0 + f_1\,(M_1^0 + v_1) + \ldots + f_n\,(M_n^0 + v_n)$$

este:

$$s_F = s_0\sqrt{Q_{FF}}. \tag{9-91}$$

Coeficientul de pondere corespunzător:

$$Q_{FF} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \ldots, \tag{9-92}$$

se poate calcula prin utilizarea algoritmului *Gauss*, după metoda expusă mai înainte;

— *abaterea standard a unei măsurători* M_i^0 este determinată cu formula (9-54);

— *abaterea standard a unei măsurători compensate* M_k este un caz particular al situației descrise prin particularizarea:

$$f_i = 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad i \neq k. \tag{9-93}$$

Capitolul 10
OPTIMIZAREA REȚELELOR GEODEZICE

10.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Modificări în modelul funcțional-stochastic folosit la prelucrarea observațiilor geodezice determină modificări în rezultatele finale ale prelucrării. Pentru un teritoriu dat se pot realiza, în principiu, mai multe variante de proiectare a rețelei geodezice. Desigur numai una dintre aceste variante, în care rețeaua proiectată are o anumită configurație (adică cuprinde un anumit număr de puncte, dispuse într-un anumit mod în rețea) și în care ar urma să se efectueze un anumit gen de măsurători geodezice, repetate de un anumit număr de ori, poate asigura rezultate optime cum ar fi de exemplu: poziția punctelor rețelei reflectată de precizia de determinare, volumul total de cheltuieli ș.a.m.d.

Variantele de proiectare pot rezulta din introducerea unor modificări esențiale în configurația rețelei sau în programul de observații, prin mărirea numărului acestora sau prin introducerea altor tipuri de măsurători ș.a.m.d.

Se pot obține variante de proiectare diferite și prin modificări succesive, de mai mică amploare, operate asupra modelului funcțional-stochastic, scopul urmărit fiind, de asemenea, găsirea unei soluții optime din anumite puncte de vedere.

Soluțiile de optimizare ale unor procese tehnologice sau de prelucrare a datelor cunosc o aplicabilitate tot mai mare în numeroase sectoare de activitate. Sînt cunoscute atît soluții teoretice generale, cît și soluții pentru domenii concrete din economie sau tehnică (un exemplu tipic este constituit de pildă de problema organizării optime a transporturilor). Majoritatea algoritmilor de rezolvare a unei probleme de optimizare se înscriu în capitolul de matematici speciale cunoscut sub denumirea de programare liniară (*Mihăilă* 1964).

Forma normală (*canonică*) *a unei probleme de programare liniară este următoarea*: fiind date un număr de relații aduse la formă liniară:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{b}, \tag{10-1}$$

se cere determinarea optimă a unor funcții, exprimate de asemenea sub formă liniară:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}\,\mathbf{y} \rightarrow \text{optim}, \tag{10-2}$$

denumite *funcții de scop*, concomitent cu respectarea unor anumite *restricții*, de exemplu de forma:

$$y_j \geqslant 0; \qquad j = 1, 2, \ldots ; \tag{10-3}$$

sau (și):

$$\sum_j c_j y_j \leqslant c_t. \tag{10-4}$$

Restricțiile asigură, în general, rezolvarea optimă din punct de vedere economic a problemei date.

Observații. 1. În (10-2) și (10-3) semnele = și respectiv $\geqslant$ pot fi înlocuite, în anumite probleme, de semnul $\leqslant$.

2. Variabilele y pot fi, de asemenea, și mărimi stochastice, situate într-o bandă de distribuție, care se poate defini după legile teoriei probabilităților.

3. Se cunosc și probleme de optimizări cu caracter neliniar, ale căror rezolvări sînt, desigur, mai complicate.

Se poate aprecia că în geodezie există o veche tradiție, precum și preocupări actuale cu totul remarcabile în domeniul optimizării, care sînt grupate de către *Grafarend* (1979) în patru categorii, prezentate sintetic în continuare.

10.1.1. OPTIMIZAREA DATELOR INIȚIALE (DESIGN DE ORDINUL 0)

Volumul de date inițiale într-o rețea geodezică este constituit din: valorile provizorii ale necunoscutelor $\mathbf{X}^0$, cu care se descrie modelul funcțional, vectorul măsurătorilor $\mathbf{M}^0$, matricea de covarianță corespondentă $\mathbf{C}_M$.

Problema de optimizare a datelor inițiale poate fi formulată în felul următor: sub ce condiții (suplimentare) se pot obține informații asupra coordonatelor punctelor rețelei, adică asupra poziției în sistemul de coordonate folosit. Fără ipoteze sau condiții suplimentare (de exemplu un anumit număr de elemente fixe în rețea ș.a.m.d.) matricea coeficienților ecuațiilor corecțiilor din modelul funcțional (9-26) prezintă nu anumit defect (deficit) d, care este egal cu numărul parametrilor necesari pentru încadrarea completă a rețelei în sistemul de coordonate corespondent (tabelul 10-1). Numărul d este egal cu numărul *gradelor de libertate* al rețelei considerate în raport cu sistemul de coordonate utilizat.

Ca exemplificare se poate urmări evoluția rețelei geodezice planimetrice (triangulație) din prima parte a figurii 10-1:

— măsurătorile unghiulare creează geometria intrinsecă a rețelei geodezice, dar nu oferă indicii asupra amplasării sale în sistemul xy folosit;

— orientarea unei laturi (cunoscută de exemplu din rețele geodezice mai vechi), conferă întregii rețele geodezice o anumită orientare (fig. 10-1, *c* și *d*). Prin aceasta a fost „ridicat" unul din gradele de libertate ale rețelei prezentate în figura 10-1, *a*;

— cunoașterea, în continuare, a unei laturi în rețea ridică un alt grad de libertate și anume cel legat de scara rețelei geodezice (fig. 10-1, *c*). Dacă rețeaua geodezică considerată ar fi fost o rețea de trilaterație acest grad de libertate nu ar fi existat;

— ultimele două grade de libertate, de amplasament propriu-zis al rețelei în sistemul de coordonate considerat, pot fi ridicate dacă se cunosc coordonatele x și y ale unui punct din rețea (fig. 10-1, *d*).

Tabelul 10—1

Tipul rețelei geodezice	d	Parametrii p necesari pentru încadrarea completă a rețelei în sistemul de coordonate-corespondent
Rețele altimetrice	1	1 p de translație
Rețele planimetrice		
a) Rețele de trilaterație	3	2 p de translație 1 p de rotație
b) Rețele de triangulație	4	2 p de translație 1 p de rotație 1 p de scară
Rețele tridimensionale	6 (+1)	3 p de translație 3 p de rotație (+1 p de scară)

În concluzie, rezultă că rețelele geodezice libere de triangulație prezintă 4 grade de libertate, iar cele de trilaterație 3.

Se mai poate vorbi și de un *defect de configurație*, care însă poate fi prevenit și eliminat prin operația de proiectare a rețelei.

Ca exemplificare, se prezintă o rețea de trilaterație (fig. 10-1, *e*), care nu va putea fi determinată unitar deoarece se compune din două părți distincte, rețeaua prezentînd în partea mijlocie posibilitatea unei rotații ar-

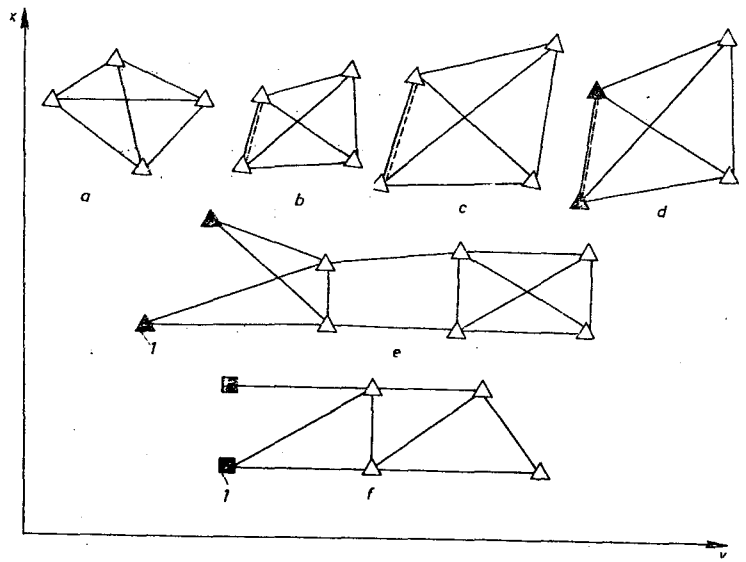


Fig. 10-1. Defecte de poziție (*a*, *b*, *c*) și defecte ale configurației (*e*, *f*) în rețelele geodezice planimetrice (*1* = punct cu coordonate cunoscute — punct vechi).

bitrare. Trebuie menţionat şi faptul că există situaţii limită, care desigur trebuie evitate prin proiectare, cînd reţeaua geodezică nu conţine observaţii suplimentare [$n \leqslant u$ în relaţia (9-44)] şi prin urmare nu poate fi prelucrată riguros (fig. 10-1, *f*).

Există şi procedee matematice pentru eliminarea unor defecte de configuraţie. În mod firesc asemenea defecte nu pot apărea în reţelele geodezice de sprijin, fiind înlăturate prin lucrările de proiectare.

Pînă la apariţia lucrărilor lui *Meissl* în anii 1962, 1969 şi apoi a multor autori (*Mittermayer* 1972, *Wolf* 1972 ş.a.) defectele semnalate mai înainte erau, în general, ridicate prin considerarea (arbitrară) a unui număr corespunzător de elemente fixe în reţea. Astfel, pentru reţele de triangulaţie se pot alege ca fixe:

— coordonatele x, y ale unui punct (iniţial) din reţea;
— valoarea orientării unei direcţii;
— lungimea unei laturi;

De numeroase ori aceste patru elemente au fost alese în legătură nemijlocită, directă, ceea ce echivalează cu acceptarea poziţiei fixe pentru două puncte la unul din capetele reţelei. Alegerea arbitrară a elementelor fixe, strict necesare ca număr cu d, nu are influenţe asupra următoarelor mărimi:

— mărimea corecţiilor $\mathbf{v}$ (deci şi $\mathbf{v}^T \mathbf{P}\, \mathbf{v}$);
— abaterea standard a unităţii de pondere a reţelei s_0;
— aspectul geometric al reţelei.

În schimb, în funcţie de modul în care se poziţionează cele patru elemente fixe menţionate se obţin soluţii diferite pentru:

— vectorul necunoscutelor $\mathbf{x}$ şi deci $\mathbf{o}$ poziţionare diferită a reţelei geodezice în sistemul ales;
— matricea de varianţă — covarianţă a necunoscutelor $\mathbf{Q}_x$ şi ca urmare:
— abaterile standard s_x, s_y ale coordonatelor punctelor în reţea şi — elementele elipselor erorilor: λ_1, λ_2 şi θ.

Pentru evitarea acestor soluţii arbitrare, se cunosc mai multe procedee. *Soluţia Meissl* constă în introducerea unei condiţii suplimentare de minim:

$$\text{urma } \mathbf{C}_x = s_0^2 \text{ urma } \mathbf{Q}_x \rightarrow \text{minim.} \qquad (10\text{-}5)$$

Prin această condiţie se realizează:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{minim.} \qquad (10\text{-}6)$$

Fără a mai face apel la alte ipoteze suplimentare, prin condiţia (10-5) se deduc soluţii pentru $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{Q}_x$, s_0, s_x, s_y, λ_1, λ_2, θ, într-o reţea dată (v. 21.4).

Observaţie. S-ar putea atrage atenţia că prin ecuaţia (10-6) soluţiile parametrilor $\mathbf{X}$ se încadrează optim într-o formă determinată anterior în mod aproximativ, prin mărimile $\mathbf{X}^0$ cuprinse în volumul de date iniţiale, ceea ce constituie unul din punctele critice ale metodei examinate.

O consecinţă a relaţiei (10-6) constă în faptul că suma pătratelor erorilor medii *Helmert* este minimă în acest caz:

$$s_0^2 \sum (Q_{xx} + Q_{yy}) = \sum (s_x^2 + s_y^2) = \sum s_i^2 \rightarrow \text{minim.} \qquad (10\text{-}7)$$

Prin urmare, rezolvarea problemei optimizării datelor iniţiale constă în introducerea relaţiei suplimentare (10-5), ceea ce are drept consecinţă (10-6) şi (10-7):

Referitor la modalităţile practice de realizare a condiţiei (10-5) se va reveni în 24.1 unde se vor descrie algoritmi de calcul specifici pentru un tip concret de reţea geodezică considerată. Trebuie totuşi menţionat şi aici că rezolvarea descrisă nu este specifică reţelelor geodezice de stat, avîndu-se în vedere în primul rînd faptul că asemenea reţele au fost realizate după principiul „de la reţea de ordin superior la reţea de ordin inferior" şi prin urmare în reţelele considerate, în procesele de prelucrare, intervine un număr oarecare de elemente fixe din reţelele deja prelucrate. Mai există şi alte considerente pentru care soluţia (10-5) nu poate fi acceptată ca generală şi obligatorie, deşi consecinţa (10-7) ar putea constitui un argument important în acest sens.

10.1.2. Optimizarea configuraţiei reţelei geodezice (design de ordinul 1)

Se presupune cunoscut volumul datelor iniţiale, definit la începutul 10.1.1.: $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{C}_M$.

Modalitatea concretă în care sînt repartizate punctele reţelei este reflectată direct în matricea $\mathbf{B}$ care intervine în modelul funcţional (9-26), astfel încît se poate afirma că matricea $\mathbf{B}$ reprezintă configuraţia reţelei în mod analitic.

În alte situaţii, în care de exemplu poziţia punctelor noi care intervin într-o reţea geodezică este descrisă prin funcţii de forma (9-45), matricea $\mathbf{F}$ conţine, de asemenea, informaţii importante privind configuraţia reţelei considerate.

Optimizarea configuraţiei reţelei geodezice (design de ordinul 1) constă în determinarea optimă a matricelor $\mathbf{B}$ şi (eventual) $\mathbf{F}$. Noţiunea de optimizare include realizarea şi a unor alte categorii de cerinţe:

— precizia maximă de determinare (globală sau locală) a reţelei;
— gradul de încredere maxim în rezultatele obţinute din prelucrare;
— volumul minim de cheltuieli.

Asemenea aspecte intervin, de fapt, şi în celelalte categorii de probleme de optimizare la care ne vom referi în continuare (v. 10.2.).

Optimizarea configuraţiei unei reţele geodezice de stat ar implica un volum enorm de calcule. Afirmaţia se bazează pe faptul că ar trebui introduse un număr extrem de mare de restricţii, în mod deosebit de relief şi de alte categorii de obstacole, de care programul de prelucrare ar trebui să ţină seamă.

Asemenea greutăţi, desigur la altă scară, intervin şi în reţelele geodezice locale, în mod deosebit cînd acestea sînt amplasate în zone muntoase sau puternic populate.

De aceea încercările şi reuşitele de pînă acum se referă la reţele de mici dimensiuni, sau la părţi diferite de structură, adică la exemple izolate în general. Instrucţiunile de realizarea reţelelor geodezice de stat prevăd limite destul de largi în raport cu configuraţia optimă, tocmai pentru că se au în vedere dificultăţile reale de proiectare, generate de factorii naturali care se instituie ca restricţii extrem de importante.

Pentru a putea oferi imagini sugestive în privința configurației optime a unei rețele geodezice, deoarece metodele programării liniare sînt extrem de complicate în această situație, se va deduce configurația optimă pentru diferite elemente de structură care intervin în rețelele geodezice, deci nu pentru rețeaua geodezică în ansamblu (v. 10.4).

10.1.3. OPTIMIZAREA PROGRAMULUI DE MĂSURĂTORI GEODEZICE (DESIGN DE ORDINUL 2)

Se presupune cunoscută configurația rețelei reflectată de matricea **B** și (eventual) de matricea **F**.

Se caută determinarea optimă a programului de măsurători, mai ales din punctul de vedere al stabilirii numărului de repetări al fiecărei măsurători pentru a se putea satisface anumite funcții de scop și restricții impuse prin programul de optimizare.

Rezultatul optimizării programului de măsurători constă, în general, în perfecționări succesive a matricei ponderilor **P**, față de forma sa inițială.

Această categorie de optimizare este cea mai cercetată în ultimii ani (*Grafarend* 1979, *Fotescu* 1979, *Pelzer* 1979 ș.a.) și rezultatele pot fi utilizate în multe din situațiile frecvent întîlnite în practică. De aceea se vor examina unele posibilități practice de abordare a rezolvărilor acestei categorii de probleme de optimizare în 10.2 și 10.3.

10.1.4. OPTIMIZAREA OBSERVAȚIILOR SUPLIMENTARE (DESIGN DE ORDINUL 3)

Problematica acestei categorii de optimizare este asemănătoare cu cea descrisă în 10.1.3.: într-o rețea deja realizată (se cunoaște configurația rețelei și ca urmare matricea **B** și eventual matricea **F**) se urmărește optimizarea rețelei prin introducerea unor observații suplimentare.

10.2. FUNCȚII DE SCOP ȘI RESTRICȚII LA OPTIMIZAREA REȚELELOR GEODEZICE

Clasificarea prezentată în 10.1.4. a problemelor de optimizare care intervin în practica proiectării complexe a unei rețele geodezice are în primul rînd rolul de a face o distincție clară între problematicile specifice fiecărei categorii posibile. Această clasificare are prin urmare și o justificare didactică.

De multe ori proiectantul unei rețele geodezice își propune să satisfacă, aproape simultan, cît mai multe funcții de scop conținute în cele patru categorii de optimizări. Deoarece soluțiile se influențează reciproc, se preferă și rezolvări iterative, pentru a se constata în diferite trepte ce rezultate se obțin și în ce direcție trebuie acționat în continuare.

Combinarea mai multor categorii de soluții la problemele de optimizare este numită de *Grafarend* (1979) ***design hibrid***.

În cadrul optimizării rețelelor geodezice, relațiilor (10-1) din forma canonică a problemelor de propagare liniară le corespunde modelul funcțional definit prin (9-26) sau (9-30).

În cele ce urmează se examinează unele posibilități de definire a funcțiilor de scop și a restricțiilor care pot interveni uzual în problemele de optimizare a rețelelor geodezice.

Funcțiile de scop și restricțiile utilizate în continuare au în vedere *indicatorii de precizie* care pot fi definiți într-o rețea geodezică.

Criteriile care determină așa-numita *încredere în rețeaua geodezică* ar necesita multe noțiuni suplimentare și ca urmare o dezvoltare care depășește cadrul manualului. Cititorul interesat poate găsi în literatura de specialitate indicatorii de precizie care au la bază și asemenea criterii.

10.2.1. INDICATORI DE PRECIZIE LOCALĂ

● Dintre indicatorii de precizie posibili, cei mai eficienți, și ca atare cei care pot căpăta aplicabilitate mai largă sînt indicatorii de precizie locală. Aceasta se justifică prin faptul că la prelucrarea unei rețele geodezice o atenție deosebită este acordată cunoașterii preciziei de determinare pentru fiecare punct în parte, luîndu-se măsuri corespunzătoare pentru evitarea cazurilor de puncte *insuficient de precis determinate*.

● Pentru indicatorii de precizie acceptați ca eficienți în geodezia utilitară s-ar putea stabili anumite toleranțe T care constituie forme de exprimare în cazul nostru a restricțiilor definite prin (10-3). Asemenea aspecte ar trebui avute în vedere la o nouă redactare a instrucțiunilor de realizare a rețelelor geodezice de sprijin. În acest scop ar putea fi utilizați acei indicatori de precizie care s-au dovedit, din numeroase studii teoretice-practice, ca cei mai semnificativi (*Fotescu* 1979, *Augath* 1980 ș.a.):

— abaterile standard s_x, s_y ale coordonatelor unui punct oarecare din rețea;

— abaterea standard totală s_t (eroarea medie *Helmert*);

— mărimea semiaxei mari a elipsei erorilor.

Astfel, din ecuația (9-65) rezultă condiția:

$$\text{urma } \mathbf{C}_P \rightarrow \text{minim} \tag{10-8}$$

sau:

$$\text{urma } \mathbf{Q}_P \rightarrow \text{minim}, \tag{10-9}$$

precum și restricția:

$$s_t = \sqrt{\text{urma } \mathbf{C}_P} \leqslant T_{\mathbf{C}_P}. \tag{10-10}$$

● În unele situații intervine necesitatea ca anumite funcții de coordonatele punctelor rețelei să fie determinate cu erori medii minime:

— eroarea unei diferențe de coordonate;

— eroarea unei lungimi sau a unei orientări (pentru o latură din rețea sau pentru o „diagonală" a rețelei).

În acest fel există posibilitatea introducerii unor noi funcții de scop de forma:

$$Q_F \rightarrow \text{minim}, \tag{10-11}$$

și eventual, pentru anumite situații limită, anticipate în funcție de structura și destinația rețelei geodezice:

$$s_F = s_0 \sqrt{Q_F} \leqslant T_{Q_F}. \tag{10-12}$$

Astfel de funcții depind însă într-o prea mare măsură de procedeele tehnice prin care sînt determinate pozițiile punctelor în rețea (triangulație, trilaterație, poligonometrie ș.a.) și ca urmare nu pot fi generalizate cu ușurință pentru situațiile care pot interveni în rețelele geodezice.

10.2.2. INDICATORI DE PRECIZIE GLOBALĂ

● Indicatorii de precizie globală oferă posibilitatea caracterizării de ansamblu a unei rețele geodezice, atît în comparație cu alte rețele similare, cît și în aprecierea calității intrinseci a rețelei considerate, prin comparații ale rezultatelor obținute din utilizarea mai multor modele funcțional-stochastice la prelucrare.

● Din acest ultim punct de vedere un rol important îl are abaterea standard a unității de pondere (9-44), respectiv (9-52). Valoarea sa este dedusă într-un proces de optimizare (9-31), respectiv (9-32), specific metodei celor mai mici pătrate. Proiectantul unei rețele geodezice poate influența mărimea sa prin acționări asupra părții de la numitor:

$$r = n - u.$$

Este de observat însă că modificări în modelul funcțional prin introducerea unor noi măsurători (se mărește n) sau a unor parametri suplimentari (se mărește u) modifică nu numai mărimea $(n-u)$, ci și $\mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}$, și în consecință, s_0. Atunci cînd modificările corespund corect situației în care s-au efectuat observațiile, în mod normal se vor obține valori mai mici pentru s_0 și prin urmare se poate aprecia că rezultatele compensării sînt calitativ superioare. Introducerea unor parametri suplimentari nu poate fi însă considerată ca o măsură absolut necesară. Mărirea exagerată a numărului u de parametri sau alegerea lor în mod necorespunzător poate influența extrem de negativ asupra prelucrării sau chiar să o denatureze (cînd, de exemplu $u \to n$).

● Un indicator de precizie globală, util în mod deosebit în rețelele de dimensiuni nu prea mari, poate fi formulat prin necesitatea determinării optime a tuturor punctelor noi ale rețelei:

$$\sum (s_x^2 + s_y^2) = \sum s_i^2 = s_0^2 \sum (Q_{xx} + Q_{yy}) = \text{urma } \mathbf{C}_x \to \text{minim} \quad (10\text{-}7)$$

un criteriu deja menționat în (10-5). Notînd cu N numărul punctelor noi din rețea, s-ar putea introduce și o restricție de forma:

$$\bar{s}_t = s_0 \sqrt{\frac{\text{urma } Q_x}{2N}} \leqslant T_{c_x}, \quad (10\text{-}13)$$

care să fie avută în considerație la proiectarea rețelelor geodezice. Toleranțele T_{c_x} ar urma să aibă valori distincte pe categorii concrete de rețele geodezice (desigur și pe ordine ș.a.m.d.).

● În procesele de optimizare a rețelelor geodezice o atenție deosebită este acordată optimizării matricei de covarianță $\mathbf{C}_M$ a măsurătorilor, deoarece această operațiune poate conduce la stabilirea unui număr optim de măsurători ce urmează a se efectua în rețea. În acest mod se ajunge la funcții de scop, respectiv la restricții, cu caracter economic:

$$\mathbf{C}_M \to \text{optim.} \quad (10\text{-}14)$$

Datorită relațiilor (9-9) și (9-13), funcția de scop (10-14) poate fi formulată:

$$\mathbf{P} \to \text{optim.} \quad (10\text{-}15)$$

Pentru simplificarea expunerii se consideră cazul particular al observațiilor independente, întîlnit frecvent în practică. În baza relațiilor (9-12),

(9-15), (9-16), (9-17) și (9-45) rezultă că matricea ponderilor are următoarea formă în această situație:

$$\mathbf{P} = s_0'^2 \begin{Vmatrix} \frac{1}{s_1'^2} & & & \\ & \frac{1}{s_2'^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s_n'^2} \end{Vmatrix}. \quad (10\text{-}16)$$

Acceptînd că fiecare măsurătoare M_i^0 este obținută *prin medierea valorilor unui număr oarecare n_i de determinări elementare* efectuate asupra mărimii respective, putem înlocui:

$$s_i'^2 = \frac{s_{0i}'^2}{n_i}, \quad (10\text{-}17)$$

unde: s_{0i}' — abaterea standard a unei singure măsurători, determinabilă în funcție de procedeul specific de măsurare.
Rezultă:

$$\mathbf{P} = s_0'^2 \begin{Vmatrix} \frac{n_1}{s_{10}'^2} & & & \\ & \frac{n_2}{s_{20}'^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{n_n}{s_{n0}'^2} \end{Vmatrix} = s_0'^2 \mathbf{P}_0 \mathbf{H} \quad (10\text{-}18)$$

Matricea $\mathbf{P}_0$ este determinabilă în procesul de prelucrare prealabilă a observațiilor originare:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{s_{10}'^2} & & & \\ & \frac{1}{s_{20}'^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s_{n0}'^2} \end{Vmatrix}, \quad (10\text{-}19)$$

iar matricea $\mathbf{H}$ depinde numai de numerele n_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) în care se repetă măsurarea unei mărimi oarecare M_j^0:

$$\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} n_1 & & & \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_n \end{Vmatrix}. \quad (10\text{-}20)$$

● Prin aceasta funcția de scop (10-15) devine:

$$\mathbf{H} \rightarrow \text{optim.} \qquad (10\text{-}21)$$

Funcțiile de scop în care intervin numerele n_i de măsurători sînt însoțite și de restricții de forma:

$$n_i \geqslant 0; \qquad n_i \text{ număr întreg (restricție naturală).} \qquad (10\text{-}22)$$

Pentru a puncta caracterul economic al unor asemenea funcții de scop, restricțiile (10-22) sînt completate de o restricție de cost total, care se poate scrie sub forma:

$$\sum c_i n_i \leqslant c_t , \qquad (10\text{-}23)$$

unde c_i reprezintă costul (specific) pentru o singură măsurătoare M_i^0, iar c_t costul total al întregii lucrări.

● Un caz particular al cercetării configurației optime pentru matricea ponderilor **P** este întîlnit în cazul *rețelelor geodezice omogene și izotrope* adică atunci cînd elipsele erorilor, pentru punctele noi ale rețelei, se transformă în cercuri de aceeași rază. *Fotescu* (1979) găsește expresia generală a matricei ponderilor **P*** pentru un asemenea caz, care este aplicabilă și în cadrul rețelelor libere:

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{B}\,(\mathbf{B}^T\,\mathbf{B})^{-1}\,(\mathbf{B}^T\,\mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{B}^T. \qquad (10\text{-}24)$$

10.3. ALGORITMI DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE OPTIMIZARE. CONCLUZII CU CARACTER UTILITAR

Pentru rezolvarea unor probleme de programare liniară se disting (*Mihăilă* 1964) următoarele categorii de metode:

● *Metode particulare* de rezolvare în care se încadrează *procedeele grafice* și *procedeele iterative*. Aceste metode permit, aproape întotdeauna, analiza rezultatelor intermediare obținute și ca urmare posibilitatea intervenției din partea calculatorului (uman sau electronic). În mod uzual asemenea procedee se pretează totuși la un număr restrîns de variabile, iar aproximația de calcul nu poate fi determinată sau cunoscută întotdeauna.

● *Metode generale* de rezolvare a problemelor de programare liniară (*metoda simplex, metoda Monte-Carlo, Fiacco-Mc Cormick, Fletcher-Powell* ș.a.) care și-au găsit pînă în prezent o aplicabilitate numai în rețele geodezice de mici dimensiuni (*Herzog* 1972, *Fotescu* 1979, *Schmidt* 1979, *Grafarend* 1975, 1979, *Pelzer* 1980, *Augath* 1980 ș.a.).

Descrierea metodelor generale de rezolvare a problemelor de optimizare depășește cadrul manualului și poate fi urmărită în publicațiile geodezice menționate mai înainte sau în lucrări din domeniul matematicii, al economiei sau organizării producției, care abordează asemenea problematică. În bibliotecile centrelor de calcul există programe specializate care rezolvă astfel de probleme, care, prin adaptări corespunzătoare, ar putea fi folosite și în cadrul problemelor de optimizare a rețelelor geodezice.

Totuși, aplicabilitatea unor asemenea algoritmi generali de rezolvare este încă foarte restrînsă fiind determinată de următoarele impedimente principale:

— volumul mare de calcul pe măsura creșterii numărului de parametri;

— soluțiile găsite conduc, aproape întotdeauna, la micșorarea posibilităților de control general al rețelei. Se poate aprecia (*Pelzer* 1980 b) că în aceasta constă *punctul slab al majorității problemelor de optimizare a rețelelor geodezice*: soluțiile obținute prin algoritmi generali concentrează măsurătorile pe cîteva elemente ale configurației rețelei, prin care se realizează minimul căutat. Concomitent se obține însă diminuarea numărului de măsurători suplimentare (sau, cum au fost numite la noi în țară, măsurători abundente), ceea ce micșorează posibilitățile de control în rețea, prin care se pot depista surse de erori specifice. Aceasta nu înseamnă însă că aspectele legate de optimizarea preciziei rețelei nu rămîn fără importanță practică, deoarece soluțiile obținute, chiar pe rețele particulare ca formă, și de mici dimensiuni, oferă posibilitatea de apreciere a acțiunii fiecărei măsurători asupra preciziei locale sau globale realizate în rețeaua geodezică considerată.

Din aceste considerente, în rezolvările efective cunoscute pînă acum au fost preferate soluții iterative de rezolvare a proceselor de optimizare. Soluțiile intermediare, generate de programul de optimizare, au fost interpretate și coroborate și cu alte principii cunoscute de realizare a rețelelor geodezice, cum ar fi: mărirea numărului de măsurători pe direcțiile rezultate ca insuficient de precis determinate, „dublarea" măsurătorilor considerate cu măsurători de alt gen (de exemplu introducerea măsurătorilor de distanțe în rețelele de triangulație).

Un asemenea algoritm de îmbunătățire a preciziei locale de determinar a rețelelor geodezice de triangulație — trilateratie este descris în figura 10-2, avîndu-se în vedere metoda observațiilor indirecte.

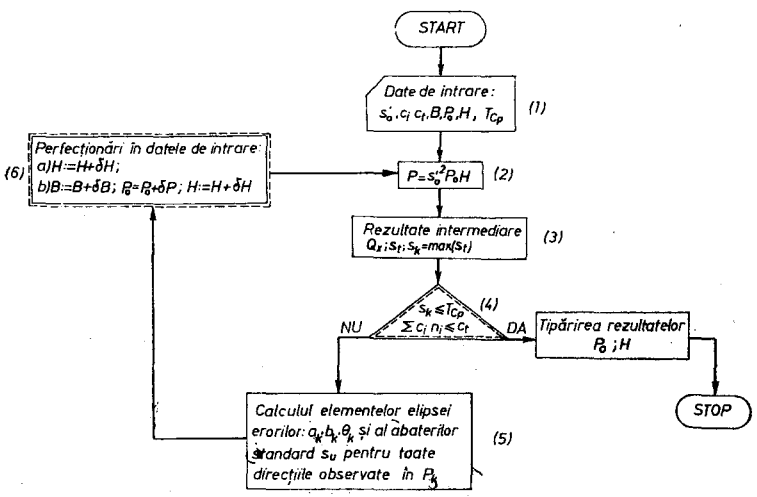


Fig. 10-2. Organigrama algoritmului de îmbunătățire a preciziei locale.

10.3.1. DESCRIEREA BLOCURILOR

Cu informațiile inițiale s_0^1, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{H}$, conținute în blocul *1* se poate determina, într-o primă iterație, matricea ponderilor $\mathbf{P}$ [blocul *2*].

Din rezultatele intermediare care se obțin într-o prelucrare prin metoda observațiilor indirecte aici interesează în primul rînd [blocul *3*]:

— matricea cofactorilor necunoscutelor $\mathbf{Q}_x$ (matricea inversă a sistemului ecuațiilor normale);

— abaterea standard totală (eroarea medie *Helmert*) pentru toate punctele noi din rețea (vectorul $\mathbf{s}_l$). Tot în blocul *3* se determină valoarea maximă s_k dintre componentele vectorului $\mathbf{s}_l$. Punctul respectiv P_k, numit aici „punct critic", este reținut pentru calculele care se vor face în celelalte blocuri.

Observație. Dacă această analiză este făcută în procesul de proiectare a rețelei geodezice, așa cum este plasată de fapt în manual, abaterea standard a unității de pondere s_0 necesară la calculele din blocul 3 va fi înlocuită de valoarea s_0', determinată empiric.

Dacă analiza este efectuată în scopul îmbunătățirii preciziei unei rețele geodezice deja observate, atunci există posibilitatea calculării corecțiilor v și deci a abaterii standard a unității de pondere s_0 în diferite stadii ale procesului iterativ de analiză.

Blocul *4* este un bloc de analiză a preciziei locale de determinare a rețelei în stadiul corespunzător iterației considerate. Analiza poate fi lăsată numai în seama calculatorului electronic (notația —) sau și în seama calculatorului uman (notația — — —). În primul caz se compară valoarea maximă din vectorul $\mathbf{s}_l$ cu toleranța corespondentă, urmînd ca operațiile din blocurile *5* și *6* să fie dirijate în punctul P_k din rețea. Cînd analiza aparține calculatorului uman (este necesară o tipărire intermediară a vectorului $\mathbf{s}_l$) se pot hotărî intervenții concomitente în mai multe puncte „critice", în care nu este respectată toleranța, mai ales atunci cînd punctele sînt situate în poziții diferite ale rețelei. În asemenea situații modificările aduse, eventual, numai într-unul dintre puncte poate influența prea puțin asupra celorlalte puncte „critice" din rețea.

Modificările pot fi dirijate, așa cum s-a mai specificat, în două direcții;

● Se pot aduce modificări în matricea $\mathbf{H}$ prin mărirea numărului de repetări a observațiilor pe „direcțiile critice" din punctul (respectiv punctele) P_k:

$$\mathbf{H} := \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}. \tag{10-25}$$

Și aici există posibilitatea de a se opera fie numai asupra unei singure direcții critice, fie simultan asupra mai multor direcții critice. De menționat că modificările de acest gen se influențează reciproc, mai ales cînd direcțiile considerate sînt observate în același punct.

● Se pot aduce modificări în datele inițiale prin introducerea unor măsurători de alt gen pe direcțiile critice. De exemplu, se pot prevedea măsurători suplimentare de distanțe. Ca urmare se modifică matricele $\mathbf{B}$, $\mathbf{P}_0$ și $\mathbf{H}$ cu cantități dependente de noile elemente introduse.

Decizia asupra modalității de modificare a datelor inițiale poate fi lăsată de exemplu, în seama calculatorului electronic. Atunci programul de calcul trebuie să explicitezeze care dintre cele două căi trebuie să fie urmată. Recomandabilă este însă intervenția calculatorului uman care, în

funcție de experiența proprie, poate discerne care dintre soluții este mai eficientă în situația concretă examinată.

Pentru a se determina direcțiile critice, adică direcțiile pe care urmează să se opereze modificările menționate, în blocul *5* se calculează elementele elipsei erorilor în punctul (respectiv în punctele) P_k și apoi abaterile standard s_u pentru toate direcțiile observate din P_k (9-60), (9-61). Intervențiile se vor face pe direcțiile unde:

$$s_u > T_{c_P}. \tag{10-26}$$

În cadrul acestui algoritm există cîteva *aspecte de utilitate practică*:

— există formule de calcul (*Fotescu* 1979) al influenței pe care o au unele măsurători suplimentare introduse în procesul de calcul asupra rezultatelor parțiale sau finale ale prelucrării, ceea ce simplifică, destul de sensibil, calculele în iterația următoare;

— în rețelele geodezice în care intervin măsurători exprimate în diferite unități dimensionale, se recomandă standardizarea (omogenizarea) acestora (v. 20.4.4.).

10.3.2. CONCLUZII CU CARACTER UTILITAR

Cercetările teoretice și mai ales exemplificările practice făcute pe diverse tipuri de rețele geodezice (*Fotescu* 1979, *Augath* 1980, *Pelzer* 1980 ș.a.) au condus la următoarele concluzii cu caracter utilitar:

1. În rețelele geodezice constrînse, legăturile la punctele vechi trebuie realizate cu măsurători repetate într-un număr mare. În comparație cu celelalte măsurători din rețea, aceste legături vor avea prin urmare ponderea cea mai mare.

2. Părțile din rețea în care intervin mai puține măsurători suplimentare, în raport de cele strict necesare pentru determinarea punctelor [$(n-u)_{local}$ mic] este, de asemenea, necesară asigurarea unei precizii corespunzătoare.

3. Măsurarea unor „diagonale" lungi în rețeaua geodezică (adică observații peste mai multe figuri elementare) este justificată numai în cazul cînd acestea sînt legate direct de punctele fixe. În celelalte cazuri efectul este nesemnificativ, deși efortul suplimentar este destul de mare.

4. Studiile de optimizare care au ca suport funcții de scop și criterii de „siguranță a rețelei geodezice" conduc la necesități de repartizare mult mai uniformă a observațiilor în rețea, în comparație cu studiile care au ca suport funcții de scop și criterii de precizie locală. Este important de menționat faptul că rezultatele diferă destul de mult în funcție de utilizarea celor două categorii de criterii de optimizare. Această concluzie evidențiază de altfel caracterul relativ al problemelor de optimizare și necesitatea de a nu se absolutiza sau generaliza concluziile obținute în situații concrete, *la toate categoriile de rețele întîlnite*.

5. În toate tipurile de rețele examinate a rezultat că un rol important îl au observațiile suplimentare și ca urmare necesitatea de a se elimina situațiile limită, în care se efectuează doar una sau două măsurători peste numărul strict necesar pentru determinarea punctelor din rețea (ceea ce, desigur, micșorează mult și posibilitățile de control). Astfel, în figura 10-3 componentele elementare ale rețelelor geodezice prezentate în cazurile *d*, *c* și *f* sînt de preferat componentelor omoloage din figurile *a*, *b* și *c*.

6. Pentru ilustrarea algoritmului de calcul prezentat în figura 10-2 se dă exemplul prezentat de *Fotescu* 1979 (fig. 10-3, *g* și tabelul 10-2). În

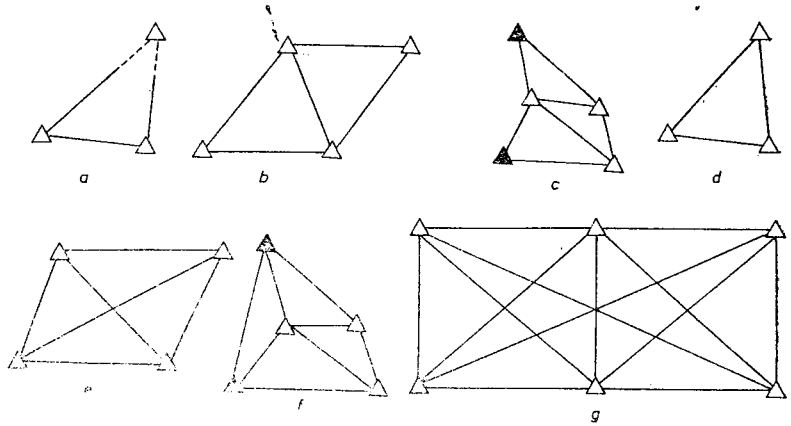


Fig. 10-3. Componente elementare în rețele de triangulație.

rețeaua de triangulație considerată s-a impus ca abaterea standard s_u pe o direcție oarecare din rețea să nu depășească $\pm$ 1 cm, iar îmbunătățirea rețelei să se facă prin măsurători suplimentare de lungimi.

Din tabelul 10-2 rezultă că pentru realizarea scopului propus este necesară executarea de măsurători suplimentare pe laturile (*1—2*), (*1—4*), (*3—4*), (*3—6*) și (*5—6*).

Tabelul 10—2

Latura	Ponderea			
	Iterația *1*	Iterația *2*	Iterația *3*	Iterația *4*
1—2	1,0	2,72	2,20	2,18
1—4	1,0	1,46	1,35	1,36
1—3	1,0	1,08	0,95	0,96
2—4	1,0	1,08	0,95	0,96
2—3	1,0	1,04	0,97	0,98
3—4	1,0	2,16	1,83	1,85
3—6	1,0	1,46	1,35	1,36
3—5	1,0	1,08	0,95	0,96
4—6	1,0	1,08	0,95	0,96
4—5	1,0	1,04	0,97	0,98
5—6	1,0	2,72	2,20	2,18
1—6	1,0	0,98	0,90	0,90
2—5	1,0	0,98	0,90	0,90

10.4. EXEMPLE DE ELEMENTE OPTIME DE STRUCTURĂ ÎN REȚELELE DE TRIANGULAȚIE

Așa cum s-a specificat în 10.1.2., optimizarea în ansamblu a configurației unei rețele geodezice implică dificultăți deosebite atît de ordin tehnic, cît și economic. De aceea, prezentarea unor soluții cu caracter restrîns, pe elemente separate, poate oferi indicii importante pentru proiectantul unei rețele geodezice, deși soluția nu este strict riguroasă. În continuare se prezintă cîteva situații din cadrul rețelelor de triangulație, deoarece structura acestora este mai complexă în comparație cu cea a rețelelor de nivelment sau gravimetrice.

10.4.1. EROAREA UNEI LATURI ÎNTR-UN LANȚ DE TRIANGULAȚIE

Se consideră lanțul de triangulație din figura 10-4, format numai din triunghiuri, în care se cunosc din măsurători: latura b^0 (cu eroarea s'_b) și unghiurile A_i^0, B_i^0, C_i^0 ($i = 1, 2, \ldots, n$) de aceeași precizie s'. Se acceptă că unghiurile măsurate sînt valori independente și că toate măsurătorile sînt reduse la planul de proiecție. Se notează cu v_{A_i}, v_{B_i}, v_{C_i} ($i = 1, 2, \ldots, n$) și respectiv v_b corecțiile care se determină din compensarea prin metoda celor mai mici pătrate:

$$A_i = A_i^0 + v_{A_i};\ B_i = B_i^0 + v_{B_i};\ C_i = C_i^0 + v_{C_i};\ (i=1, 2, \ldots, n); \quad (10\text{-}27)$$

$$b = b^0 + v_b.$$

Referitor la figura 10-4 se folosesc următoarele denumiri:

— laturile a_1, a_2, ... și unghiurile A_1, A_2, ... se numesc laturi, respectiv unghiuri de legătură;

— laturile c_1, c_2, ... și unghiurile C_1, C_2, ... se numesc laturi, respectiv unghiuri intermediare.

Lungimea laturii finale a_n se poate calcula (după compensare) prin aplicarea consecutivă a formulei sinusurilor:

$$a_n = b\,\frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_n}. \quad (10\text{-}28)$$

Eroarea medie a lungimii acestei laturi se calculează prin aplicarea formulei erorii unei funcțiuni la compensarea observațiilor condiționate. Ecuațiile de condiție liniarizate ale corecțiilor care trebuie scrise pentru lanțul de triangulație din figura 10-4 sînt:

$$v_{A_i} + v_{B_i} + v_{C_i} + w_i = 0; \quad (10\text{-}29)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

unde:

$$w_i = A_i^0 + B_i^0 + C_i^0 - 180°. \quad (10\text{-}30)$$

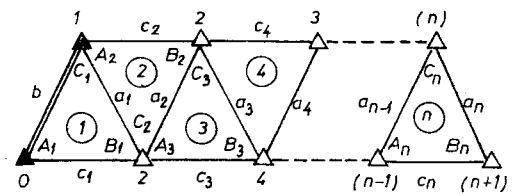


Fig. 10-4. Lanț simplu de triunghiuri.

Pentru a liniariza funcția $F = a_n$, se aplică formulele:

$$f_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial A_1}\right)_0 = + a_n^0 \operatorname{ctg} A_1^0; \qquad f_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial A_2}\right)_0 = + a_n^0 \operatorname{ctg} A_2^0;$$

$$f_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial B_1}\right)_0 = - a_n^0 \operatorname{ctg} B_1^0; \qquad f_5 = \left(\frac{\partial F}{\partial B_2}\right)_0 = - a_n^0 \operatorname{ctg} B_2^0; \quad (10\text{-}31)$$

$$f_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial C_1}\right)_0 = 0; \qquad f_6 = \left(\frac{\partial F}{\partial C_2}\right)_0 = 0 \ \ldots \text{ etc.},$$

precum și:

$$f_b = \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)_0 = \frac{a_n^0}{b^0}. \quad (10\text{-}32)$$

Folosind pentru calculul ponderilor expresia: $p = 1/s'^2$, se pot calcula elementele necesare pentru deducerea coeficientului de pondere Q_{FF}:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = \left[\frac{bb}{p}\right] = \left[\frac{cc}{p}\right] = \ldots = \left[\frac{nn}{p}\right] = 3\left[\frac{s''}{\rho''}\right]^2; \quad (10\text{-}33)$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = \left[\frac{ac}{p}\right] = \ldots = \left[\frac{an}{p}\right] = 0 \ldots \text{ etc.},$$

astfel încît:

$$\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right] = \left[\frac{bb}{p}\right]; \left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right] = \left[\frac{cc}{p}\right] \ldots \text{ etc.} \quad (10\text{-}34)$$

Din relațiile (10-31) și (10-32) rezultă:

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = a_n^{02}\left\{\left(\frac{s_b'}{b^0}\right)^2 + \left(\frac{s''}{\rho''}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{ctg}^2 A_i^0 + \operatorname{ctg}^2 B_i^0)\right\}, \quad (10\text{-}35)$$

iar din relațiile (10-23) și (10-31):

$$\left[\frac{af}{p}\right]^2 = \left(\frac{s''}{\rho''}\right)^4 \cdot (a_n^0)^2 (\operatorname{ctg} A_1^0 - \operatorname{ctg} B_1^0)^2; \quad (10\text{-}36)$$

$$\left[\frac{bf}{p} \cdot 1\right]^2 = \left[\frac{bf}{p}\right]^2 = \left(\frac{s''}{\rho''}\right)^4 (a_n^0)^2 (\operatorname{ctg} A_2^0 - \operatorname{ctg} B_2^0)^2 \ldots \text{ etc.} \quad (10\text{-}37$$

Cu aceasta, eroarea relativă a ultimei laturi din lanțul de triangulație considerat poate fi determinată prin aplicarea relațiilor (9-91) — (9-92):

$$\frac{s_{a_n}'}{a_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{s_b'}{b^0}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{s''}{\rho''}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{ctg}^2 A_i^0 + \operatorname{ctg}^2 B_i^0 + \operatorname{ctg} A_i^0 \operatorname{ctg} B_i^0)}. \quad (10\text{-}38)$$

Observații. 1. Eroarea ultimei laturi depinde în primul rînd de erorile laturii inițiale și a unghiurilor măsurate. Uneori se consideră $s_b'/b^0 \approx 0$, datorită preciziei ridicate de măsurare a laturilor inițiale în triangulația de ordin superior.

2. Geometria rețelei, reflectată de valorile pe care le au unghiurile A_i^0, B_i^0, influențează de asemenea mărimea acestei erori prin expresia:

$$R_i = \operatorname{ctg}^2 A_i^0 + \operatorname{ctg}^2 B_i^0 + \operatorname{ctg} A_i^0 \operatorname{ctg} B_i^0. \quad (10\text{-}39)$$

3. Lungimea lanțului nu poate fi oricît de mare, căci în acest caz s_{a_n}' crește în aceeași măsură.

4. Formula (10—38) modificată corespunzător, poate fi aplicată la calculul erorii relative s_{a_i}'/a_i a oricărei laturi de legătură a_i din rețea. În cazul în care în lanțul de triangulație ar exista două laturi măsurate, și anume la extremitățile sale, eroarea relativă maximă se va obține pentru latura de legătură de la mijlocul rețelei, pentru care suma de sub radical ar atinge valoarea maximă. Situația poate fi considerată *optimă* din punctul de vedere examina aici. În adevăr, numărul de triunghiuri existente între extremități și mijlocul rețelei este evident, mai mic decît numărul de triunghiuri dintre extremitățile lanțului și ca urmare eroarea relativă determinată cu relația (10-38) va fi compusă dintr-un număr mai mic de termeni.

5. Dacă se admite că toate triunghiurile lanțului de triangulație sînt echilaterale, rezultă $R_i = 1$ și ca urmare:

$$\frac{s_{a_n}'}{a_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{s_b'}{b^0}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \left(\frac{s''}{\rho''}\right)^2}. \quad (10\text{-}40)$$

6. Dacă se acceptă $s_b/b \approx 0$, rezultă o formulă expeditivă prin care se poate evalua „pierderea de precizie" pe măsura îndepărtării de latura inițială:

$$\frac{s_{a_n}'}{a_n} \approx \pm \frac{s''}{\rho''} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} n}. \quad (10\text{-}41)$$

7. În cazul în care lanțul de triangulație conține și patrulatere geodezice, se obține o micșorare a erorii laturii finale, pentru fiecare patrulater factorul 2/3 din formulele anterioare urmînd să fie înlocuit cu 0,5, luîndu-se varianta cea mai defavorabilă pentru calculul valorii R în triunghiurile ce se pot forma în patrulater. Detalii și demonstrații suplimentare se pot urmări în manualul lui *F.N. Krasovski* (1955).

Exemplu. Pentru a puncta ordinul de mărime, se presupune un lanț de triunghiuri cu o singură latură inițială b, care face parte din rețeaua de ordinul I. Se poate considera: $s_b'/b^0 \approx \pm$ 1/300 000 și $s'' \approx \pm 0{,}7''$. Dacă $b^0 \approx 30$ km, rezultă $s_b' \approx \pm 10$ cm. În situația în care $n = 7$, și toate triunghiurile au forma echilaterală rezultă: $s_{a_7}'/a_7 \approx \pm$ 1/126 000 și deci $s_{a_7} \approx \approx \pm 24$ cm. Dacă există laturi măsurate la ambele extremități, atunci $n = 4$. În această ipoteză optimă rezultă $s_{a_4}/a_4 \approx \pm$ 1/157 000 și deci $s_{a_4} \approx \approx \pm 19$ cm.

10.4.2. FORMA OPTIMĂ A UNUI TRIUNGHI DIN REȚELELE DE TRIANGULAȚIE

Criteriile după care se poate stabili forma optimă a unui triunghi din rețelele de triangulație sînt:

- Laturile de legătură a_i și laturile intermediare c_i să aibă aceeași precizie, astfel încît în dezvoltarea ulterioară a rețelei de triangulație fiecare din acestea să poată fi utilizată ca latură de sprijin.
- Valoarea R_i în oricare triunghi să fie minimă.
- Aplicarea judicioasă a primelor două criterii, astfel încît să rezulte un număr minim de triunghiuri pe o suprafață dată.

Pentru a deduce condițiile ce decurg din aceste criterii se scrie expresia de calcul a ultimei laturi intermediare c_n:

$$c_n = b \frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_{n-1}}{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_{n-1}} \cdot \frac{\sin C_n}{\sin B_n}. \quad (10\text{-}42)$$

Prin analogie cu relația (10-38) se poate scrie eroarea relativă a acestei laturi:

$$\frac{s'_{c_n}}{c_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{s'_b}{b^0}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{m''}{\rho''}\right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (\operatorname{ctg}^2 A_i^0 + \operatorname{ctg} A_i^0 \operatorname{ctg} B_i^0 + \operatorname{ctg}^2 B_i^0) + \right.}$$

$$\left. + \operatorname{ctg}^2 C_n^0 + \operatorname{ctg} C_n^0 \operatorname{ctg} B_n^0 + \operatorname{ctg}^2 B_n^0 \right\}. \qquad (10\text{-}43)$$

Prevederile primului criteriu, adică $s'_{c_n}/c_n = s'_{a_n}/a_n$, se realizează atunci cînd:

$$\operatorname{ctg}^2 A_n^0 + \operatorname{ctg} A_n^0 \operatorname{ctg} B_n^0 = \operatorname{ctg}^2 C_n^0 + \operatorname{ctg} C_n^0 \operatorname{ctg} B_n^0. \qquad (10\text{-}44)$$

Această egalitate este posibilă cînd $\operatorname{ctg} A_n^0 = \operatorname{ctg} C_n^0$ și prin urmare: $A_n^0 = C_n^0$.

Rezultă că din punctul de vedere al primului criteriu, forma optimă este realizată de *triunghiul isoscel*. Pentru a obține valorile unghiulare care satisfac și cel de-al doilea criteriu, se introduce în expresia lui R : $B^0 = 180° - 2A°$, astfel încît se obține:

$$R_{isoscel} = \operatorname{ctg}^2 A^0 + \operatorname{ctg}^2 2A^0 - \operatorname{ctg} A° \operatorname{ctg} 2A^0. \qquad (10\text{-}45)$$

Minimul acestei expresii se obține prin anularea derivatei funcției din membrul drept, care oferă soluția $A° = 52°46'$ și prin urmare rezultă: $B° = 74°28'$.

Pentru un asemenea triunghi isoscel se obține: $R_{iscsel} = 0{,}865$.

Criteriul al treilea este realizat prin utilizarea *triunghiului echilateral*. În adevăr, aria unui triunghi oarecare $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ atinge o valoare maximă, în condiția $2p = a + b + c =$ constant, atunci cînd $a = b = c$. Pentru triunghiul echilateral se obține $R = 1{,}0$. Prin urmare coeficientul R este mai mare în cazul triunghiului echilateral. Dar influența utilizării triunghiurilor isoscele optime nu este, comparativ, semnificativă. În adevăr, continuînd exemplul numeric din paragraful precedent, unde am considerat triunghiuri echilaterale, se obțin în situația acceptării triunghiurilor isoscele $A^0 = C^0 = 52°$; $s'_{a_4}/a_4 \approx \pm\ 1/165\ 000$ și deci $s'_{a_4} \approx \pm\ 18$ cm. Se observă că diferența este nesemnificativă.

Din figura 10-5 se observă că triunghiul echilateral are în plus încă un avantaj față de triunghiul isoscel: lanțurile cu triunghiuri apropiate de forma echilaterală păstrează în general o formă regulată rectilinie, ceea ce este convenabil pentru proiectare.

Condițiile concrete din teren conduc la abateri de la configurația optimă. În acest sens, instrucțiunile *DTM* prevăd (tabelul 10-3) valorile minime

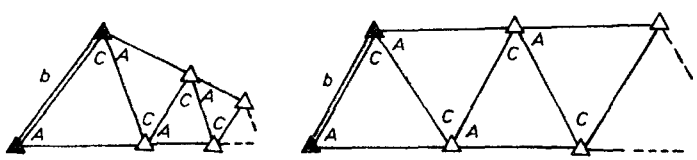


Fig. 10-5. Dezvoltarea unui lanț de triunghiuri:
a — triunghiuri isoscele ($\hat{A} = \hat{C} = 52°$); *b* — triunghiuri echilaterale.

Tabelul 10—3

Ordinul rețelei	În triunghiuri	În patrulatere (formate de diagonală)
I	45^g (40°)	35^g (30°)
II	33^g (30°)	17^g (15°)
III	28^g (25°)	—
IV	28^g (25°)	—
V	30^g (27°)	—

Tabelul 10—4

Ordinul de triangulație	Lungimea medie a laturii [km]	Lungimea minimă a laturii [km]
I	25 la munte 20 la șes	10
II	13	7
III	8	5,5
IV	4	2
V	2	1

ale unghiurilor acceptate în figurile geometrice din rețelele de triangulație, care alături de elementele din tabelul 10-4 reprezintă prescripții de proiectare a rețelelor de triangulație din țara noastră.

10.4.3. UNGHIUL OPTIM LA INTERSECȚIA SIMPLĂ ÎNAINTE

În unele situații izolate în triangulația de stat și mai frecvent în unele triangulații locale, îndesirea rețelei se realizează prin intersecții multiple înainte (uneori și prin intersecții multiple înapoi), care sînt prelucrate fie riguros, fie prin anumite metode aproximative. De aceea, intersecția simplă înainte poate fi considerată ca un caz particular, ce ne va ajuta însă să desprindem o concluzie cu privire la conformația optimă a figurii geometrice care intervine în asemenea lucrări.

În figura 10-6 este reprezentat cazul tipic al intersecției simple înainte:

— coordonatele x_1, y_1 și x_2, y_2 ale punctelor *1* și *2* sînt considerate ca nefiind afectate de erori;

— unghiurile α_1 și α_2 sînt măsurate cu aceeași precizie: $s_{\alpha_1} = s_{\alpha_2} = s''_\alpha$ și ca urmare $s_{\theta_1} = s_{\theta_2} = s''_\alpha$.

Se consideră cunoscute formulele intersecției simple înainte:

$$x = \frac{y_1 - y_2 + x_2 \operatorname{tg} \theta_2 - x_1 \operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}; \qquad (10\text{-}46)$$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \theta_1 = y_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} \theta_2,$$

sau:

$$y = \frac{x_1 - x_2 + y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_1 \operatorname{ctg} \theta_1}{\operatorname{ctg} \theta_2 - \operatorname{ctg} \theta_1}; \qquad (10\text{-}47)$$

$$x = x_1 + (y - y_1) \operatorname{ctg} \theta_1 = x_2 + (y - y_2) \operatorname{ctg} \theta_2.$$

Soluția la problema pusă depinde de forma funcției scop utilizată. *Helmert* (1868) folosește pentru prima dată condiția de minim referitoare la eroarea totală de determinare a poziției punctului nou:

$$s_i^2 = s_x^2 + s_y^2 = \text{minim.} \qquad (10\text{-}47)$$

Deoarece $x = f(\theta_1, \theta_2)$, unde θ_1 și θ_2 pot fi considerate, în limitele convențiilor inițiale, ca independente, putem calcula s_x pe

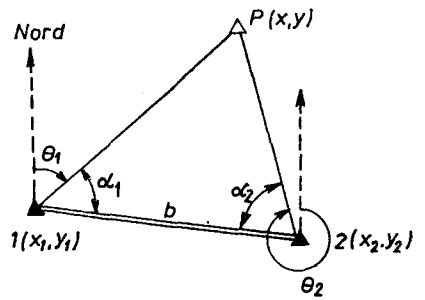


Fig. 10-6. Intersecție simplă înainte.

baza relației specifice observațiilor directe independente. Pentru aceasta, deducem din relațiile (10-46):

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{-\frac{x_1}{\cos^2 \theta_1}(\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1) + \frac{1}{\cos^2 \theta_1}(y_1 - y_2 + x_2 \operatorname{tg} \theta_2 - x_1 \operatorname{tg} \theta_1)}{(\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1)^2}.$$

Uzînd de relația (10-46) și notînd $\overline{1P} = d_1$, $\overline{2P} = d_2$, $\widehat{1A2} = \gamma$, rezultă:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{x - x_1}{\cos^2 \theta_1 (\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1)} = \frac{d_1 \cos \theta_2}{\sin (\theta_2 - \theta_1)}. \qquad (10\text{-}48)$$

În mod analog se obține:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = \frac{d_2 \cos \theta_1}{\sin (\theta_2 - \theta_1)}, \qquad (10\text{-}49)$$

astfel încît:

$$s_x^2 = \left(\frac{s_\alpha''}{\rho''}\right)^2 \frac{d_1^2 \cos^2 \theta_2 + d_2^2 \cos^2 \theta_1}{\sin^2 (\theta_2 - \theta_1)}. \qquad (10\text{-}50)$$

Procedînd în același mod cu relația (10-47) se obține:

$$s_y^2 = \left(\frac{s_\alpha''}{\rho''}\right)^2 \frac{d_1^2 \sin^2 \theta_2 + d_2^2 \sin^2 \theta_1}{\sin^2 (\theta_2 - \theta_1)}, \qquad (10\text{-}51)$$

astfel încît eroarea totală s_t poate fi exprimată prin:

$$s_t^2 = \left(\frac{m_\alpha''}{\rho''}\right)^2 \frac{d_1^2 + d_2^2}{\sin^2 (\theta_2 - \theta_1)}. \qquad (10\text{-}52)$$

Deoarece:

$$\gamma = \theta_1 - \theta_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

și

$$d_1 = \frac{b \sin \alpha_2}{\sin \gamma}; \; d_2 = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \gamma},$$

se poate exprima eroarea s_t și în funcție de unghiurile măsurate α_1 și α_2:

$$s_t^2 = \left(\frac{s_\alpha''}{\rho''}\right)^2 \cdot b^2 \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\sin^4 (\alpha_1 + \alpha_2)}. \qquad (10\text{-}53)$$

Relațiile (10-52) și (10-53) pot fi folosite pentru estimarea erorii medii totale s_t de determinare, prin intersecție simplă înainte, a poziției punctului nou P.

Minimul funcției (10-53) are loc cînd $\frac{\partial s_t}{\partial \alpha_1} = 0$, și $\frac{\partial s_t}{\partial \alpha_2} = 0$, adică:

$$\begin{aligned} &\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - 2 (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2) \cos (\alpha_1 + \alpha_2) = 0; \\ &\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - 2 (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) \cos (\alpha_1 + \alpha_2) = 0. \end{aligned} \qquad (10\text{-}54)$$

Din compararea celor două relații (10-54) se obține:

$$\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 \cos \alpha_2.$$

Această egalitate poate avea loc, în principiu, în următoarele cazuri:

$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$, caz imposibil însă, căci din relațiile (10-54) ar rezulta pentru α_1 și α_2 fie soluțiile 0; 0, respectiv 0; $\pi/2$, ceea ce contrazice evident realitatea;

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Introducînd aceste soluții în relațiile (10-54) rezultă:

$$4 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Din rezolvarea acestei ecuații se obține soluția pentru cazul optim: $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}/2$, astfel încît $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 35°15'$ și prin urmare unghiul optim sub care se intersectează vizele în punctul nou este:

$$\gamma_{optim} \approx 109°30'. \qquad (10\text{-}55)$$

Observații: 1. Dacă se schimbă funcția scop folosită (10-47) rezultă alte soluții pentru unghiul optim de intersecție γ_{optim} (*Grafarend* 1972, *Fotescu* 1979 ș.a.):

— Pentru funcția scop:

$$s_w = \sqrt{s_x s_y} = \text{minim}, \qquad (10\text{-}56)$$

rezultă soluția:

$$\gamma_{optim} = 120°. \qquad (10\text{-}57)$$

2. Atunci cînd se impune ca semiaxele elipsei erorilor să fie egale, adică elipsa erorilor să devină un cerc, iar $\lambda_1 = \lambda_2$ în relațiile (9-59) rezultă soluția:

$$\gamma_{optim} = 90°. \qquad (10\text{-}58)$$

3. În cazul intersecției liniare, la măsurarea directă a laturilor d_1 și d_2 se obține, de asemenea:

$$\gamma_{optim} = 90°. \qquad (10\text{-}59)$$

10.4.4. FORMA OPTIMĂ A REȚELEI DE DEZVOLTARE A UNEI BAZE DE TRIANGULAȚIE

În afara laturilor măsurate direct, în triangulație s-au folosit și se folosesc încă laturi obținute din dezvoltarea bazelor de triangulație. Datorită propagării erorilor, latura finală obținută din prelucrarea riguroasă a rețelei de dezvoltare a bazei, care va fi ulterior folosită în rețeaua de triangulație ca lungime cunoscută (uneori fiind considerată chiar ca valoare neafectată de erori), nu va mai avea aceeași precizie cu baza propriu-zisă.

În triangulația lui *W. Snellius* (*1615*) este folosită rețeaua de dezvoltare din figura 10-7, a cărei formă asigură, în principiu, cea mai avantajoasă propagare a erorilor din toate posibilitățile utilizate pînă în prezent. De aceea, rețeaua de dezvoltare a bazei formată dintr-o succesiune de romburi, mai mult sau mai puțin bine conformate, este folosită pe larg în lucrările de triangulație (fig. 10-8).

S-au mai utilizat și alte sisteme de rețele de dezvoltare a bazelor (fig. 10-9 și 10-10), care conduc la o pierdere prea mare a preciziei obținute la măsurarea directă de lungime. Baza măsurată direct $b = \overline{ab}$ este caracterizată în general printr-o eroare relativă $s_b'/b \leqslant 1/1 \cdot 10^6$, iar latura de dezvoltare $B = \overline{AB}$ are eroarea relativă s_B'/B de circa $1/4 \cdot 10^5$ în cazul rețe-

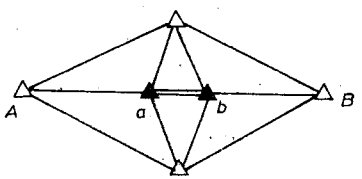


Fig. 10-7. Baza *Snellius*, anul 1615: ab = 328 m, AB = 4 114 m.

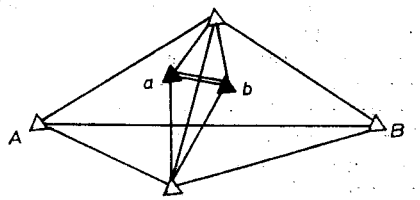


Fig. 10-8. Baza *Bonn*, anul 1892: ab = 2513 m, AB = 30 285 m.

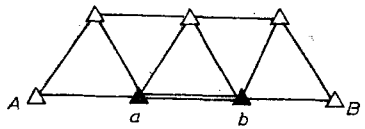


Fig. 10-9. Baza de la *Capul Bunei Speranțe*, anul 1886.

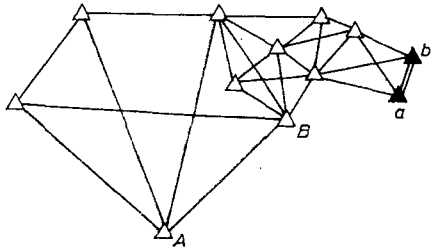


Fig. 10-10. Baza din *Creta*, anul 1933.

lelor de tipul prezentat în figurile 10-7 și 10-8 și de circa $1/2 \cdot 10^5$ (uneori chiar mai mari) pentru rețelele din figurile 10-9 și 10-10. Este de menționat faptul că forma rețelei de dezvoltare a bazei este impusă de obstacolele din teren, ajungîndu-se uneori la soluții complicate, de tipul celor din figura 10-10. Deoarece chiar în cadrul rețelelor de dezvoltare formate din succesiuni de romburi, se pot obține precizii diferite în funcție de mărimea unghiurilor care intervin, se poate demonstra (*Krasovski* 1955, *Ghițău* 1972) că forma optimă a unei rețele de dezvoltare a bazei de triangulație se obține atunci cînd unghiurile ascuțite au valoarea de 33°33′.

Instrucțiunile *DTM* în vigoare la noi prevăd pentru triangulația de stat ca „suma unghiurilor mici ale rombului să fie de cel puțin 40^g (36°)", ceea ce reprezintă o valoare de circa 50% față de cazul optim.

Capitolul 11
ELABORAREA PROIECTULUI REȚELELOR GEODEZICE

Elaborarea proiectului de construcție a unei rețele geodezice este dependentă de natura, destinația și caracteristicile semnificative de structură a rețelei geodezice considerate.

La noi în țară rețelele geodezice de stat (triangulație și respectiv nivelment) sînt realizate într-o densitate convenabilă pentru marea majoritate a lucrărilor topografice-fotogrammetrice, cartografice sau cadastrale, astfel încît ar apărea, la o examinare superficială, că problematica proiectării rețelelor geodezice nu mai este de actualitate. O analiză mai profundă arată că necesitățile determinate de dispariția unor puncte geodezice din rețeaua de stat, precum și de îmbunătățirea calității acestora, prin perfecționări care pot fi aduse optimal în mod iterativ, în timp, în funcție de noi obiective sau (și) de noi posibilități, impun ca și viitoarele generații de ingineri geodezi să cunoască, în primul rînd, modalitatea efectivă de elaborare a proiectului rețelelor geodezice de stat. Particularizarea acestor cunoștințe la proiectarea rețelelor geodezice de îndesire sau cu caracter local este apoi mai ușor de realizat.

● Proiectul rețelelor geodezice de stat se execută separat pe ordine, de la complex către simplu. Privind desfășurarea în timp a lucrărilor de elaborare a acestor proiecte se observă că între lucrările pentru rețeaua de ordinul I și cele pentru ordinul IV există uneori perioade de cîteva decenii.

Referitor la acest principiu se poate menționa și *teoria Regöczi* (1969) de determinare a rețelelor geodezice de sprijin de la inferior spre superior. Propunerea originală menționată este criticabilă din multe puncte de vedere (*Dragomir* 1975, *Dragomir* ș.a. 1977), dar prin îmbunătățiri aduse structurii unei asemenea rețele, numită și *rețea derivată*, se pot obține rezultate demne de toată atenția la o eventuală reproiectare a rețelelor geodezice de stat în ansamblu. De menționat că *teoria Regöczi* a fost dezvoltată pentru rețele de triangulație, dar prin analogii și cu îmbunătățiri corespunzătoare ar putea fi aplicată și în cazul rețelelor de nivelment.

● Rețelele geodezice de stat se construiesc după *principiul omogenității*, adică se urmărește asigurarea unei precizii de determinare, în general, uniformă pentru toate punctele geodezice din rețea. Principiul omogenității este realizat în primul rînd prin faptul că, construcția rețelelor geodezice de stat se desfășoară succesiv, de la superior spre inferior, după ce ciclul complet — proiectare, observare, prelucrare — este încheiat la ordinele imediat superioare. În acest fel o rețea geodezică de stat, de un anumit ordin, se sprijină pe rețele geodezice deja construite, precizia în poziție a punctelor sale fiind condiționată de cea a punctelor pe care este constrînsă. Această condiționare nu trebuie confundată cu o acumulare a tuturor erorilor posibile care se produc în cazul celor două categorii de rețele, deoarece rețeaua de ordin superior este deja geometrizată prin prelucrarea observațiilor proprii.

Propagarea erorilor în rețelele geodezice depinde în mare măsură de extinderea rețelei în ansamblu, precum și de mărimea elementelor de structură (lungimile laturilor în cazul rețelelor planimetrice, respectiv ale liniilor sau poligoanelor în rețelele de nivelment sau gravimetrice). De aceea este posibilă obținerea unei precizii de poziție a punctelor geodezice de ordin inferior similare cu cea a punctelor de ordin superior chiar prin utilizarea unor observații geodezice de precizie mai mică. Numai pentru a oferi o exemplificare ilustrativ-didactică se poate considera că eroarea totală s_t de poziție a unui punct vizat într-o rețea de triangulație este funcție numai de eroarea unghiulară totală de măsurare s_u^i și distanța D^i (fig. 11-1).

Omogenitatea este realizată prin faptul că deși laturile rețelelor de triangulație descresc ($D^{IV} < D^{II}$), cresc erorile de măsurare $s_u^{IV} > s_u^{II}$, astfel încît eroarea de poziție s_t a punctelor geodezice din întreaga rețea de triangulație de stat oscilează în jurul unei valori medii (la noi în țară $s_t \approx \pm$ $\pm$ 15 cm).

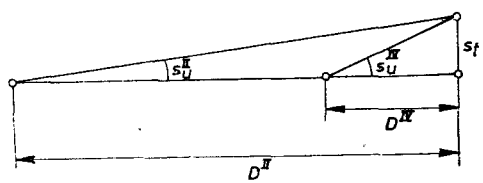


Fig. 11-1. Ilustrarea grafică, aproximativă, a principiului omogenității rețelei de triangulație de stat.

Atunci cînd se apreciază că precizia de determinare a poziției punctelor din rețeaua de stat nu este suficientă, se construiesc *rețele geodezice locale*, care deși se compun din figuri geodezice cu laturi scurte se determină după metodele și cu aparatura folosite la ordinul superior, rezultînd erori de măsurare mici și prin urmare erori de poziție inferioare celor din triangulația de stat.

● La executarea proiectului trebuie să se respecte prescripțiile instrucțiunilor în vigoare. Conformația figurilor elementare care compun rețeaua trebuie să se apropie de cazurile optime prezentate în cap. 10 și în nici un caz să nu depășească toleranțele menționate, urmînd să se aleagă desigur varianta de proiectare cea mai puțin costisitoare.

În afara instrucțiunilor elaborate de *DTM* pentru rețelele geodezice de stat (triangulație 1962 și respectiv nivelment 1965) și a instrucțiunilor *IGFCOT* 1979 pentru rețeaua de nivelment geometric, repetat, există instrucțiuni care reglementează lucrările de construcție a rețelelor geodezice de sprijin în localități (*CSCAS* 1961) și, respectiv, în cadrul lucrărilor hidroenergetice (*ISPH* 1976) ș.a..

● Poziția unui anumit punct geodezic depinde în primul rînd de poziția punctelor de același ordin și de ordin superior cu care este în legătură directă. În același timp amplasarea fiecărui punct trebuie să permită o dezvoltare fără prea mari dificultăți a rețelei de ordin inferior, deoarece rețeaua geodezică nu trebuie privită ca un scop în sine, ci ca un mijloc important de construire a unei vaste rețele de puncte geodezice-topografice-fotogrammetrice, bine conformată în ansamblul său.

● *În rețeaua de triangulație de stat* s-a urmărit și realizat o densitate cît mai uniformă de puncte geodezice pe km² de teritoriu. Rețeaua compactă de ord. I a țării noastre, care cuprinde circa 300 de puncte, este îndesită în mod succesiv cu rețele de ord. II, III și IV, astfel încît întreaga rețea de stat are o densitate de cel puțin un punct la 20 km², ceea ce corespunde la circa 5 puncte geodezice pe o foaie de hartă la scara 1 : 25 000.

Rețeaua de îndesire de ord. V, precum și lucrările geodezice din rețelele geodezice cu caracter local au condus la existența unui număr de peste 150 000 puncte geodezice înregistrate în *Banca de date și informații topografice a IGFCOT*.

● *Rețelele de triangulație din localități* sînt, în general, compacte, fiind construite sub următoarele forme:

— *rețele principale*, compuse din figuri geodezice în care unghiurile sînt mai mari de 36°, iar lungimea unei laturi este cuprinsă între 3 și 7 km;

— *rețele secundare*, care îndesesc rețelele principale, avînd laturi cuprinse între 1 și 3 km. În prezent se lucrează la elaborarea unor noi instrucțiuni de executare a *rețelelor geodezice de sprijin în localități*, care își propun, printre altele, obținerea unei densități corespunzătoare de puncte, determinate cu erori de poziție inferioare celor actuale. Se prelimină utilizarea combinată a triangulației și trilateralției, în ceea ce privește determinarea poziției planimetrice a punctelor din aceste rețele.

● Fiecare punct de triangulație are altitudinea sa determinată în sistemul de nivelment de stat. Aceste determinări se realizează fie prin *nivelment geometric* (cînd condițiile permit), fie prin *nivelment trigonometric* ceea ce constituie de fapt cazul general. Instrucțiunile în vigoare impun ca pe o foaie de hartă la scara 1 : 25 000 să existe cel puțin un punct cotat prin nivelment geometric (în mod excepțional pentru regiuni muntoase se admite un punct pentru două foi de hartă la scara 1 : 25 000).

Proiectul determinării altitudinilor punctelor de triangulație de ordinul I, II, III, IV se realizează separat de proiectul determinărilor planimetrice.

● *În rețeaua de nivelment* de stat densitatea se referă la depărtarea maximă admisibilă între reperele de nivelment de anumite tipuri (v. cap. 13). Astfel, reperele fundamentale de tipul I sînt amplasate în lungul liniilor de nivelment de ord. I la distanțe cuprinse între 100 și 150 km, reperele de tipul II la distanțe de 30...50 km, în lungul liniilor de ord. I și II, reperele de tipul III la distanțe de 5...7 km, iar mărcile de nivelment la distanțe de 2...4 km, în lungul tuturor liniilor de nivelment. În intravilan densitatea este mai mare și anume la circa 300 m este amplasată o marcă sau un reper de nivelment. *Banca de date și informații topografice a IGFCOT* stochează datele necesare pentru circa 200 000 puncte geodezice cotate, din rețeaua de nivelment de stat, din rețelele de nivelment cu caracter local, precum și din întreaga rețea planimetrică. Utilizatorul este informat asupra modalității de determinare a altitudinii, precum și asupra preciziei sale.

● În ceea ce privește *rețeaua gravimetrică* (fig. 8-8) se poate menționa faptul că aceasta nu a fost proiectată și realizată numai pentru scopuri geodezice. Ca urmare, în situații specifice, cum au fost lucrările gravimetrice pentru rețeaua de nivelment de ordin superior, determinările gravimetrice s-au executat cu o densitate mai mare (v. 4.4.2.).

● Prin instrucțiunile actualmente în vigoare este prevăzut ca legăturile între punctele de triangulație să fie realizate prin vize reciproce, în rețele compacte.

Aceleași instrucțiuni impun ca fiecare punct al rețelelor de ordinele III și IV să aibă cel puțin trei legături de determinare la ordinele imediat superioare, la care se adaugă desigur legăturile cu punctele de triangulație de același ordin sau ordin inferior.

Așa după cum s-a mai specificat în manual, rețelele de nivelment și rețelele gravimetrice se proiectează sub forma unor poligoane, astfel că legăturile dintre repere se stabilesc în consecință, după aceleași principii: „de la superior la inferior" și respectiv " în interiorul ordinului".

La ordinul IV și în rețele locale se acceptă și linii de nivelment sprijinite la ambele capete pe repere din rețeaua constituită de celelalte ordine.

● Rețelele geodezice trebuie astfel proiectate încît să asigure un volum cît mai mic de cheltuieli, concomitent cu precizia necesară în poziționarea punctelor rețelei. Din acest punct de vedere se pot semnala următoarele:

— punctele de triangulație sînt astfel amplasate încît să rezulte necesități minime ale înălțimilor semnalelor geodezice care urmează a fi construite în aceste puncte. Asupra acestor aspecte se va reveni în 11.3;

— liniile de nivelment se amplasează în lungul căilor de comunicații, astfel încît să rezulte pante mici între reperele de nivelment și acces simplu, atît la determinarea propriu-zisă, cît și ulterior în exploatare.

11.2. PIESELE COMPONENTE ALE PROIECTULUI REȚELEI GEODEZICE

11.2.1. DOCUMENTAȚIA

Proiectarea unei rețele geodezice are în vedere uneori teritorii întinse și de aceea este necesară o documentație prealabilă, de birou și teren, în legătură cu regiunea la care se referă proiectul. Pentru documentare se folosesc:

● Hărți la scări diverse:

— 1 : 500 000, 1 : 200 000 pentru ordinele I și II;

— 1 : 100 000, 1 : 50 000 pentru ordinele III și IV.

● Hărți și planuri la scară mai mare 1 : 25 000 — 1 : 5 000, pentru stabilirea în detaliu a amplasării punctelor rețelei. Extrem de utile în acest sens pot fi materialele fotogrammetrice recente, referitoare la zona respectivă.

● Date cu privire la rețelele geodezice executate anterior în regiunea considerată: dări de seamă asupra acestor lucrări, cataloage cu coordonatele (X, Y, H) ale punctelor existente, descrieri topografice ale pozițiilor acestor puncte, carnete de observații, informații directe de la operatorii care au mai lucrat în zonă etc.

● Informații în legătură cu dezvoltarea economică a regiunii: centrele populate principale, gările existente, căile de comunicație, posibilitățile de angajare a unor lucrători temporari și de procurare a materialelor necesare la construcția semnalelor, posibilități de cazare etc.

● Informații privitoare la relief, la stabilitatea terenului (colaborare cu geologia), la sistemul hidrografic, la situația vegetației (cu menționarea deosebirilor intervenite față de indicațiile oferite de hărțile avute la dispoziție).

● Date în legătură cu clima din zona în care se vor desfășura lucrările, în scopul stabilirii anticipate a perioadei în care este posibilă efectuarea unor lucrări de precizie corespunzătoare.

Documentația este mai mult sau mai puțin dezvoltată, în funcție de caracterul rețelei geodezice. La ordinul superior, amănuntele în legătură cu fiecare din punctele menționate sînt studiate cu cea mai mare atenție și eventual completate și cu alte studii, iar pentru rețelele locale, unele aspecte pot prezenta un interes secundar și ca atare sînt ignorate.

Rezultatul acestor studii este folosit la redactarea pieselor desenate și a propunerilor privind modul concret de organizare a campaniei de materializare în teren a rețelei geodezice, precum și la observații.

11.2.2. PIESE DESENATE

O piesă importantă a oricărui proiect de rețea geodezică este schița acesteia, care se desenează pe o hartă a cărei scară se stabilește în funcție de ordinul rețelei și de mărimea suprafeței pe care se vor desfășura lucrările respective (v. tabelul 11-1 și respectiv fig. 11-4).

În vorbire curentă, prin proiect al rețelei de triangulație se înțelege, uneori, această piesă desenată. Separat se execută copii de pe această schiță pe hîrtie de calc, folie de material plastic, carton de desen ș.a., astfel încît să se asigure o precizie grafică ridicată și o durabilitate bună.

Punctele rețelei de triangulație de ordinul I-IV au denumiri asemănătoare cu cele ale localităților, apelor, formelor de relief apropiate etc.,

Tabelul 11—1

Ordinul rețelei geodezice	I	II	III	IV	V
Scara proiectului	1 : 500 000 1 : 200 000	1 : 200 000 1 : 100 000	1 : 100 000 1 : 50 000	1 : 50 000 1 : 25 000	1 : 25 000 1 : 10 000

astfel încît însuși numele unui punct geodezic să fie un indiciu pentru identificarea sa în viitor (v. fig. 11-4).

Reperele și mărcile de nivelment se numerotează separat pe linii de nivelment, avînd ca indicative: tipul reperului sau mărcii și, după caz, numărul corespunzător (v. fig. 11-4).

Pentru a se utiliza cît mai eficient, proiectul rețelei geodezice este desenat în culori diferite: negru pentru ordinul I, albastru pentru ordinul II, roșu pentru ordinul III, verde pentru ordinul IV. Cu aceste culori se vor nota: amplasamentul punctelor geodezice, denumirea lor, legăturile între punctele rețelelor.

Tot ca piese desenate se mai pot menționa:

— diferite schițe de detaliu privind amplasarea punctelor geodezice;

— profile pe direcția vizelor proiectate, utile pentru studiul vizibilității și calculul înălțimilor semnalelor geodezice (v. 11.3).

11.2.3. NOTELE DE CALCUL

Acestea se referă la diferite operațiuni efectuate la elaborarea proiectului: calcule de estimare „a priori" a propagării erorilor în rețeaua geodezică, calculul înălțimii semnalelor ș.a. (v. tabelul 11-2).

11.2.4. DEVIZUL ESTIMATIV

Pe baza volumului de lucrări proiectate, se întocmește devizul estimativ, folosind indicatorul de norme de deviz și catalogul de prețuri în vigoare, defalcînd lucrările ce urmează a se efectua pe articole de deviz. Detalii asupra întocmirii devizului se vor examina la cursul de *organizarea lucrărilor geodezice*.

11.2.5. PLANIFICAREA ȘI ORGANIZAREA LUCRĂRILOR

Acestea constau în eșalonarea pe operatori și în timp a lucrărilor proiectate. Se vor stabili: sediul central, zona de lucru pentru fiecare operator, planul de aprovizionare cu materiale, termenele de definitivare și predare a fiecărei categorii de lucrări etc. Modalitatea concretă de întocmire a graficelor și formularelor necesare se studiază de asemenea la cursul de *organizarea lucrărilor geodezice*.

11.2.6. MEMORIUL JUSTIFICATIV

Memoriul justificativ este o piesă scrisă în care se sintetizează studiile anterior menționate, în scopul clarificării destinației lucrărilor proiectate, a soluțiilor concrete de realizare (metodele de lucru și aparatura ce se vor folosi). Se prezintă calculul estimativ al volumului de lucrări și costul acestora, data începerii și termenul de predare a lucrării.

11.3. DETERMINAREA VIZIBILITĂȚII ÎNTRE PUNCTELE REȚELEI DE TRIANGULAȚIE

La proiectarea rețelelor de triangulație intervine necesitatea studierii vizibilității între punctele geodezice, astfel încît se poate afirma că situația concretă din teren condiționează respectarea prescripțiilor de proiec-

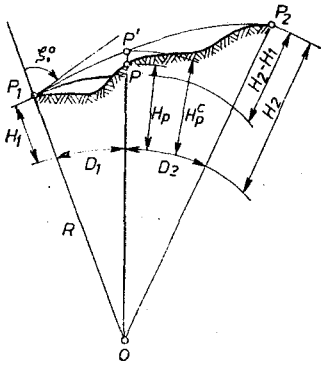


Fig. 11-2. Calculul vizibilității între punctele P_1 și P_2.

tare anterior menționate, cu privire la conformația optimă a figurilor geometrice folosite în rețelele de triangulație.

Vizibilitatea între punctele de triangulație este condiționată de sfericitatea Pămîntului, refracția atmosferică și obstacolele aflate pe traseul razei vizuale (relief, vegetație, construcții ș.a.m.d.). Deoarece asemenea obstacole pot avea o influență defavorabilă asupra măsurărilor unghiulare, creînd fenomene de refracție, instrucțiunile în vigoare prevăd ca razele vizuale să treacă deasupra obstacolelor la următoarele înălțimi minime totale ε: pentru ordinul I, $\varepsilon > 4$ m; pentru ordinul II, $\varepsilon > 2$ m, iar pentru celelalte ordine, $\varepsilon > 0{,}5$ m.

În figura 11-2 s-au considerat două puncte de triangulație P_1 și P_2 între care este necesar să se asigure, prin proiect, vizibilitatea reciprocă. Se consideră cunoscute (eventual de pe hartă) cotele acestor puncte notate H_1 și respectiv H_2, precum și cota H_P a unui punct intermediar P, considerat ca obstacol pe traseu. Cota obstacolului trebuie calculată prin luarea în considerație a înălțimii vegetației, construcțiilor ș.a.m.d. din punctul considerat, iar în cazul în care în punctele P_1 și P_2 sînt construite semnale geodezice, în H_1 și H_2 se includ și înălțimile acestora. De asemenea se presupun cunoscute distanțele D_1 și D_2.

Cu $\zeta°$ s-a notat unghiul zenital în punctul P_1. Datorită refracției atmosferice, raza de vizare va avea o anumită curbură (v. 15.1.) de care se ține seama la calculul diferenței de nivel între punctele situate la capetele ei. Cu R s-a notat raza sferei medii *Gauss*, putîndu-se considera în calculele referitoare la stabilirea vizibilității între punctele geodezice, pentru țara noastră $R \approx 6\ 370\ 000$ m.

La tratarea nivelmentului trigonometric geodezice (v. 17.2) se va demonstra că formula aproximativă de calcul a diferenței de nivel între punctele P_1 și P_2 este:

$$H_2 - H_1 = (D_1 + D_2) \operatorname{ctg} \zeta° + (1 - k) \frac{(D_1 + D_2)^2}{2R}. \qquad (11\text{-}1)$$

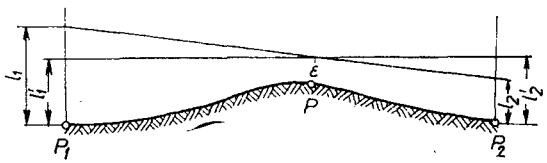
Coeficientul de refracție k are, în general, o valoare variabilă: pentru calculul vizibilității se acceptă însă o valoare constantă, care pentru țara noastră este $k = 0{,}14$. Dacă în termenul doi din membul drept al relației (11-1) se exprimă distanțele D_1 și D_2 în km, se obține o valoare constantă: $(1-k)/2R \cdot 10^{-6} \approx 0{,}0683$, care va fi utilă în calculele viitoare. Altitudinea calculată H_P^c a unui punct P' situat pe raza vizuală, deasupra punctului P, se poate obține prin particularizarea formulei (11-1), pentru $D_2=0$:

$$H_P^c - H_1 = D_1 \operatorname{ctg} \zeta° + 0{,}0683\ (D_1)^2_{\text{km}}. \qquad (11\text{-}2)$$

Din formula (11-1) se deduce:

$$\operatorname{ctg} \zeta° = \frac{H_2 - H_1}{D_1 + D_2} - (1 - k) \frac{D_1 + D_2}{2R},$$

Fig. 11-3. Rectificarea înălțimilor semnalelor geodezice.



astfel încît expresia (11-2) devine:

$$H_P^c = H_1 + \frac{D_1}{D_1 + D_2} (H_2 - H_1) - 0{,}0683\ (D_1)_{\text{km}}\ (D_2)_{\text{km}}. \qquad (11\text{-}3)$$

Condiția de vizibilitate între punctele P_1 și P_2, în considerarea obstacolului P, este:

$$H_P^c - H_P \geqslant \varepsilon. \qquad (11\text{-}4)$$

În cazul nerespectării condiției (11-4) trebuie construite semnale geodezice de înălțimi corespunzătoare. Atunci cînd condițiile de vizibilitate nu se pot asigura decît cu semnale geodezice mai înalte de 35—40 m (care sînt instabile și costisitoare), se va căuta o altă variantă de proiectare.

Observații. 1. În cazul în care pe traseul considerat există mai multe obstacole se va studia vizibilitatea pentru fiecare caz în parte, adoptîndu-se ca soluții definitive valorile maxime ale înălțimilor semnalelor geodezice necesare.

2. În multe cazuri (atunci cînd nu apar obstacole evidente în lungul razei de vizare) este suficient să se determine vizibilitatea numai la mijlocul traseului, considerînd prin urmare $D_1 = D_2 = D/2$, astfel încît relația (11-3) devine:

$$H_P^c = H_1 + \frac{h}{2} - 0{,}0171\ D^2_{\text{km}}. \qquad (11\text{-}5)$$

unde $h = H_2 - H_1$, iar D reprezintă distanța totală $\overline{P_1P_2}$.

3. Atunci cînd rezultă diferențe mari între înălțimile semnalelor geodezice necesare în punctele P_1 și P_2 (l_1 și respectiv l_2), este necesar să se procedeze la rectificarea acestora (fig. 11-3) calculîndu-se noi valori l_1 și l_2 sensibil apropiate, care să permită vizibilitatea între puncte în condiții corespunzătoare.

Din figura 11-3 se obține:

$$\frac{l_1 - l_1'}{l_2' - l_2} = \frac{D_1}{D_2}, \text{ adică : } l_2' = l_2 + (l_1 - l_1') \frac{D_2}{D_1}. \qquad (11\text{-}6)$$

Micșorînd înălțimea semnalului în punctul P_1 cu $(l_1 - l_1')$, se obține o nouă înălțime a semnalului în punctul P_2 după formula (11-6).

4. Este de semnalat că soluțiile recomandate mai sus se bazează pe cunoașterea, de pe hartă, a cotelor punctelor geodezice, inclusiv a cotei obstacolului, ceea ce conferă un caracter aproximativ rezultatelor ce se obțin. De aceea este bine să se ia unele precauții suplimentare (încă de la proiectare), urmînd ca înălțimea necesară a semnalelor geodezice să fie stabilită cu exactitate în cadrul operațiunilor de recunoaștere a terenului.

11.4. PROIECTUL UNEI REȚELE GEODEZICE DE ÎNDESIRE

Pentru ilustrarea modalității de elaborare a unui proiect de rețea geodezică, se prezintă situația din figura 11-4, în care s-a realizat o îndesire a rețelei de triangulație de ord. III prin puncte din rețeaua de

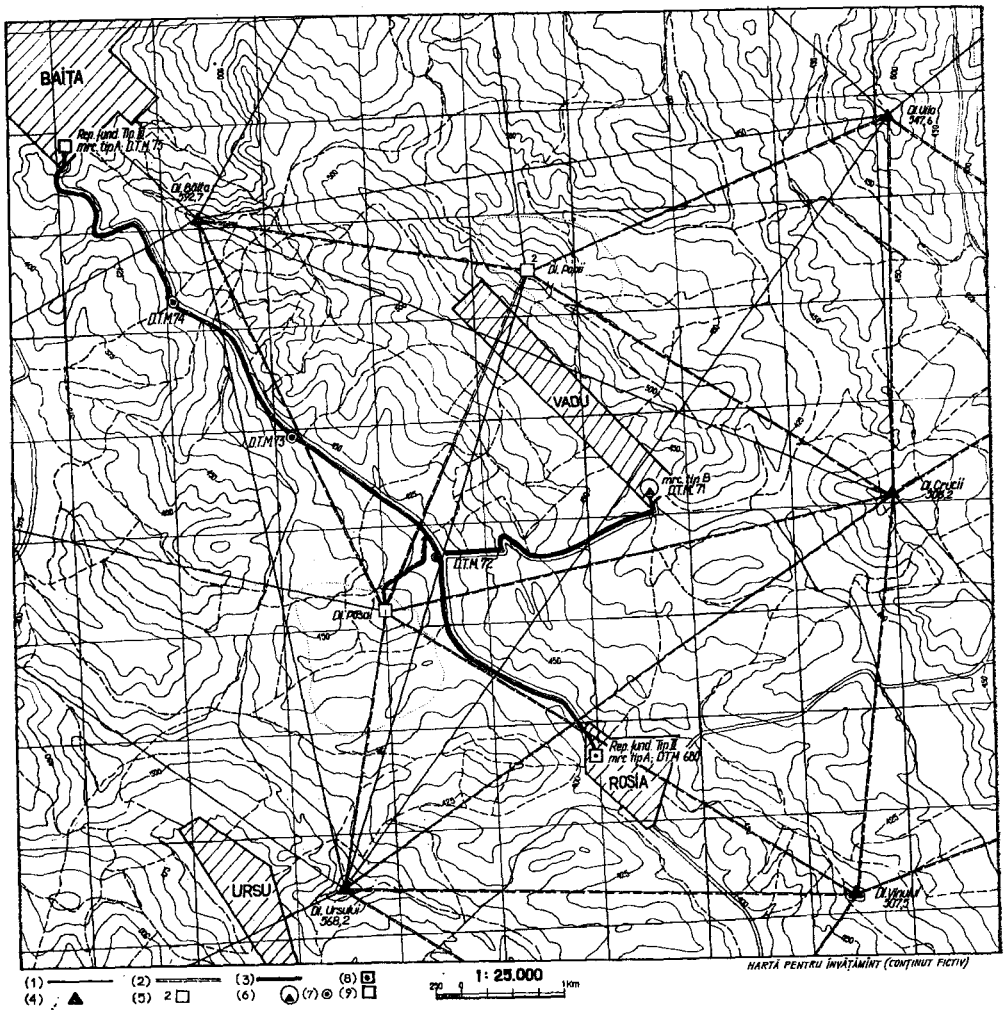


Fig. 11-4. Schiță de proiectare a unei rețele geodezice de îndesire:
1 — viză azimutală; *2* — viză azimutală și viză zenitală; *3* — linie de nivelment geometric; *4* — punct de triangulație de ord. III la sol; *5* — punct de triangulație de ord. IV cu 2 poduri; *6* — marcă de nivelment tip A; *7* — marcă de nivelment tip B; *8* — reper fundamental de nivelment de tip II; *9* — reper de nivelment de tip III.

ord. IV. Așa cum se observă și pe schiță, există legături și spre alte puncte din rețelele de triangulație menționate, dar care nu au putut fi reprezentate.

Schița este întocmită de pe o foaie de hartă la scara 1 : 25 000 și redusă în mod corespunzător cu formatul manualului (edificator este, din acest punct de vedere, caroiajul kilometric). Au fost copiate doar curbele de nivel principale, astfel încît echidistanța pe schiță este de 25 m.

Calculul vizibilităților, cu formula (11-3) este exemplificat în tabelul 11-2, iar înălțimea necesară a tuturor semnalelor geodezice se prezintă în tabelul 11-3.

Pe schița de proiectare a rețelei planimetrice s-a trecut și proiectul de terminării altitudinilor punctelor geodezice, prin intermediul unor linii de nivelment geometric din rețeaua de stat, precum și printr-o rețea distinctă de nivelment trigonometric. Așa cum s-a mai menționat, de regulă, proiectul determinării altitudinilor se prezintă pe o schiță separată, astfel încît proiectul rețelei cuprinde două schițe distincte.

Tabelul 11–2

Punctul	Altitudinea H [m]	Distanțe D_1/D_2 [km]	Altitudinea obstacolului [m]		Diferența altitudinilor $H_P^c - H_P$ [m]
			Teren H_P	Calculat H_P^c	
Dl. Băița	592,7	3,25	482,5	580	97,5
Dl. Ursului	568,2	3,50			
Dl. Băița	592,7	2,30	570,0	577	7,0
Dl. Uila	547,6	4,55			

Tabelul 11–3

Punctul	Altitudinea H [m]	Înălțimea semnalului [m]	Tipul de semnal
Dl. Băița	592,7	8,5	Piramidă la sol
Dl. Ursului	568,2	7,8	Piramidă la sol
Dl. Vinului	507,5	7,0	Piramidă la sol
Dl. Crucii	508,2	7,5	Piramidă la sol
Dl. Uila	547,6	7,5	Piramidă la sol
Dl. Popii	550,7	10,5	Piramidă cu 1 pod
Dl. Posai	447,5	10,5	Piramidă cu 2 poduri

Capitolul 12
RECUNOAȘTEREA TERENULUI

Recunoașterea terenului reprezintă un complex de operațiuni efectuate în scopul definitivării proiectului rețelei geodezice, în funcție de condițiile reale în teren.

Recunoașterea terenului este o operație importantă, deseori dificilă, pe teritorii întinse, cu puncte izolate, greu accesibile, în funcție de dimensiunea rețelei considerate. De aceea, recunoașterea punctelor de ordinul I și II se efectuează cu un an înainte de începerea campaniei de construcții și observații, iar la ordinele III-V, recunoașterea întregii rețele proiectate trebuie să preceadă celelalte operații geodezice de teren. Operațiile de recunoaștere încep cu punctele de ordin superior existente în zonă. În rețelele locale, desfășurate pe suprafețe mici, intervin simplificări în această procedură, în funcție de experiența proprie a celui care efectuează, uneori, toate operațiile necesare: recunoaștere, construcții de semnale și observații.

12.1. OBIECTIVELE RECUNOAȘTERII TERENULUI

12.1.1. AMPLASAREA PUNCTELOR GEODEZICE

Hărțile și planurile folosite la proiectare nu pot furniza toate detaliile necesare cu privire la amplasamentul exact al punctelor geodezice, care se va definitiva, la recunoaștere, prin respectarea următoarelor prescripții generale:

- Punctele geodezice se amplasează în terenuri cu soluri stabile și tari, pentru a se asigura menținerea semnalizării la sol și subsol un timp cît mai îndelungat (se vor evita malurile apelor, terenurile inundabile sau supuse alunecărilor etc.). La recunoașterea liniilor de nivelment de ord. I sau cu destinație locală de importanță deosebită este necesară participarea unui specialist geolog, cu care se va colabora la stabilirea amplasamentului reperelor de nivelment. Nivelul hidrostatic trebuie să fie la cel puțin 4 m pentru reperele de tipurile I și II și la cel puțin 3 m pentru reperul de tipul III. Este interzisă plantarea reperelor de nivelment în locurile cu alunecări de teren sau carst.
- Punctele geodezice nu se vor amplasa în apropierea imediată a căilor de comunicație, liniilor telefonice, construcțiilor etc. Față de asemenea obiecte, punctele de triangulație trebuie să se afle la o depărtare egală cu cel puțin triplul înălțimii semnalului (și nu mai puțin de 50 m). În raport de liniile de înaltă tensiune, această depărtare trebuie să fie de cel puțin 100 m. Poziția definitivă a punctelor geodezice situate în apropierea aerodromurilor, construcțiilor industriale, minelor etc. se va stabili de comun acord cu organele administrative respective.
- Mărcile de nivelment se vor amplasa numai în edificii care au o vechime corespunzătoare și care nu urmează a fi demolate. Se evită zidurile castelelor de apă sau ale clădirilor industriale, care prezintă instabilitate în timp.
- Accesul la punct să fie cît mai simplu posibil, avîndu-se în vedere în mod deosebit lucrările care urmează să se facă în punct (semnalizare și bornare în punctele de triangulație, respectiv construcția reperelor de nivelment ș.a.).

12.1.2. STABILIREA ÎNĂLȚIMII EXACTE A SEMNALELOR GEODEZICE ÎN PUNCTELE DE TRIANGULAȚIE

Semnalele geodezice se construiesc în puncte dominante din teren pentru a realiza construcții cît mai puțin înalte. Înălțimea definitivă a acestor semnale depinde de particularitățile specifice ale reliefului și vegetației din imediata apropiere a punctelor de triangulație, precum și de obstacolele existente pe direcția respectivă. Aceste detalii de mare importanță nu pot fi cunoscute, cu exactitate, la elaborarea proiectului. Din punctul de vedere urmărit aici este util ca recunoașterea terenului să se înceapă cu punctele cele mai înalte, dominante, vizibile cu ușurință din cît mai multe puncte de triangulație, putîndu-se desprinde astfel unele concluzii cu privire la înălțimea altor semnale geodezice din rețea.

În fiecare punct geodezic (vechi sau nou) recunoscut ar trebui creată posibilitatea ridicării unui operator sau muncitor calificat pînă la înălțimea care să asigure efectuarea observațiilor cuprinse în proiectul rețelei de triangulație. În acest scop se pot folosi și acele posibilități existente în imediata apropiere a punctului considerat (arbori, construcții ș.a.) care permit să se tragă concluzii ferme cu privire la înălțimea pe care o va avea semnalul geodezic.

Deoarece, în multe situații, asemenea obiecte ajutătoare lipsesc, echipele de recunoaștere urmează să fie dotate corespunzător cu mijloace auxiliare cum sînt scările de recunoaștere (figurile 12-1 și 12-3) sau chiar să poată executa construcții auxiliare în punctul recunoscut (fig. 12-4). De menționat că experiența avută de realizatorii rețelei de triangulație de la noi din țară a eliminat, aproape fără excepție, utilizarea unor asemenea soluții costisitoare. Dar, în alte situații, în special în lucrările geodezice efectuate pentru beneficiari externi sau în noile condiții, de existență a unei mai mari densități a obstacolelor pe teritoriul țării noastre, este indicat de a se cunoaște și astfel de posibilități, la care se va apela în caz extrem.

Scara de recunoaștere reprezentată în figura 12-1 poate asigura ridicarea unui observator uman pînă la o înălțime de circa 15—18, m, fiind formată din 3—4 panouri, fiecare în lungime de 4—5 m, care pot fi îmbinate în teren, cu ajutorul unor buloane speciale.

Pentru fiecare panou sînt prevăzute etaje de ancorare, formate din frînghii de 2 cm diametru, dispuse simetric (fig. 12-2). Acestea sînt prinse de obiecte fixe în teren (arbori, construcții etc.) sau de țăruși de lemn (de 1—1,5 m lungime și 20—25 cm diametru).

În unele țări se folosesc scări duble de recunoaștere, cu care se mărește și mai mult înălțimea de ridicare, asigurîndu-se în același timp o mai mare siguranță în exploatare (fig. 12-3).

Se mai folosesc scări de recunoaștere din aluminiu, iar în ultimii ani scări pliante, instalate pe automobile, atunci cînd accesul auto spre punctul geodezic este posibil.

La recunoașterea punctelor de ordin superior, situate la distanțe mari în terenuri de șes, fără detalii proeminente, intervin greutăți deosebite la recunoaștere, deoarece curbura Pămîntului reclamă ridicarea operatorului uman la înălțimi mai mari. Pentru aceasta se construiesc semnale provizorii (fig. 12-4, *a*), de înălțimi corespunzătoare de obicei numai cu trei stîlpi principali de susținere, urmărindu-se stabilitatea construcției numai pe perioada de recunoaștere. Ulterior semnalul va fi demontat și înlocuit cu un semnal geodezic stabil care să poată permite efectuarea observațiilor unghiulare în condiții optime.

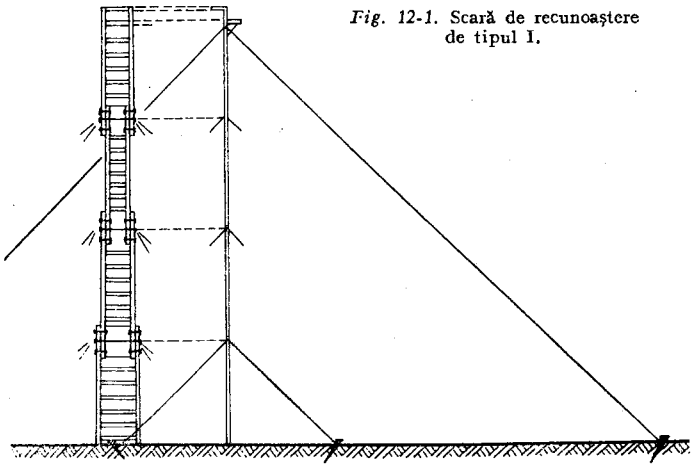


Fig. 12-1. Scară de recunoaştere de tipul I.

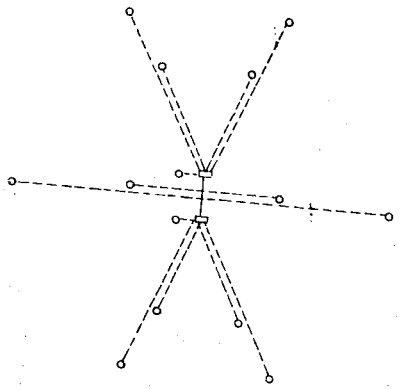


Fig. 12-2. Dispunerea etajelor de ancoraj la scara de recunoaştere (vedere în plan).

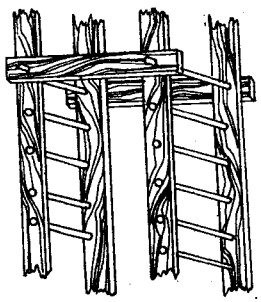


Fig. 12-3. Scară de recunoaştere de tipul II.

Fiecare punct geodezic recunoscut ar trebui, în principiu, materializat printr-un semnal provizoriu care să favorizeze operaţiunile de recunoaştere în celelalte puncte ale reţelei, cu care acesta se află în legătură. Excepţie de la această regulă fac punctele de triangulaţie în care nu se vor construi semnale geodezice înalte sau punctele situate în apropierea unor obiecte din teren (vegetaţie, construcţii ş.a.), care pot elimina necesitatea unor asemenea semnalizări.

Pentru semnalizarea provizorie a punctelor recunoscute se pot folosi:

— semnalizări în arbori (fig. 12-4, *b*);

— balize speciale (fig. 12-4, *c*) ancorate pentru a preîntîmpina ruperea de către vînt a popului care susţine semnalizarea propriu-zisă;

— semnale provizorii de tipul prezentat în figura 12-4, *a*, cînd nu este posibilă altă variantă, mai puţin costisitoare.

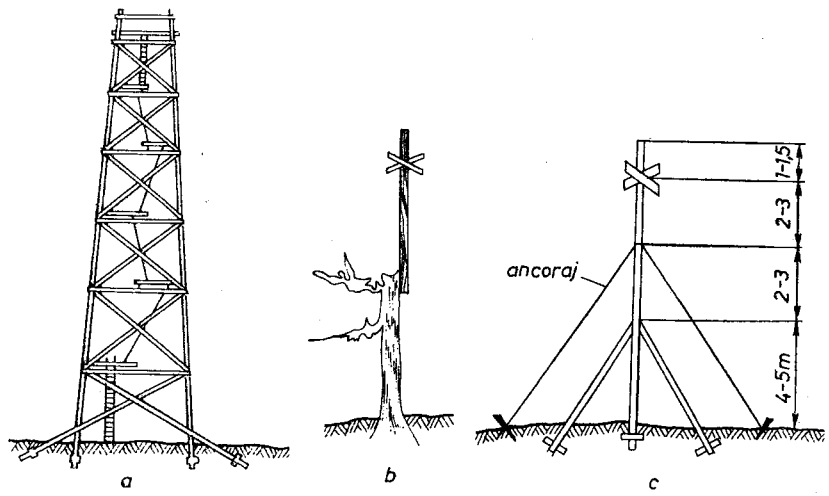


Fig. 12-4. Semnalizări provizorii:
a — semnal cu poduri; *b* — semnalizare în arbori; *c* — baliză provizorie.

12.1.3. REPERAREA PUNCTELOR DE TRIANGULAŢIE

Fiecare punct geodezic din triangulaţia de stat este reperat prin coordonate polare (azimut şi distanţă) în raport de două „repere azimutale", astfel încît să fie posibilă o eventuală identificare în viitor, atunci cînd semnalizarea la sol a punctului geodezic a dispărut. Reperele azimutale trebuie să fie vizibile de la sol, putîndu-se alege în acest scop obiecte existente în teren (biserici, paratrăznete aflate pe coşuri de fabrică, castele de apă etc.), semnale geodezice, sau în cazul în care acestea nu există, se vor planta repere speciale. Reperele azimutale trebuie să fie situate la cel mult 3 km, cînd sînt obiecte în teren sau semnale geodezice şi la 500—1000 m cînd sînt repere plantate.

La recunoaştere, poziţia reperelor azimutale plantate se stabileşte aproximativ şi se materializează provizoriu în teren, urmînd ca măsurile necesare determinărilor planimetrice a reperelor să fie efectuate cu prilejul executării construcţiei sau cînd se execută observaţiile propriu-zise în punct. Pentru aceasta se măsoară direcţiile necesare în două serii de observaţii azimutale, iar distanţele se măsoară cu o panglică de oţel sau indirect, cu mire orizontale.

Instrucţiunile în vigoare pentru realizarea reţelei de nivelment de stat nu prevăd măsuri similare, deşi acestea ar fi deosebit de utile pentru cei care utilizează în viitor reţeaua.

12.1.4. ADOPTAREA UNOR MĂSURI ORGANIZATORICE

La recunoaşterea terenului se adoptă şi unele măsuri privind campania de bornare şi reperare, de construcţii de semnale şi observaţii, cum ar fi: stabilirea sediului central al lucrărilor, a punctelor de cazare

pentru echipele de lucru, examinarea posibilităţilor de aprovizionare cu materiale de construcţie şi angajare a forţei de muncă, accesul spre punctele geodezice ş.a., completîndu-se în acest fel documentaţia întocmită înainte de proiectarea reţelei.

12.2. IDENTIFICAREA (RECONSTITUIREA) PUNCTELOR DE TRIANGULAŢIE

Pentru identificarea în teren a punctelor vechi din reţelele de triangulaţie, nivelment sau gravimetrice se folosesc descrierile topografice alé acestor puncte (v. 12.3), precum şi planurile sau hărţile pe care acestea sînt raportate. Este posibil ca vegetaţia, diversele lucrări de construcţii sau agricole executate între timp ş.a., să acopere semnalizarea la sol a punctelor sau să o distrugă uneori, ceea ce îngreuiază mult operaţiile de recunoaştere, făcînd necesară, în acest ultim caz, identificarea semnalizării la subsol (reperele subterane).

Aşa cum s-a menţionat în manual, punctele din reţeaua de nivelment, precum şi cele din reţeaua gravimetrică nu sînt reperate exact prin coordonate planimetrice, ci numai prin coordonate determinate prin procedee grafice, adică cu erori de poziţie de ordinul metrilor sau mai mari. Acest aspect constituie un important impediment la identificarea (reconstituirea) acestor puncte în cazul în care foaia de descriere topografică a punctului considerat este insuficientă.

În cazul punctelor vechi de triangulaţie, care au coordonate planimetrice mult mai precis determinate şi care au şi repere azimutale, operaţiile de identificare (reconstituire) se pot face relativ mai simplu sau prin procedee care depind de condiţiile concrete din teren.

12.2.1. IDENTIFICAREA CU AJUTORUL TEODOLITULUI

Se presupune că semnalizarea la sol a punctului vechi B a fost acoperită de vegetaţie sau a fost distrusă, astfel încît dintr-un punct aflat în imediata sa apropiere S, semnalizarea nu poate fi observată.

Admiţînd că din S se văd în teren trei puncte vechi (cu coordonate cunoscute) se vor putea determina (prin intersecţie simplă înapoi) coordonatele staţiei S. Se pot calcula apoi (din coordonate) distanţa $\overline{SB}$, orientările θ_{SB}, θ_{SC} şi ca urmare unghiul β (fig. 12-5):

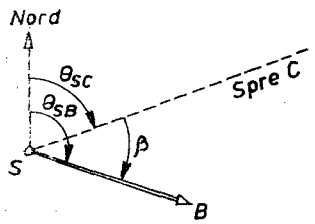


Fig. 12-5. Identificarea (reconstituirea) unui punct geodezic.

$$\beta = \theta_{SB} - \theta_{SC}. \qquad (12\text{-}1)$$

Se vizează punctul vechi C şi la valoarea lecturii respective se adaugă unghiul β: pe această direcţie, la distanţa $\overline{SB}$, se va căuta semnalizarea punctului B, prin curăţarea terenului şi efectuarea săpăturilor necesare. În cazul dispariţiei bornei vechi, se va executa o rebornare, în funcţie de reperele subterane existente în subsol.

Precizia acestui procedeu depinde în primul rînd de modalitatea de realizare a intersecţiei înapoi şi apci de poziţia relativă a punctelor S şi B, în cazul distanţelor $\overline{SB}$ scurte (1—10 m), eroarea de determinare fiind mai mică.

12.2.2. IDENTIFICAREA CU AJUTORUL PLANŞETEI TOPOGRAFICE

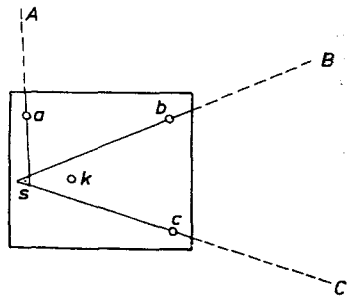


Fig. 12-6. Utilizarea planşetei topografice la identificarea (reconstituirea) punctelor geodezice.

În terenurile de şes, unde sînt puţine puncte vechi de triangulaţie vizibile de la sol, este de multe ori imposibil să se execute intersecţia înapoi specifică procedeului anterior. În asemenea cazuri se poate aplica un procedeu bazat pe folosirea planşetei topografice, pe care este fixată schiţa de recunoaştere (copie de pe proiectul reţelei de triangulaţie).

După orizontalizarea planşetei se efectuează orientarea sa (expeditivă) cu ajutorul busolei planşetei: planşeta se va roti pînă cînd acul magnetic va indica, în raport cu caroiajul geografic, unghiul de declinaţie magnetică ε.

Folosind trei detalii existente pe schiţa de recunoaştere (a, b, c) şi vizibile de la sol în teren (A, B, C), cum ar fi, de exemplu, intersecţii de drumuri, limite de proprietăţi, puncte dominante etc., se poate determina grafic poziţia punctului de staţie S (fig. 12-6), în centrul de greutate s al triunghiului de eroare obţinut.

Presupunînd că trebuie identificat în teren punctul vechi K a cărui raportare s-a notat k, se vor determina grafic orientarea θ_{SK} şi distanţa $\overline{SK}$, urmînd să se acţioneze în continuare ca în cadrul procedeului descris anterior.

Triunghiul de eroare obţinut în s depinde de precizia de cunoaştere a unghiului de declinaţie magnetică ε şi de modalitatea de executare a tuturor operaţiilor menţionate. Unghiul de declinaţie magnetică ε poate fi considerat (pentru scopurile recunoaşterii) aproximativ constant pentru suprafeţe relativ mari şi este indicat, în general, pe hărţile topografice.

12.3. DESCRIEREA TOPOGRAFICĂ A PUNCTELOR GEODEZICE

Rezultatul operaţiilor de recunoaştere în fiecare punct geodezic sau gravimetric se materializează în descrierea topografică, care se prezintă pe formulare tip ce se completează în teren, constituind un document de arhivă extrem de important, ce va servi la identificarea punctului în viitor. Există o mare varietate de tipuri de formulare de descriere topografică a punctelor geodezice.

În continuare se prezintă un exemplu de întocmire pe formulare tip *DTM*, folosit în reţeaua de triangulaţie de stat. În reţelele de nivelment şi gravimetrice, precum şi în lucrări de triangulaţie de ord. V sau cu caracter ocal formularele au un aspect mai simplu.

Descrierea topografică a punctului *Dealul Cristian* de ordinul III, Județul *Timiș*, Comuna *Bolvașnița*. Stația de cale ferată cea mai apropiată *Cîrpa*. Rețeaua geodezică de stat pentru ordinele I, II, III, IV. Trapezul Gauss *L—34—93—D—a*. Coordonate de pe hartă. Harta *L—34—93 Terogova*. Scara 1 : 100 000

$X = 5\ 140\ 750$ m; $Y = 4\ 630\ 860$ m; $H = 620$ m.

Punct vechi din anul *nu*. Starea construcției *nu a avut*. Punct nou *1960*. Lucrări de construcție în punct: *piramidă cu două poduri*.

1. *Construcția semnalului* (fig. 12-7)

N o t ă. Se va completa după efectuarea construcției în punct.

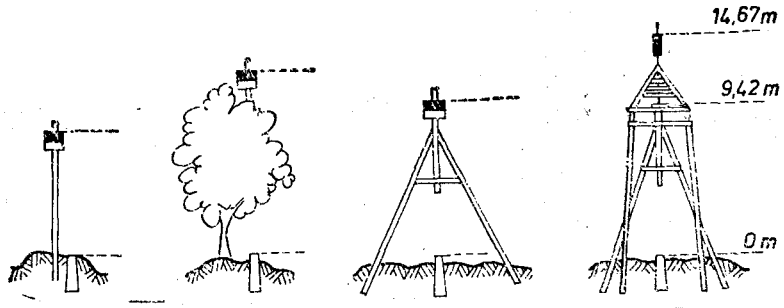


Fig. 12-7. Construcția semnalului.

2. *Bornarea și lucrări în punct* (fig. 12-8)

Bornă de beton armat, cu dimensiunile 20 × 30 × 90 cm. În subteran s-au introdus trei blocuri din beton armat în care sînt încastrate repere. În jurul semnalului și al bornei s-au săpat șanțuri de scurgere a apelor. Defrișări nu s-au executat.

3. *Descrierea poziției punctului* (fig. 12-9) *și a căilor de acces* (fig. 12-10)

Punctul se află pe *Dealul Rîmînata*, în apropiere de satul *Vîrciorova*. Accesul la punct este posibil în două moduri:

— accesul auto este posibil din comuna *Cîrpa* (circa 12 km);

— accesul hipo pe drumul de care (circa 6 km) ce pleacă la aproximativ 2,5 km de satul *Vîrciorova*, pe șoseaua spre *Cîrpa*.

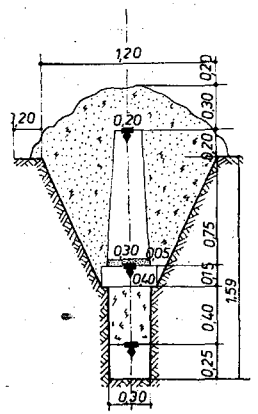


Fig. 12-8. Bornarea punctului.

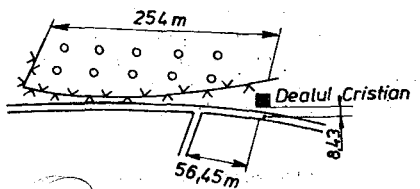


Fig. 12-9. Descrierea poziției punctului geodezic.

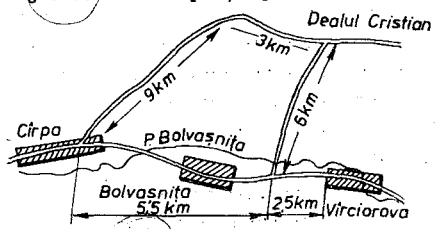


Fig. 12-10. Căile de acces la punct.

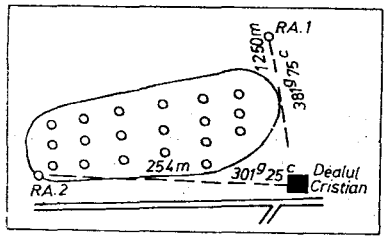


Fig. 12-11. Dispunerea reperelor azimutale.

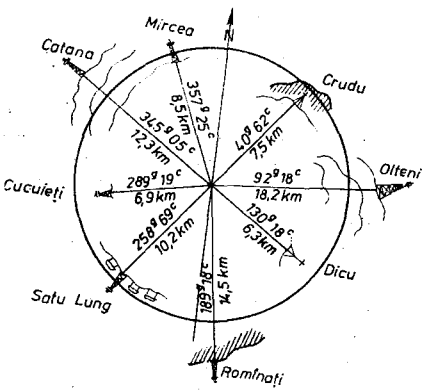


Fig. 12-12. Schema direcțiilor azimutale în punct.

4. *Informații asupra punctului*

Cazarea se poate face în satul *Vîrciorova*, comuna *Bolvașnița*, unde există și oficiu P.T.T.R. Apă și nisip se găsesc în apropierea punctului *Dealul Cristian*, la distanța de circa 300 m spre NE. Celelalte materiale de construcții se pot procura din orașul *Caransebeș*. Muncitorii zilieri se pot angaja în satul *Vîrciorova*.

5. *Schema reperajului bornei*

Punctul se află pe o poziție dominantă, la marginea livezii de pomi fructiferi a C.A.P. *Bolvașnița*, în apropierea intersecției celor două drumuri menționate la punctul 3.

N o t ă. Detaliile asupra reperajului bornei trebuie date foarte precis (prin măsurări cu panglica de oțel), la valori centimetrice, pentru ca, în eventualitatea dispariției bornei, centrul subteran să fie găsit cu ușurință.

6. *Dispunerea reperelor azimutale* (fig. 12-11)

Reperul azimutal nr. 1 situat în apropierea livezii C.A.P. *Bolvașnița* la distanța 425 m pe direcția N—NV.

Reperul azimutal nr. 2 situat în colțul livezii C.A.P. *Bolvașnița* la distanța 254 m pe direcția vest.

7. *Schema direcțiilor* (fig. 12-12)

N o t ă. Se trec toate legăturile spre celelalte puncte din rețea indicîndu-se distanța (în km), orientarea (la minut), precum și modul efectiv în care este văzut punctul respectiv. Schema direcțiilor va fi verificată și eventual completată după terminarea construcției în punct.

8. *Tabelul direcțiilor turului de orizont*

Datele conținute de figura 12-12 sînt concentrate în tabelul 12—1 și vor fi utilizate la efectuarea observațiilor unghiulare.

Tabelul 12—1

Nr. crt.	Denumirea punctelor vizate	Ordinul	Valoarea azimutului magnetic			Distanța [km]	Pe ce fond se proiectează
			g	c	cc		
1	Crudu	III	40	62	—	7,5	pădure
2	Olteni	I	92	18	—	18,2	cer
3	Dicu	III	130	18	—	6,3	cîmp
4	Romînați	II	189	18	—	14,5	cer
5	Satu Lung	II	258	69	—	10,2	cer
6	Cucuieți	III	289	19	—	6,9	cîmp
7	Cătana	II	345	05	—	12,3	cer
8	Mircea	II	375	25	—	8,5	cîmp

Punctul: Dealul Văii
Ordinul: III

Capitolul 13
MATERIALIZAREA ÎN TEREN A REȚELELOR GEODEZICE

Punctele rețelelor de triangulație sînt materializate în teren prin *borne și semnale geodezice*, iar punctele rețelelor de nivelment prin *repere* și *mărci*. Bornele, reperele și mărcile vor reprezenta o perioadă îndelungată (uneori sute de ani) punctul geodezic respectiv și de aceea acest gen de semnalizare poate fi denumit *permanent*.

Semnalul geodezic permite efectuarea observațiilor geodezice (unghiulare sau de lungimi) în punctul considerat, precum și observarea acestuia din celelalte puncte ale rețelei de triangulație, cu care se află în legătură. Acesta durează mai puțin în timp (2—10 ani), îndeplinind un rol *provizoriu* de semnalizare.

De obicei, bornele și reperele sînt constituite din elemente din beton armat, iar semnalele geodezice sînt construcții din lemn. Se mai întîlnesc, uneori, borne din piatră sau lemn (atunci cînd solul impune folosirea lor) și semnale metalice (uneori demontabile). Utilizarea acestora din urmă a fost pînă în prezent destul de restrînsă la noi în țară. Datorită necesităților stringente de economisire a materialului lemnos, în ultimii ani au fost întreprinse studii și încercări pe modele la scară naturală, în mod deosebit în cadrul *Direcției topografice militare*, pentru realizarea unor semnale metalice demontabile. Asemenea studii includ și examinarea influenței temperaturii asupra observațiilor geodezice, în mod special ca urmare a implicațiilor privind torsiunea pilastrului.

Deoarece pînă în prezent nu sînt definitivate tehnologiile de realizare a unor asemenea semnale geodezice, în manual se vor descrie semnalele geodezice din lemn, a căror construcție este reglementată prin *Instrucțiunile Direcției topografice militare* și STAS 7488-66. De asemenea, se va ține seama de faptul că studenții secției de geodezie abordează problematica referitoare la construcția semnalelor geodezice și în cadrul *cursului general de construcții*, în special din punctul de vedere al dimensionării părților constructive, pentru asigurarea unei stabilități corespunzătoare la executarea observațiilor geodezice de precizie de pe (și pe) aceste semnale.

Semnalele geodezice se construiesc de multe ori în condiții dificile, în puncte izolate și greu accesibile transportului auto, ceea ce creează greutăți mari în aprovizionarea cu materiale de construcții și în folosirea unor utilaje de înaltă tehnicitate la operațiunile de montaj. De aceea, inginerul geodez trebuie să fie în măsură să realizeze construcții simple, însă stabile și sigure, cu ajutorul materialelor de construcții locale, folosind pe lîngă dulgheri și lucrători calificați în construcții de lemn și personal angajat temporar, care trebuie instruit la fața locului.

Întregul personal folosit trebuie instruit temeinic din punctul de vedere al protecției muncii, pentru a se putea evita accidentele de muncă. Aceasta presupune o prelucrare amănunțită și competentă a instrucțiunilor în vigoare, concomitent cu asigurarea tuturor condițiilor necesare preîntîmpinării unor asemenea accidente.

13.1. SEMNALE GEODEZICE

Un semnal geodezic se compune, în general, din următoarele trei părți principale:

● *Piramida pilastru* susține instrumentul folosit la efectuarea observațiilor geodezice. La semnalele „la sol", această parte componentă nu mai este necesară, deoarece aparatul va fi instalat în stație pe trepiedul său sau pe pilastrul de beton (ordinul I). La semnalele pe construcții, piramida pilastru este înlocuită cu un pilastru de beton armat.

● *Piramida semnal* îndeplinește următoarele funcțiuni principale:

— permite operatorului și secretarului să efectueze observațiile în punctul geodezic, la înălțimea stabilită prin proiect;

— susține piramida de semnalizare.

● *Piramida de semnalizare* îndeplinește rolul de obiect de vizat din celelalte puncte ale rețelei. Partea terminală a piramidei de semnalizare are o construcție specifică fiecărui ordin de triangulație (v. 13.1.1.).

Orice semnal geodezic trebuie să îndeplinească următoarele condiții principale:

— să fie stabil și simetric construit în raport cu axa sa verticală;

— să fie pe cît posibil centrat, adică punctele centrale ale bornei, pilastrului propriu-zis și populului de vizare să se afle pe aceeași verticală;

— construcția trebuie să fie economică și să poată fi realizată cît mai simplu. În acest sens este necesar să se respecte consumul de materiale prevăzut de *Indicatorul de norme de deviz pentru lucrări geodezice 0—1982*.

13.1.1. SEMNELE DISTINCTIVE ALE PUNCTELOR GEODEZICE

Instrucțiunile în vigoare prevăd ca semnalizarea punctelor de triangulație să se facă în mod distinct, pe ordine, așa cum rezultă din figura 13-1.

Pentru punctele de triangulație de ordinele I, II, III, semnalizarea este realizată prin intermediul cilindrului antifazic (cu 32 de palete pentru ordinul I și cu 16 palete pentru ordinele II, III), care asigură condiții uniforme de vizibilitate în întregul tur de orizont. Pentru punctele de ordinele IV și V se folosește semnalizarea cu unul, respectiv cu doi fluturi.

Deoarece la ordinul I observațiile se efectuează fie pe lumină de heliotrop (ziua), fie pe lumină de far, în ultimii ani a fost eliminată partea superioară a semnalelor geodezice care sînt folosite, în exclusivitate, la observații unghiulare de ordinul I. Desigur, atunci cînd punctul este inclus și în celelalte rețele de triangulație, măsura nu mai poate fi operată.

13.1.2. SEMNALE GEODEZICE LA SOL ȘI PE CONSTRUCȚII

În cazul cînd în urma recunoașterii terenului s-a stabilit că se pot efectua observații direct de pe trepiedul instrumentului, punctul geodezic respectiv va fi materializat printr-un semnal la sol (fig. 13-2, *a*) sau printr-o piramidă la sol (fig. 13-2, *b*).

Semnalul la sol (baliza topografică) poate fi utilizat numai pentru punctele de ordinul V, înălțimea maximă a acestui semnal fiind de 5 m. De obicei acest tip de semnal se plantează într-o cutie de lemn, situată excentric față de bornă, la cîțiva decimetri pe una din direcțiile N-S sau E-V. În timpul observațiilor în punctul considerat, semnalul va fi scos

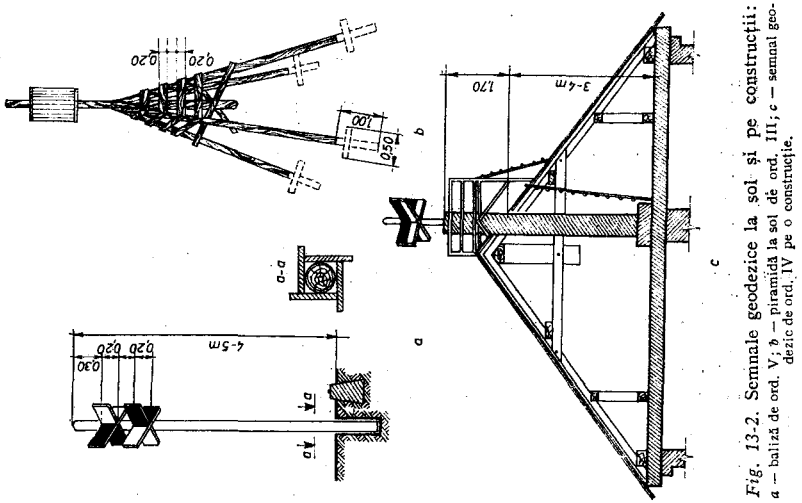


Fig. 13-2. Semnale geodezice la sol și pe construcții:
a — baliză de ord. V; *b* — piramidă la sol de ord. III; *c* — semnal geodezic de ord. IV pe o construcție.

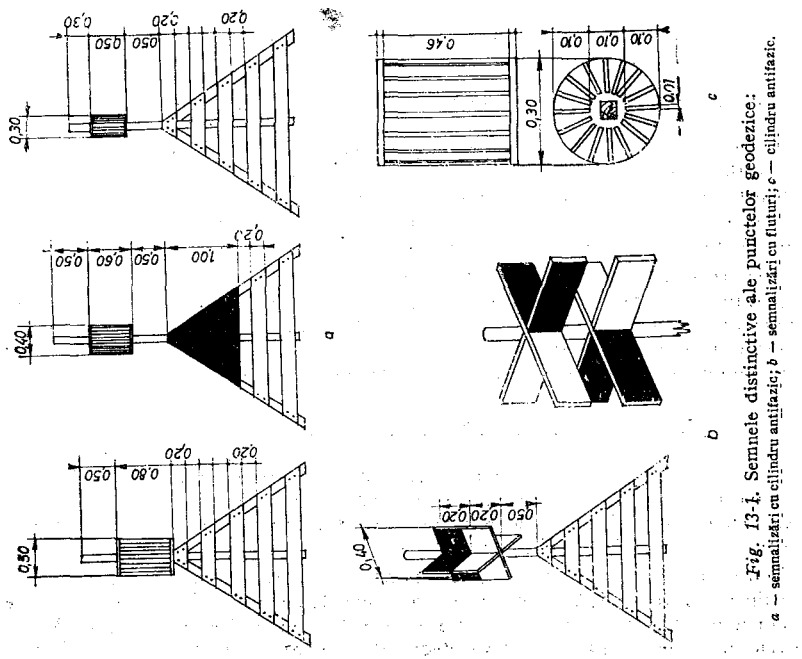


Fig. 13-3. Semnele distinctive ale punctelor geodezice:
a — semnalizări cu cilindru antifazic; *b* — semnalizări cu fluturi; *c* — cilindru antifazic.

din cutie și se va staționa pe centrul acesteia, reducîndu-se în acest fel operațiile de centrare a observațiilor (se vor calcula inițial coordonatele semnalului și apoi extrem de simplu, prin adunarea sau scăderea excentricității din coordonata x sau y, după caz, coordonatele bornei).

Pentru a înlesni vizibilitatea din celelalte puncte ale rețelei, semnalul se înnegrește pe o porțiune de 1 m, situată la circa 2 m de la sol.

O b s e r v a ț i i. **1.** Ca un caz particular al acestui tip de semnal, se admite, de către instrucțiuni, semnalizarea în arbori a punctelor de ordinul V.

2. În figura 13-2, *b* este reprezentată o piramidă de ordinul III, la sol, cu patru stîlpi principali (picioare). În mod asemănător se prezintă și piramidele la sol care se construiesc în punctele de ordinele I și II, diferența constînd numai în modalitatea de realizare a părții superioare (v. fig. 13-1). În punctele de ordinul IV se construiesc, în asemenea situații, piramide la sol cu numai 3 picioare, care formează între ele unghiuri de 60°.

3. Lungimea B a bazei piramidei se determină ca fiind egală cu jumătate din înălțimea semnalului, care poate atinge valoarea maximă de 10 m.

4. Deoarece aceste construcții se realizează în mod similar cu piramida pilastru de la semnalele cu poduri, unele detalii privind construcția și montajul lor pot fi urmărite în 13.1.4.1.

5. În localități sau în puncte izolate unde există construcții, este permisă amplasarea unor semnale geodezice de ordinele IV, V (fig. 13-2, *c*).

Construcția trebuie astfel realizată încît să nu dăuneze clădirii pe care este situată, avîndu-se grijă ca pilastrul de beton armat să fie amplasat pe un stîlp sau pe un perete de sprijin. Semnalizarea la partea superioară este scoasă din pilastru pe timpul staționării în punct.

6. Pe construcțiile moderne, care au terasă circulabilă, se pot realiza semnalizări mai simple, de genul celei prezentate în figura 13-2, *a*, cu dimensiuni mai reduse și ancorate corespunzător.

7. Cazuri particulare ale semnalizării geodezice pe construcții pot fi considerate punctele geodezice situate pe biserici, diverse turnuri etc. În asemenea cazuri, semnalul care este vizat din exterior este reprezentat de crucea situată pe clopotniță, de paratrăznete etc., iar stația de teodolit se realizează excentric, pe unul sau pe mai multe pervazuri ale ferestrelor, în funcție de vizele necesare în punct.

13.1.3. CARACTERISTICI CONSTRUCTIVE COMUNE SEMNALELOR GEODEZICE ETAJATE (CU PODURI)

Semnalele geodezice etajate (cu poduri) se construiesc în cadrul oricărei categorii de rețele de triangulație, atunci cînd este necesar ca punctul de stație (respectiv punctul vizat) să se afle la o înălțime oarecare deasupra solului.

Pe lîngă particularitățile pe care le prezintă realizarea fiecărui semnal geodezic etajat, există unele caracteristici constructive și metode de lucru, general valabile, pentru orice tip de semnal geodezic înalt.

● În funcție de ordinul rețelei de triangulație din care face parte punctul respectiv, instrucțiunile în vigoare prevăd modalități specifice de realizare a construcției, în scopul evitării risipei de materiale de construcție și asigurării unei productivități corespunzătoare.

După poziția pe care o are piramida pilastru în raport de piramida semnal se disting următoarele două categorii principale de construcții înalte:

— *semnal geodezic cu pilastrul independent*, la care piramida pilastru nu are nici un element comun cu piramida semnal. Acest gen de construcții este obligatoriu în cadrul triangulațiilor de ordinele I-II (indiferent de nu-

mărul de poduri). În celelalte rețele de triangulație acest tip de construcție este admis numai pentru semnalele care au maximum 3 poduri.

Piramida pilastru are 4 picioare în cadrul rețelelor de ordinele I-II și 3 picioare în cadrul rețelelor de ordinele III-IV-V.

— *semnal geodezic cu pilastrul suspendat*, la care piramida pilastru este fixată de piramida semnal, în dreptul antepenultimului pod. Acest contact comun influențează negativ stabilitatea aparatului pe timpul observațiilor, acesta preluînd vibrațiile piramidei semnal, provocate de vînt sau de deplasările persoanelor care participă la efectuarea măsurătorilor. De aceea, acest gen de construcții este admis numai în rețelele de triangulație de ordinele III-IV-V, pentru cazul în care piramida semnal are cel puțin 4 poduri.

● Ultimul pod al oricărui tip de semnal geodezic are, potrivit instrucțiunilor în vigoare, latura $b = 2{,}5$ m. Pentru a se asigura o suplețe corespunzătoare semnalului, se prevede ca latura bazei semnalului B să se determine după relația:

$$B = H/4 + 2{,}5, \qquad (13\text{-}1)$$

unde H este înălțimea pînă la ultimul pod al semnalului geodezic. Excepție de la această regulă fac semnalele cu înălțimi peste 35 m care se execută după alte principii, avînd o configurație deosebită de cea obișnuită, care se va avea în vedere, în principal, în cadrul acestui manual.

● În funcție de aceste dimensiuni principale (H, B, b) se pot determina grafic, pe o schiță la o scară convenabilă (de ex. 1 : 100) și celelalte dimensiuni ale elementelor piramidei semnal și piramidei pilastru (centuri sau cercuri, contravîntuiri, clești ș.a). Pentru semnale tip, acestea pot fi extrase și din instrucțiuni sau standarde.

● Dimensiunile piramidei de semnalizare sînt aproximativ constante (fig. 13-3, *a*). Deosebirile care intervin se datoresc numai sistemului de semnalizare a punctelor geodezice (v. fig. 13-1).

Piramida de semnalizare se construiește la sol (fig. 13-3, *b*), urmînd ca apoi să fie montată pe stîlpii piramidei semnal, după terminarea construcției acesteia, în dreptul ultimului pod. La ridicarea piramidei de semnalizare se vor folosi scripeți, avîndu-se grijă să nu fie lovită de piramida semnal (fig. 13-3, *c*).

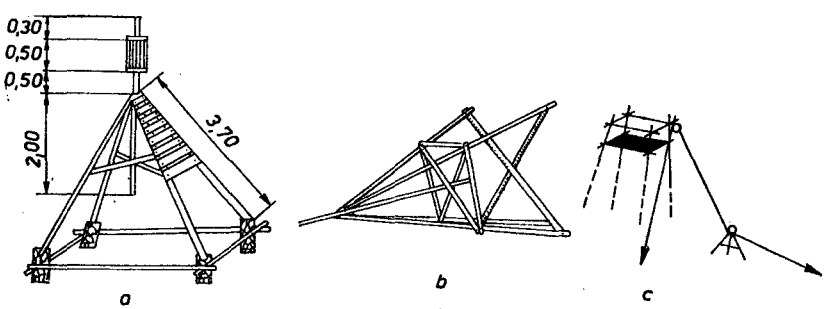


Fig. 13-3. Piramida de semnalizare:
a — piramidă de semnalizare pentru un punct geodezic de ord. III; *b* — piramidă de semnalizare în construcție; *c* — schemă de montare a piramidei de semnalizare.

Montajul definitiv al piramidei de semnalizare este urmărit de la sol, cu un teodolit, pe două direcții perpendiculare, pentru a se asigura verticalitatea populul său, precum și o bună centrare a acestuia în raport de bornă.

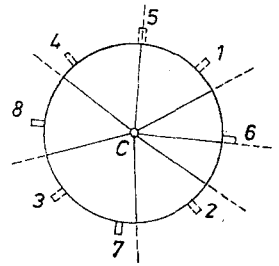


Fig. 13-4. Amplasarea stîlpilor piramidei semnal (*1, 2, 3, 4*) și ai piramidei pilastru (*5, 6, 7, 8*).

● Pentru a se asigura o bună stabilitate a întregii construcții este necesar să se realizeze un sistem de ancorare a stîlpilor piramidelor semnal și pilastru. Adîncimea gropilor în care aceștia sînt introduși nu va fi mai mică de:

— 1,0 m pentru piramida la sol;

— 1,3 m pentru semnalul cu un pod;

— pentru celelalte semnale, adîncimea gropilor de fundație crește cu circa 0,25 m pentru fiecare pod suplimentar.

Amplasamentul gropilor de fundație trebuie astfel realizat încît să se asigure vizibilitățile necesare, prevăzute de proiect. Pentru aceasta este necesar ca vizele către punctele din teren să treacă la cel puțin 20 cm de stîlpii (*1,2,3,4*) piramidei semnal (fig. 13-4).

Gropile vor avea formă dreptunghiulară, de lățime cît mai apropiată de grosimea stîlpilor și o lungime care să permită desfășurarea lucrului în condiții normale; în acest fel se va mări stabilitatea stîlpilor, cu ajutorul solului tare în care s-au efectuat săpăturile. Adîncimea egală a gropilor stîlpilor piramidei semnal (*1,2,3,4*) și piramidei pilastru (*5,6,7,8*) este controlată cu ajutorul unui instrument topografic, astfel încît să se asigure un același nivel al acestora, ceea ce conduce la realizarea unei construcții verticale.

Ancorajul se realizează simplu, cu contrafișe (capete de manele cu diametrul de 10—15 cm și lungimi 50—70 cm), a căror suprafață totală trebuie să fie de minimum 0,6 m² pentru semnalele geodezice pînă la 15 m (3 poduri) și de 1—1,5 m² pentru celelalte construcții (4—6 poduri).

Pentru protejare împotriva putrezirii, toate elementele introduse în pămînt sînt supuse, în prealabil, unei arderi ușoare.

● Lucrările de construcție a semnalelor geodezice încep prin amenajarea terenului pe care se amplasează semnalul propriu-zis. Trebuie create, de asemenea, spații pentru depozitarea materialului lemnos și sculelor.

După terminarea construcției, se va amenaja un șanț protector, cu profil trapezoidal, avînd dimensiunile 50 × 40 × 20 cm, de formă circulară, la distanța de 1 m față de stîlpii piramidei semnal.

● La montajul unui semnal geodezic cu 3-5 poduri este necesar să se folosească un stîlp ajutător (de montaj). Lungimea sa va fi egală cu cel puțin o treime din lungimea celui mai înalt stîlp al semnalului geodezic, iar diametrul său de cel puțin 15—20 cm pentru construcții cu $H \leqslant 20$ m și de 20—30 cm pentru construcții mai înalte.

● Toate ridicările de stîlpi, deci inclusiv a celui ajutător, se realizează cu scripeți sau trolii (fig. 13-5), fiind susținute prin împingere cu ajutorul unor manele (de lungime 5—7 m), prevăzute la unul din capete cu gheare metalice. Stîlpii ajutători și cei de susținere ai piramidelor semnal și pilastru sînt echipați cu scărițe de lemn sau metalice (scoabe cu gheare mai lungi) care vor fi demontate după terminarea construcției, fiind destinate să ușu-

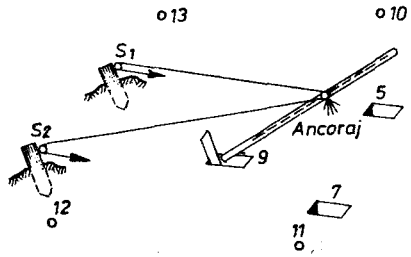


Fig. 13-5. Ridicarea stîlpului ajutător (de montaj).

reze ascensiunea lucrătorilor pentru efectuarea diverselor operaţiuni de montaj. Aceştia vor folosi obligatoriu, în timpul lucrului, centuri de siguranţă şi gheare metalice de picior.

Pentru a avea siguranţa necesară pe timpul operaţiunilor de montaj, pe stîlpul ridicat se instalează etaje de ancorare (la fiecare 6—7 m, pe toată lungimea stîlpului), pe 3—4 direcţii, în funcţie de situaţia concretă. Ancorarea se realizează cu frînghii (1,5—2,5 cm diametru) sau cabluri metalice (1—1,5 cm diametru), prin prindere de ţăruşi de lemn (circa 1,5—2 m lungime şi 15—20 cm diametru), bătuţi în pămînt cu o înclinare care să se opună tendinţei de smulgere ce există pe timpul ridicării. În figura 13-5, stîlpul ajutător se ridică cu ajutorul scripeţilor S_1 şi S_2, fiind prevăzut un singur etaj de ancorare (punctele *10, 11, 12, 13*). Echipa de ridicare se compune din lucrători care efectuează ridicarea propriu-zisă (la scripeţi, trolii, manele cu gheare) şi lucrători care realizează ancorajul.

13.1.4. SEMNALE GEODEZICE CU PILASTRUL INDEPENDENT

Semnalele geodezice cu pilastrul independent sînt des întîlnite în practica geodezică. În continuare se vor examina etapele principale de realizare a unui asemenea semnal, cu 3 poduri, a cărui schiţă de ansamblu este prezentată în figura 13-6.

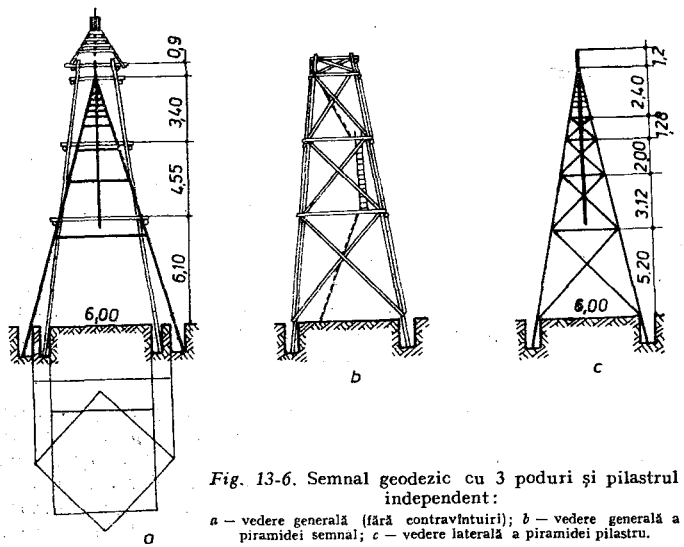


Fig. 13-6. Semnal geodezic cu 3 poduri şi pilastrul independent:
a — vedere generală (fără contravîntuiri); *b* — vedere generală a piramidei semnal; *c* — vedere laterală a piramidei pilastru.

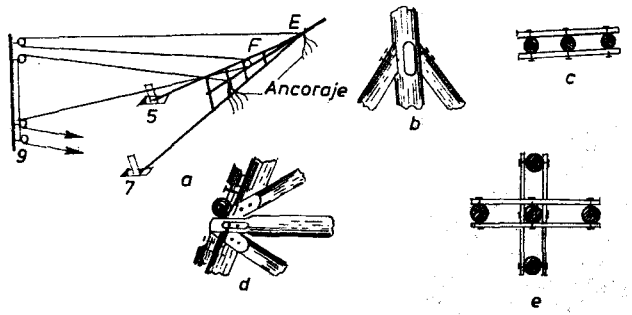


Fig. 13-7. Detalii de montaj al piramidei pilastru:
a — ridicare de la sol; *b* — detaliul *E* (vedere laterală); *c* — detaliul *F* (vedere în plan); *d* — detaliu de nod; *e* — solidarizarea cu cleşti dubli.

13.1.4.1. **Montajul piramidei pilastru.** Operaţiunile de montaj sînt precedate de stabilirea dimensiunilor tuturor elementelor componente (în funcţie de înălţimea H a piramidei semnal), de amenajarea spaţiilor necesare şi amplasarea gropilor de fundaţie pentru stîlpii piramidelor semnal şi pilastru.

Stîlpul ajutător (de montaj) are o înălţime de circa 8 m şi un singur etaj de ancorare (la circa 5 m de la sol), fiind amplasat la 5—6 m faţă de diagonala 5—7 a piramidelor pilastru.

Următoarea etapă o constituie construirea la sol a profilului piramidei pilastru şi ridicarea sa (fig. 13-7, *a*).

Pentru construirea la sol a acestui profil se foloseşte un pichetaj din ţăruşi mici de lemn, care susţin stîlpii şi pilastrul propriu-zis. Din detaliul *E* se observă că se va cherta la sol, în pilastrul propriu-zis, şi locul unde vor fi prinşi ceilalţi doi stîlpi (fig. 13-7, *b*).

Bila folosită ca pilastru trebuie să fie continuă, fără crăpături, cu diametrul la partea superioară de 25—30 cm, astfel încît să permită instalarea corectă a teodolitului pe timpul observaţiilor. Solidarizarea pilastrului de stîlpii de susţinere este realizată la sol cu cleşti dubli (detaliul *F*).

Pentru uşurarea executării celorlalte operaţiuni de montaj, se notează (la sol) locul unde se fixează centurile orizontale ale piramidei pilastru.

La ridicarea acestui profil se vor prevedea unul sau chiar două etaje de ancoraj; după consolidarea pămîntului în gropile de fundaţie, unul din aceste etaje poate fi desfiinţat.

În continuare se montează ceilalţi doi stîlpi de susţinere (picioare) ai piramidei pilastru şi apoi centurile şi contravîntuirile fiecărui etaj, de jos către sus, potrivit cu schiţa de construcţie. În figura 13-7, *d* se prezintă un detaliu de nod, caracteristic de fapt şi piramidei semnal, după terminarea construcţiei.

Partea superioară a pilastrului se stabilizează suplimentar prin 6—8 centuri, distanţate la 10—15 cm, formate din bucăţi de manele (fig. 13-6, *c*).

Pe noua diagonală a piramidei pilastru se montează alte patru perechi de cleşti dubli, astfel că pilastrul propriu-zis este solidarizat de stîlpi ca în figura 13-7, *e*.

Observaţii. 1. După cum s-a menţionat, la ordinele III—IV—V piramida pilastru va avea trei picioare, ceea ce impune precauţii speciale în operaţiile care se efectuează

Fig. 13-8. Piramida pilastru a unui semnal geodezic de ord. IV.

la sol (amplasarea gropilor de fundație, chertare, pilastrului, prinderea cleștilor etc.). În asemenea cazuri, cele două picioare care se montează la sol și pilastrul propriu-zis nu se mai află în același plan și de aceea capătul pilastrului trebuie ridicat de la sol, pe timpul lucrului, la o înălțime corespunzătoare, care să permită înclinarea stîlpilor după necesități. În stadiul final imaginea piramidei pilastru este prezentată în figura 13-8.

2. Sistemul de montaj al piramidei pilastru descris se va utiliza și în următoarele situații:

— construcții similare ale piramidelor pilastru pentru semnalele geodezice etajate cu pilastru independent (pînă la 5 poduri inclusiv);

— piramida la sol;

— piramida de semnalizare;

— piramida pilastru la semnalul geodezic cu pilastru suspendat.

13.1.4.2. **Montajul piramidei semnal.** Pentru a se da înclinarea dorită stîlpilor de susținere (picioarelor) ai piramidei semnal se folosește o cruce de lemn, montată provizoriu pe pilastru ca în figurile 13-9 și 13-10, *a*. Dimensiunile acesteia sînt egale cu diagonala pătratului format de punctele situate la 0,9 m deasupra ultimului pod al piramidei semnal, unde se realizează îmbinarea piramidei de semnalizare.

Picioarele piramidei semnal se ridică separat, cu ajutorul stîlpului ajutător (de montaj) și se vor sprijini, la partea superioară, pe această cruce.

Deoarece stîlpii piramidei semnal (și uneori chiar cei folosiți la piramida pilastru, la construcțiile foarte înalte) sînt de lungimi mari, se vor utiliza îmbinări (fig. 13-10, *b*). Lungimea de chertare l este variabilă, depinzînd de lungimea și diametrul d al stîlpilor (curent se utilizează $l = 1{,}5-2$ m sau l se determină cu relația $l = 5\,d$). Pentru a se asigura

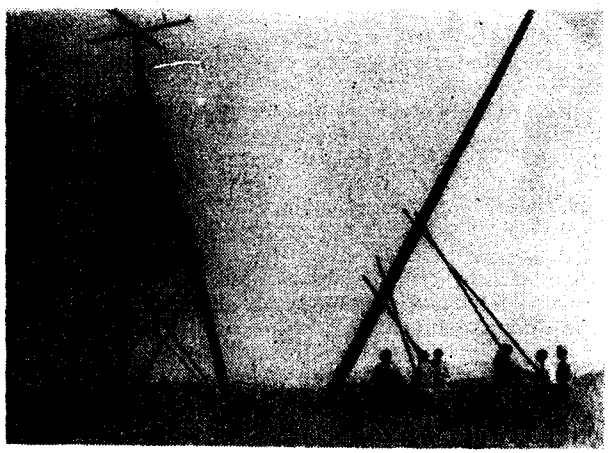


Fig. 13-9. Ridicarea stîlpilor piramidei semnal.

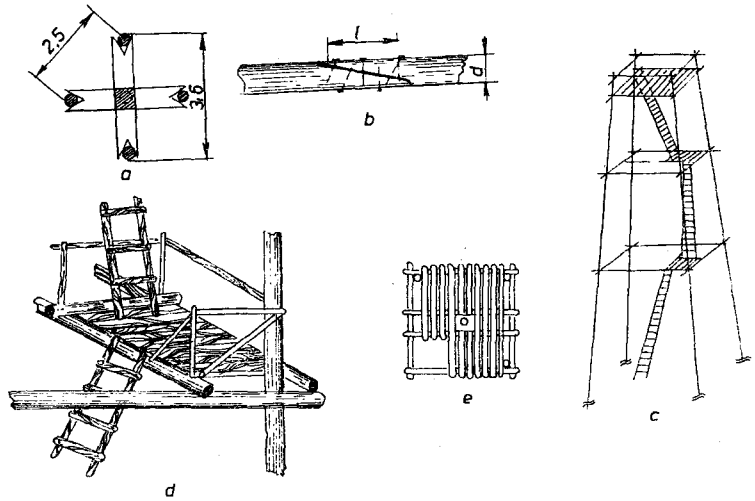


Fig. 13-10. Detalii constructive la montajul piramidei semnal:
a — cruce folosită la montaj (vedere de sus); *b* — îmbinarea stîlpilor care formează piciorul piramidei; *c* — amplasarea scărilor de acces; *d* — repaus la întîlnirea a 2 scări; *e* — platforma ultimului pod.

durabilitatea chertării se obișnuiește ca aceasta să fie înfășurată, pe toată lungimea sa, într-un manșon de sîrmă galvanizată (3 mm diametru).

Se montează în continuare centurile și contravîntuirile piramidei semnal, în mod similar ca la piramida pilastru.

Se construiesc și se fixează scările semnalului geodezic (fig. 13-10, *c*). La repausurile scărilor este bine să se construiască balustrade de sprijin (fig. 13-10, *d*). Treptele se fixează cu cuie în mici chertări ale scării.

La ultimul pod se construiește o platformă care va permite staționarea în punct și efectuarea observațiilor geodezice (fig. 13-10, *e*). Ultimele balustrade ale podului superior sînt duble în cazul în care punctul de triangulație este de ordinul I sau II, pentru a se permite instalarea heliotropului utilizat la efectuarea observațiilor unghiulare de mare precizie.

13.1.4.3. **Montajul piramidei de semnalizare.** Este o operațiune care se execută în mod asemănător pentru toate semnalele geodezice etajate (v. 13.1.3.).

După terminarea montajului semnalului geodezic, se construiește șanțul protector, așa cum s-a mai menționat. Imaginea finală a întregului semnal geodezic este reprezentată în figura 13-11.

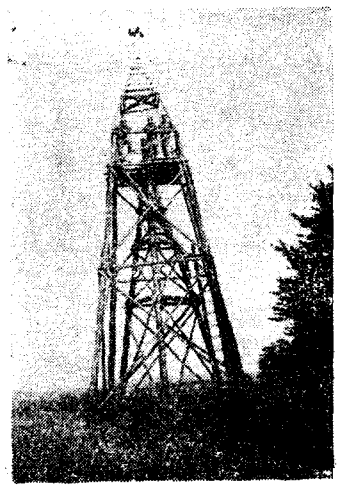


Fig. 13-11. Semnal geodezic cu 2 poduri de ord. IV.

13.1.4.4. **Alte tipuri de semnale geodezice cu pilastrul independent.** Pentru a avea o imagine cît mai completă asupra formei și dimensiunilor semnalelor geodezice cu pilastrul independent, în figura 13-12 sînt prezentate unele tipuri de astfel de semnale, recomandate de *Instrucțiunile DTM*.

● În funcție de dimensiunile piramidei semnal și experiența de lucru a echipei utilizate la construcție, pot interveni simplificări de montaj care nu trebuie să conducă însă la încălcarea normelor de protecția muncii. Astfel, la semnalele geodezice cu 1—2 poduri, echipele mai experimentate realizează ridicarea stîlpilor și uneori chiar a unor profile mai grele, direct, cu ajutorul unor manele instalate sub formă de furcă (v. fig. 13-9), fără a mai utiliza stîlpul auxiliar, scripeți ș.a.

● În practică se folosesc uneori și alte simplificări de montaj, variante ale procedeelor expuse.

● Construcția unui semnal foarte înalt, de peste 30 m (cu minimum 6 poduri) obligă să se adopte unele măsuri de montaj suplimentare, precum și să se introducă modificări în structura de rezistență a semnalului geodezic, al cărui pilastru va fi susținut de 8 stîlpi de lungimi foarte mari. De aceea în locul stîlpului de montaj se folosește o piramidă auxiliară, cu ajutorul căreia se pot ridica stîlpi foarte înalți și grei, precum și anumite profile întregi din semnalul geodezic respectiv.

În figura 13-12, se prezintă schematic ridicarea celui de-al cincilea stîlp al piramidei pilastru, folosindu-se ca element ajutător însăși partea de construcție deja realizată. În dreapta desenului se observă piramida ajutătoare de montaj).

13.1.5. SEMNALE GEODEZICE CU PILASTRUL SUSPENDAT

Unele operațiuni de montaj, ale semnalului geodezic cu pilastrul suspendat, cu patru poduri, reprezentat în figura 13-13, sînt asemănătoare cu cele descrise în 13.1.4.

După stabilirea (grafică) dimensiunilor construcției, în funcție de înălțimea de proiect, se execută pichetarea amplasării în teren a stîlpilor piramidei semnal (*1,2,3,4* din figura 13-14, *a*). Concomitent se vor picheta și punctele de proiecție în teren a capetelor superioare ale celor 4 stîlpi (punctele *5,6,7,8*).

Este util ca stîlpul ajutător (de montaj), să fie amplasat în mijlocul cercului utilizat la amplasarea poziției gropilor de fundație ale stîlpilor (picioarelor) piramidei semnal (eventual lîngă bornă, atunci cînd punctul geodezic respectiv este punct vechi).

Deoarece un profil întreg al unui asemenea semnal este mai dificil de ridicat, este util să se efectueze ridicarea separată a fiecărui stîlp (fig. 13-14, *a*). Pe fiecare din aceștia se vor marca, la sol, pozițiile centurilor piramidei semnal. Pentru a se da înclinarea necesară fiecărui stîlp, la capătul superior al său se va fixa, la sol, un fir cu plumb (v. stîlpul *1*), care va orienta echipa de ridicare pe timpul lucrului. Acest procedeu de stabilire a poziției definitive a fiecărui stîlp al piramidei semnal este simplu și eficace, putînd înlocui cu succes procedeul bazat pe folosirea teodolitului la asemenea operațiuni.

După ridicarea și ancorarea celor patru stîlpi ai piramidei semnal se demontează stîlpul ajutător pentru a se permite montarea piramidei pilastru.

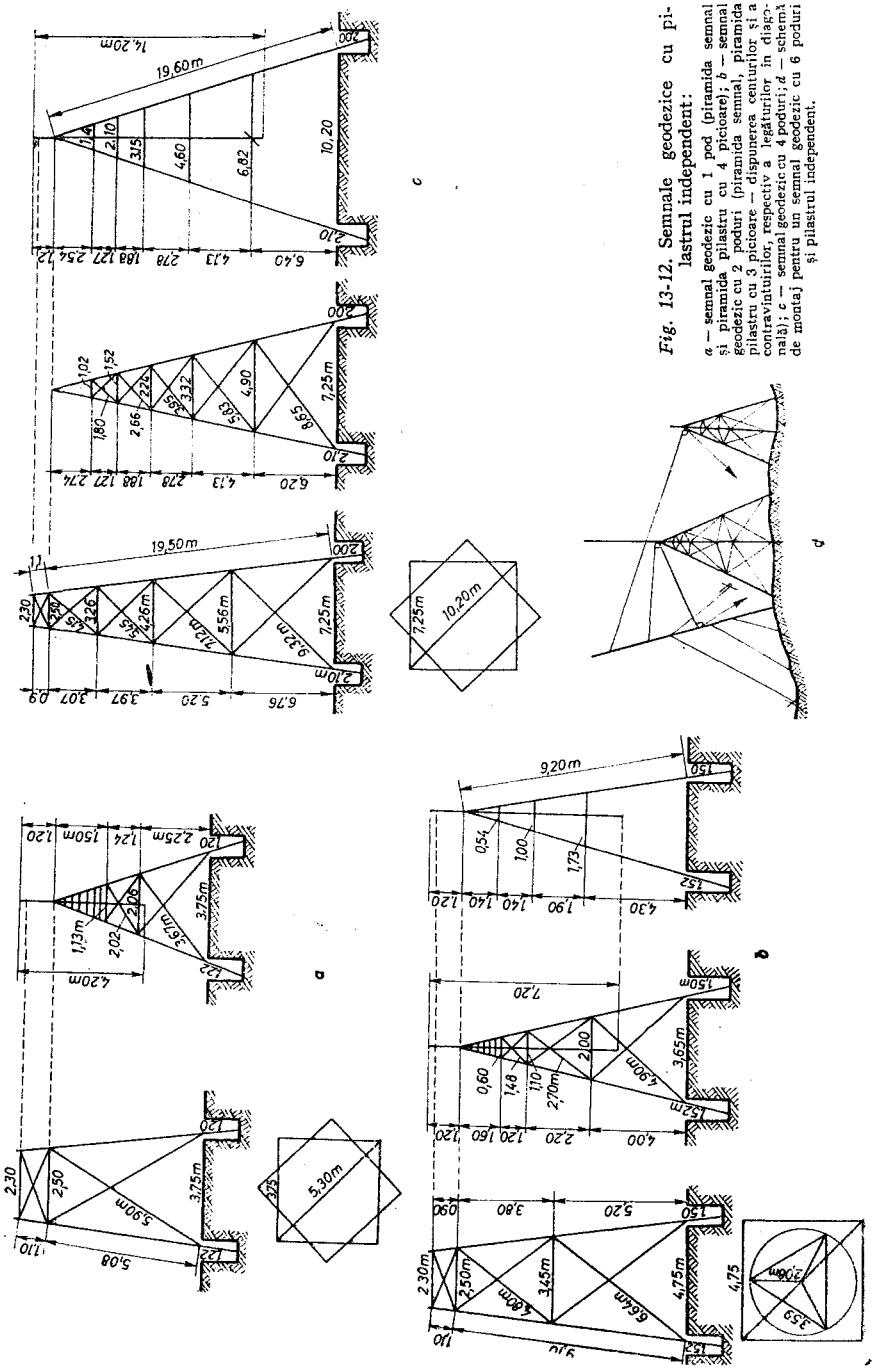


Fig. 13-12. Semnale geodezice cu pilastrul independent:
a — semnal geodezic cu 1 pod (piramida semnal și piramida pilastru cu 4 picioare); *b* — semnal geodezic cu 2 poduri (piramida semnal, piramida pilastru cu 3 picioare — dispunerea centurilor și a contravînturilor, respectiv a legăturilor în diagonală); *c* — semnal geodezic cu 4 poduri; *d* — schemă de montaj pentru un semnal geodezic cu 6 poduri și pilastrul independent.

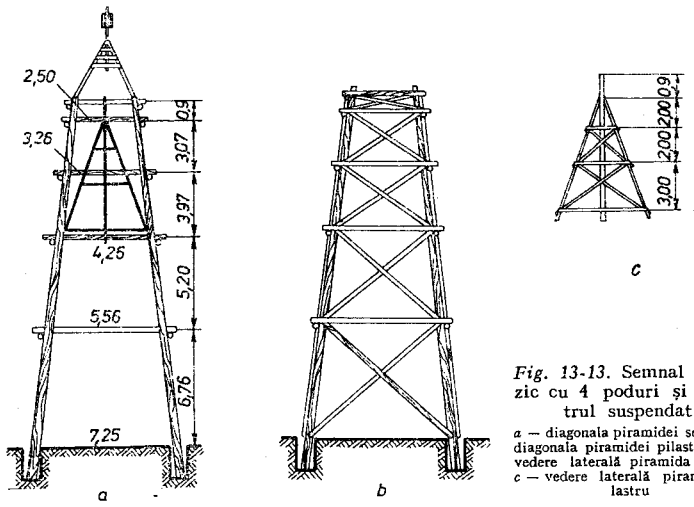


Fig. 13-13. Semnal geodezic cu 4 poduri și pilastrul suspendat:
a — diagonala piramidei semnal și diagonala piramidei pilastru; *b* — vedere laterală piramida semnal; *c* — vedere laterală piramida pilastru

Se montează apoi centurile și contravîntuirile piramidei semnal, de jos către partea de sus a piramidei. Aceste elemente vor fi pregătite la sol și sînt apoi dirijate prin intermediul unor scripeți, echipei „de sus", formată din dulgheri experimentați, care lucrează pe stîlpi, sprijiniți în centuri de siguranță, folosindu-se de scările instalate provizoriu pe acești stîlpi.

Profilul piramidei pilastru este construit la sol (v. dimensiunile din figura 13-13, *c*) așa cum s-a menționat în 13.1.4.1. Piramida pilastru

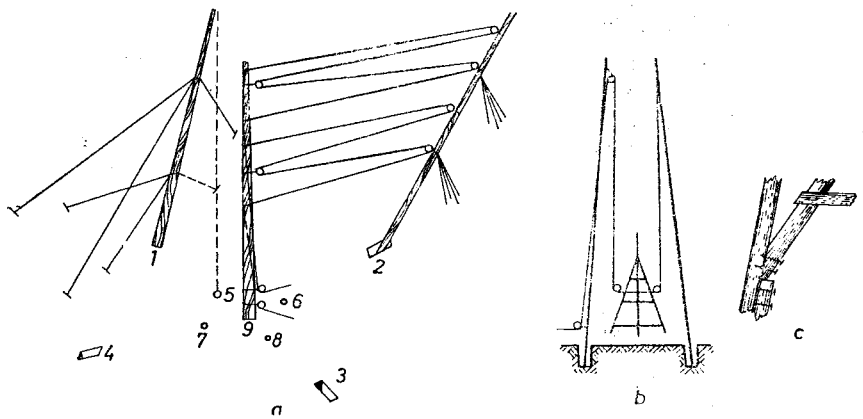
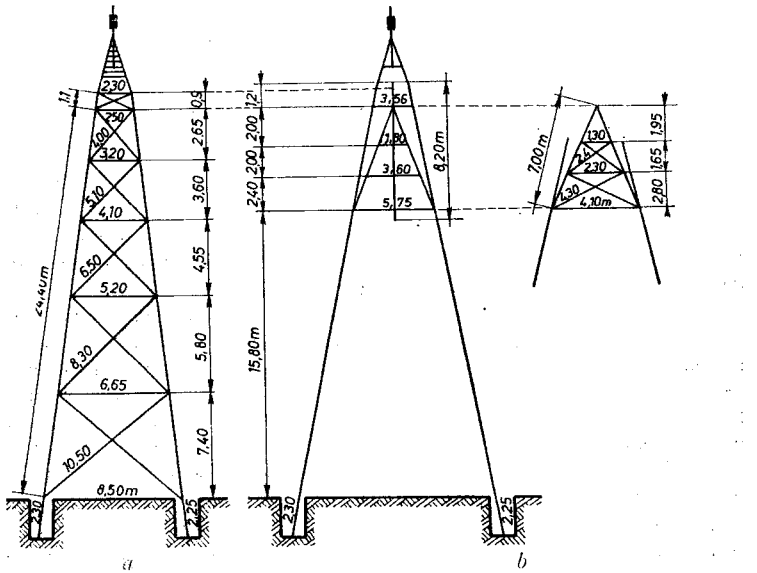


Fig. 13-14. Detalii de montaj al semnalului geodezic cu 4 poduri și pilastrul suspendat:
a — ridicarea stîlpilor piramidei semnal; *1, 2, 3, 4* — amplasamentul gropilor stîlpilor piramidei semnal; *5, 6, 7, 8* — proiecția în teren a ultimului pod; *1* — stîlp ridicat și ancorat; *2* — stîlp care se montează; *9* — stîlpul de montaj; *b* — ridicarea de la sol a piramidei pilastru; *c* — solidarizarea piramidei pilastru de piramida semnal.



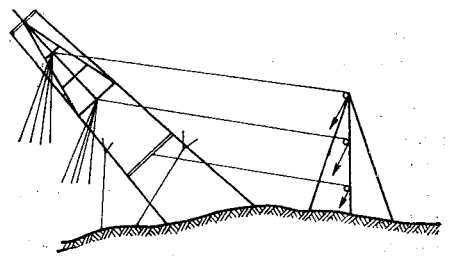


Fig. 13-15. Semnal geodezic cu 5 poduri și pilastrul suspendat:
a — piramida semnal; *b* — amplasarea piramidei pilastru (legături în diagonală și respectiv centuri și contravîntuiri); *c* — schemă de montaj.

este ridicată prin interiorul piramidei semnal (fig. 13-14, *b*). În detaliul din figura 13-14, *c* se arată modul de solidarizare a piramidei pilastru, de stîlpii piramidei semnal.

În continuare se montează și celelalte părți ale piramidei pilastru, se instalează scările cu postamentele aferente, piramida de semnalizare, așa cum s-a procedat și în cazul semnalului geodezic cu trei poduri și pilastrul independent.

Observații. 1. Există și alte procedee de montaj ale unor asemenea tipuri de semnale geodezice. Astfel, de exemplu, se obișnuiește uneori ca la sol să se construiască un întreg profil al piramidei semnal (v. fig. 13-13, *a*), împreună cu diagonala corespunzătoare a piramidei pilastru, urmînd ca apoi să fie ridicat așa cum este prezentat în figura 13-15, *c*. Asemenea operațiuni implică însă precauții suplimentare de ancorare, de ridicare propriu-zisă ș.a.m.d., precum și de protecție a muncii. De aceea, astfel de montaje trebuie executate numai de echipe de lucru experimentate, care au o dotare tehnică corespunzătoare.

2. Fiecare semnal geodezic construit se predă spre păstrare, cu proces-verbal, organelor locale ale puterii de stat, asigurîndu-se astfel integritatea lor atît pe perioada efectuării observațiilor, cît și în continuare, pentru alte măsurări în punct.

13.2. BORNAREA PUNCTELOR GEODEZICE

Semnalizarea permanentă a punctelor geodezice este realizată cu ajutorul *bornelor geodezice* și are ca scop reprezentarea punctului de triangulație pe o perioadă foarte îndelungată de timp pentru a fi folosit în lucrările geodezice viitoare, atunci cînd semnalul de deasupra solului nu mai există.

În trecut s-au folosit borne de piatră cu diverse semnalizări la subsol (blocuri de piatră, beton, cărămizi ș.a.), separate prin diverse straturi de semnalizare (cărămidă sau sticlă, zgură ș.a.), centrele geometrice respective fiind realizate prin încrustări sub formă de cruce. În ultimele două decenii, potrivit instrucțiunilor în vigoare, bornele sînt alcătuite din elemente prefabricate de beton armat, între care se află straturi de semnalizare (de obicei pietriș bătut). În fiecare element se află încastrat un reper metalic, care indică centrul geometric al punctului geodezic.

Bornele geodezice amplasate în *terenuri obișnuite* au în prezent o structură diferită, în funcție de ordinul rețelei de triangulație din care face parte punctul respectiv (fig. 13-16).

Pentru regiuni cu *teren pietros*, în care se poate săpa cu multă greutate, instrucțiunile prevăd anumite simplificări în realizarea bornării. Pentru *zonele mlăștinoase*, cu soluri bogate în apă, situate în apropierea bălților, a luncilor rîurilor interioare, în Delta Dunării ș.a., instrucțiunile prevăd măsuri deosebite ce trebuie luate la realizarea construcțiilor de semnale și a bornelor în punctele geodezice respective, pentru a se asigura o stabilitate corespunzătoare a acestora. În acest fel și aceste rețele vor avea caracteristici similare, în ceea ce privește precizia de determinare, cu rețeaua de triangulație generală a țării.

Bornarea capetelor bazelor geodezice se realizează, potrivit instrucțiunilor, cu borne specifice ordinului I, cu deosebirea că ultimul reper, amplasat în pilastru, este de bronz sau alamă.

În triangulațiile de stat mai vechi și în triangulațiile locale actuale, bornele sau pilaștrii situați la capetele bazelor geodezice sînt protejate contra coroziunii și deteriorărilor cu capace metalice de diverse forme.

Instrucțiunile prevăd ca pilastrul de la ordinul I să se construiască în teren. În figura 13-16, *b* se prezintă dispunerea armăturii unui asemenea pilastru, caracteristică de fapt tuturor bornelor prezentate, cu particularitățile corespunzătoare.

Legătura dintre blocuri se realizează cu mortar de ciment.

Bornarea se execută imediat după terminarea construcției semnalului geodezic, urmărindu-se ca toate reperele încastrate în blocurile subterane și în borna propriu-zisă să se afle pe verticala centrului pilastrului. Operațiunile de bornare (eventual de rebornare) încep de la partea inferioară, după ce în prealabil centrul punctului geodezic s-a materializat cu fire de sîrmă subțire (liță) dispuse perpendicular, prinse de țăruși de lemn.

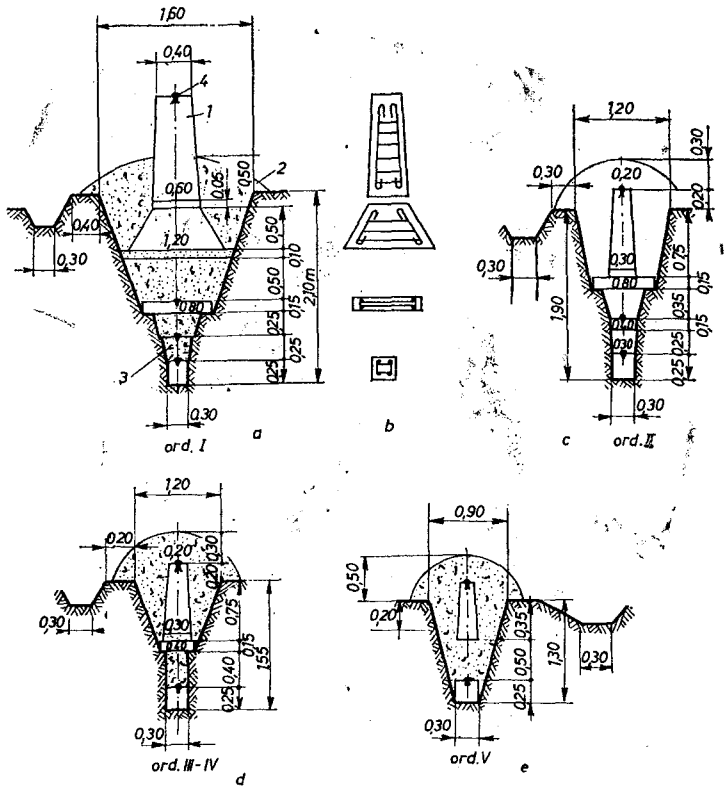


Fig. 13-16. Bornarea punctelor geodezice în soluri obișnuite:
1 — beton armat; *2* — umplutură cu pămînt; *3* — pietriș; *4* — reper.

13.3. OPERAȚIUNI ANEXE LA MATERIALIZAREA PUNCTELOR DE TRIANGULAȚIE

După terminarea construcției semnalului geodezic și plantarea bornei se execută unele operațiuni anexe, necesare pentru efectuarea viitoarelor lucrări de realizare a rețelei de triangulație. Unele dintre acestea pot fi executate și în alte etape de lucru, așa cum se va menționa în continuare.

13.3.1. DETERMINAREA ÎNĂLȚIMII SEMNALULUI GEODEZIC CONSTRUIT

Sub această operațiune se înțelege determinarea diferențelor de nivel I_I dintre bornă C și pilastru I și respectiv I_S dintre bornă și partea superioară a semnalizării S. Aceste determinări se fac atît direct, cu o ruletă, cît și analitic, pe baza unor măsurări de unghiuri zenitale (fig. 13-17).

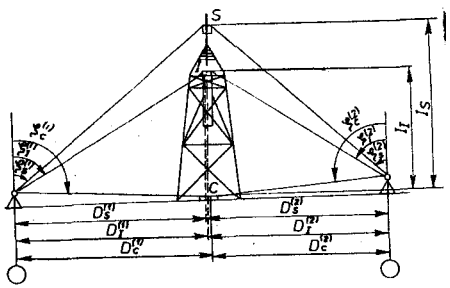


Fig. 13-17. Determinarea înălțimii semnalului geodezic.

Stațiile de teodolit *1* și *2* sînt amplasate, în raport cu semnalul geodezic, la distanțe aproximativ egale, respectîndu-se condiția $D > 2\,I_1$.

Se observă că pentru prima determinare avem:

$$I_S^{(1)} = D_S^{(1)} \operatorname{ctg} \zeta_S^{(1)} - D_C^{(1)} \operatorname{ctg} \zeta_C^{(1)};$$

$$I_I^{(1)} = D_I^{(1)} \operatorname{ctg} \zeta_I^{(1)} - D_C^{(1)} \operatorname{ctg} \zeta_C^{(1)}. \quad (13\text{-}2)$$

Pentru cea de-a doua determinare formulele sînt asemănătoare, variind doar indicele superior. Observațiile și calculele se prezintă în tabelul 13-1 unde se trec și rezultatele măsurării directe, precum și media lor. Se admit abateri de maximum 5 cm între determinările analitice și cele directe.

Tabelul **13 – 1**

Distanța (m)	Unghiul	C. S. g	C. S. c	C. S. cc	C. D. g	C. D. c	C. D. cc	Locul zenitului g	Locul zenitului c	Locul zenitului cc	Distanța zenitală g	Distanța zenitală c	Distanța zenitală cc	ctg. ζ_S ctg. ζ_c	$D \cdot \operatorname{ctg} \zeta$	I_I, I_S [m]
D_1=24,07	ζ_S	65	77	43	334	23	08	400	00	25	65	77	18	0,5962	14,30	$I_s^{(1)}$=15,05
	ζ_I	77	43	64	332	56	48	400	00	06	77	43	58	0,3703	8,85	$I_I^{(1)}$= 9,60
	ζ_C	102	04	14	297	95	56	399	99	85	102	04	29	−0,0324	−0,75	
D_2=26,31	ζ_S	67	49	41	332	50	76	400	00	08	67	49	33	0,5661	14,75	$I_s^{(2)}$=15,00
	ζ_I	78	20	70	321	77	99	399	99	34	78	21	36	0,3565	9,40	$I_I^{(2)}$= 9,65
	ζ_C	100	56	24	299	44	26	400	00	25	100	55	99	−0,0082	−0,25	
Măsurat direct I_I =9,60 m; I_S =15,05 m														Media I_I=9,62 m; I_S=15,02 m		

13.3.2. ÎNTOCMIREA FOII DE CENTRARE

După terminarea construcției este necesar să se determine elementele de centrare, adică dispunerea în plan orizontal a centrului bornei *C*, pilastrului *I* și semnalizării *S*.

Mult mai indicat este ca aceste determinări să se efectueze în timpul executării observațiilor azimutale. Pentru rețelele de triangulație de ordinele I-II, instrucțiunile recomandă ca aceste determinări să se facă la începutul și sfîrșitul observațiilor azimutale din zonă, precum și ori de cîte ori este necesar (după furtună, ploi torențiale etc.).

Pe foaia de centrare (fig. 13-18), instalată pe o planșetă, se proiectează cu ajutorul unui teodolit punctele *C*, *I*, *S* din trei stații astfel dispuse în plan încît să formeze un triunghi echilateral. Proiectările se vor face în

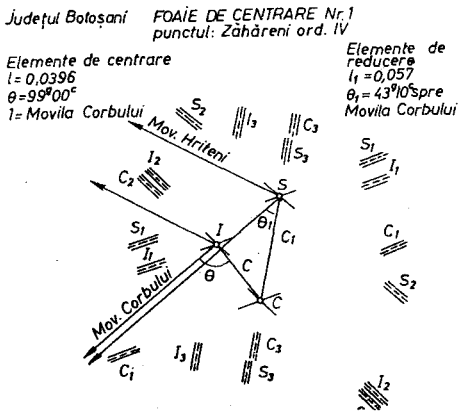


Fig. 13-18. Foaia de centrare.

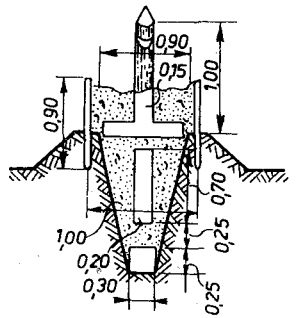


Fig. 13-19. Reper azimutal la sol.

ambele poziții ale lunetei, rezultînd pentru fiecare punct mici triunghiuri de eroare (ale căror laturi nu trebuie să depășească 5 mm).

Din proiecțiile *I* și *S* se vor trasa direcții către două puncte de triangulație din teren, care fac parte din planul de observații azimutale ale punctului considerat; cînd nu există vizibilitate de la sol către aceste puncte, va trebui ca în prealabil să se jaloneze (de pe pilastru) cele două direcții.

Elementele liniare l și l_1 se măsoară cu precizia de $\pm$ 1 mm, iar cele de orientare θ și θ_1 cu precizia de $\pm$ 25^c. Unghiul dintre cele două direcții, determinat grafic, nu trebuie să difere mai mult de $\pm$ 1^{g}50^c față de unghiul determinat cu ajutorul teodolitului (în cadrul observațiilor azimutale efectuate în punct).

Pentru simplificarea calculelor ulterioare este util ca direcția care este utilizată pentru orientarea foii de centrare să coincidă cu direcția de referință din planul de observații.

13.3.3. DEFINITIVAREA DESCRIERII TOPOGRAFICE

După terminarea construcției semnalului geodezic și amplasarea bornei în punctul de triangulație se definitivează descrierea topografică a punctului, cu detaliile privind construcțiile în punct, schema direcțiilor, dispunerea reperelor azimutale, operații începute cu ocazia recunoașterii terenului, despre care s-a tratat în 12.3.

13.3.4. MATERIALIZAREA REPERELOR AZIMUTALE

Reperele azimutale amplasate la sol (v. 12.1.3) sînt materializate (fig. 13-19). Pentru a fi mai ușor identificate în viitor și pentru a se asigura durabilitatea necesară, reperul azimutal este înconjurat de un gard de nuiele (asemănător bornelor silvice), de formă circulară, cu raza de 0,5 m.

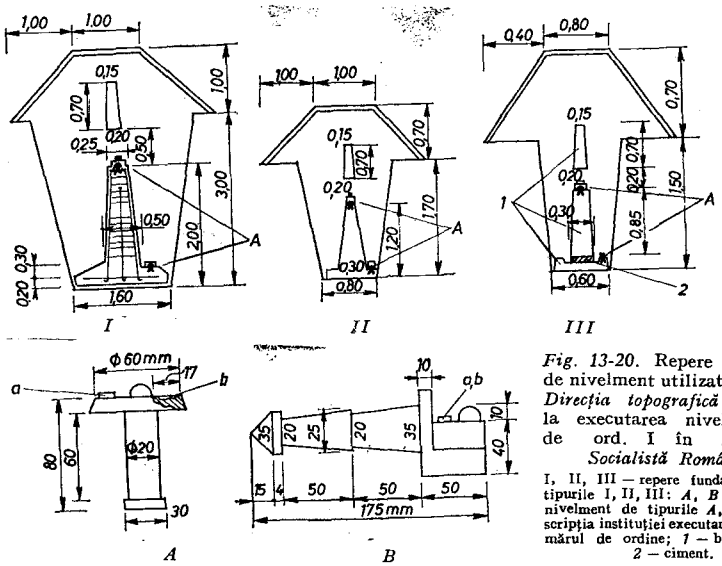


Fig. 13-20. Repere şi mărci de nivelment utilizate de către *Direcţia topografică militară* la executarea nivelmentului de ord. I în *Republica Socialistă România*:

I, II, III — repere fundamentale de tipurile I, II, III: *A*, *B* — mărci de nivelment de tipurile *A*, *B*: *a* — inscripţia instituţiei executante; *b* — numărul de ordine; *1* — beton armat; *2* — ciment.

13.4. REPERE ŞI MĂRCI DE NIVELMENT

Punctele geodezice din reţelele de nivelment sînt materializate prin *repere* şi *mărci*.

Reperele de nivelment pot fi împărţite în două categorii principale:

— repere de greutate;

— repere de adîncime.

Reţeaua de nivelment de stat de ordinele I, II, III şi IV executată de *DTM* în perioada anilor 1960—1971 (v. fig. 8-7) a fost materializată prin *repere de greutate* de tipurile I, II şi III, precum şi prin mărci de nivelment de tipurile *A* şi *B* (fig. 13-20). Despre amplasarea reperelor şi mărcilor de nivelment, precum şi despre densitatea acestora în reţea s-a tratat în 11.1.

În cadrul lucrărilor de nivelment geometric repetat, de ordin superior, executat de către *IGFCOT*, a fost elaborat şi realizat reperul de nivelment de adîncime prezentat în figura 13-21.

Reperul de adîncime este amplasat, în principiu, cu o aceeaşi densitate ca şi reperul de greutate de tipul I. Reperul de adîncime, care poate coborî pînă la 20—30 m, după necesităţi, este util în special în zonele de şes din ţara noastră, unde solurile sînt constituite din luturi, loessuri, argile contractile. Desigur, construcţia reperului de adîncime presupune utilizarea unei instalaţii de foraj, precum şi aparatura care determină adîncimea necesară, în funcţie de caracteristicile efective ale solului, pînă se ajunge la roca stabilă.

De remarcat accesul mai simplu la reperul de adîncime, fără a mai fi necesare săpături suplimentare, ca în cazul reperelor de greutate de tipurile I, II şi III. Acest avantaj este însoţit şi de o mai uşoară identificare a reperelor de adîncime.

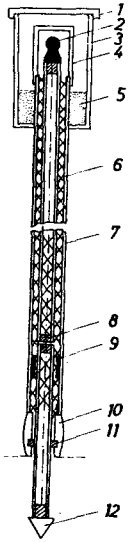


Fig. 13-21. Reper de adîncime (tip *Institutul de geodezie, fotogrammetrie, cartografie şi organizarea teritoriului*):

1 — capacul reperului; *2* — reperul propriu-zis; *3* — cămin de vizitare; *4* — capac de protecţie; *5* — pietriş şi nisip; *6* — ţeavă de oţel portreper; *7* — ţeavă de oţel protectoare; *8* — piesă de legătură a tronsoanelor; *9* — muf㠠de îmbinare şi ghidaj; *10* — şieu; *11* — simering; *12* — sondă de oţel.

De menţionat faptul că la toate reperele de nivelment punctul care primeşte cotă este reprezentat de o marcă de nivelment (de tip *A*). Pentru siguranţă, reperele de tipurile I, II şi III au fost prevăzute cu două asemenea mărci, prin care se trece atît la plantarea reperului, cît şi la oricare nouă utilizare.

Instrucţiunile în vigoare prevăd ca reperele de nivelment să fie poziţionate în raport de cel puţin trei detalii apropiate din teren (la circa 20 m), care au o mare stabilitate în timp, schiţa de reperaj urmînd să apară în fişa reperului de nivelment respectiv.

În apropierea reperelor de adîncime există repere de nivelment denumite *martori*, în raport de care se determină eventualele deranjamente nedorite în reperul propriu-zis. Microreţeaua de nivelment în care se includ reperul de adîncime şi reperele martor se remăsoară la fiecare utilizare a reperului de adîncime.

Partea a patra

APARATE ŞI METODE DE MĂSURARE UTILIZATE ÎN REŢELELE GEODEZICE

«Construcţia aparatelor geodezice se va dezvolta nu numai în direcţia creşterii gradului de precizie ci, poate în primul rînd, către creşterea randamentului lor, a simplităţii şi comodităţii în utilizare»

(*H. Wild*, 1939)

Cunoaşterea aparatelor şi metodelor de măsurare utilizate în reţelele geodezice este un deziderat major în formarea unui inginer geodez. Planul de învăţămînt al secţiei de Geodezie nu are prevăzut un *curs de aparate şi instrumente geodezice*, aşa cum există în multe ţări, ci, cunoştinţele necesare sînt căpătate treptat în cadrul mai multor discipline: *fizică, topografie, astronomie şi măsurători prin unde, topografie inginerească, geodezie* ş.a. Această tradiţie, existentă în cadrul secţiei, de a prezenta metodele de lucru şi aparatura necesară separat, în interiorul mai multor discipline, şi nu unitar, în cadrul unui curs de specialitate, prezintă avantaje şi dezavantaje. Am considerat însă necesar să fie punctat acest sistem de organizare a planului de învăţămînt pentru a aviza cititorul asupra faptului că manualul nu poate epuiza problematica extrem de complexă a construcţiei tuturor aparatelor geodezice, a verificărilor şi rectificărilor lor, precum şi a metodelor de măsurare corespondente (a se consulta în acest sens *Jordan* 1956, *Deumlich* 1980 ş.a.). Prin consens cu celelalte discipline menţionate mai înainte, manualul de geodezie va aborda numai partea specifică, aferentă cursului, fiind presupuse cunoscute principiile de construcţie a aparatelor topografice (teodolite, tahimetre, nivele ş.a.) de la *cursul de topografie*, aparatura utilizată în determinările astronomice de latitudine, longitudine şi azimut de la *cursul de astronomie*, aparatura electronică de măsurat distanţe de la *cursul de măsurători geodezice prin unde* ş.a.m.d.

Capitolul 14

APARATE, INSTRUMENTE ŞI DISPOZITIVE UTILIZATE LA MĂSURAREA UNGHIURILOR ÎN REŢELELE GEODEZICE

În acest capitol se vor prezenta caracteristicile constructive principale ale *teodolitelor* — aparate utilizate la măsurarea direcţiilor (unghiurilor) orizontale şi zenitale în reţelele de triangulaţie, precum şi ale instrumentelor şi dispozitivelor auxiliare folosite în acest scop.

Construcţia *teodolitelor universale* care se folosesc în prezent în lucrările de triangulaţie este legată de numele elveţianului *Heinrich Wild* (1877—1951), căruia îi aparţin: crearea lunetei cu focusare interioară în 1908, axul vertical cilindric la teodolite, nivela cu coincidenţă, micrometrul optic cu coincidenţă şi plăci plane (1918), luneta cu lentile oglinzi (teodolitul *DKM*-3, în 1936) etc.

Primul teodolit cu caracteristici moderne a fost construit de către firma *Carl Zeiss* din *Jena* în anul 1922 (*Th I*).

Ultimele decenii sînt caracterizate printr-o dezvoltare a construcţiei instrumentelor în direcţii noi: în 1942 se construiesc primele teodolite cu posibilităţi de înregistrare fotografică a diviziunilor de pe cercurile gradate, în 1956 primele teodolite cu orizontalizare automată a liniei indexurilor cercului vertical, în 1958 teodolite echipate cu „ochi electric", în 1960 primele teodolite cu înregistrare codificată a lecturilor (cod-teodolitele), în 1968 teodolite cu sisteme semi-digitale de lectură ş.a.

14.1. STRUCTURA TEODOLITELOR

Cu teodolitele utilizate în triangulaţie se pot măsura atît unghiuri (sau direcţii) azimutale, cît şi unghiuri zenitale (v. 8.2.1 şi 8.2.5).

Este necesar de arătat că există o gamă largă de teodolite, de fabricaţie mai veche sau mai nouă, caracterizate prin parametri funcţionali diferiţi, şi care în plus se deosebesc atît ca formă, greutate, cît şi ca modalităţi efective de realizare. Deoarece expunerea în detaliu a tuturor tipurilor de teodolite cunoscute este practic imposibilă, se vor prezenta sintetic părţile constructive comune, urmînd ca pe parcurs să se arate şi deosebirile caracteristice, îndeosebi pentru aparatele existente în dotarea secţiei de geodezie şi a instituţiilor de specialitate din ţara noastră. Acest principiu de expunere va fi păstrat şi în capitolele 15, 16 şi 17.

Pentru a înlesni înţelegerea structurii teodolitelor utilizate în reţelele de triangulaţie, se va folosi ca modalitate concretă de referinţă teodolitul *Wild T2* (fig. 14-1) care întruneşte în cele mai bune condiţii părţile comune menţionate.

Pentru început se disting următoarele două părţi generale de structură:

— *partea inferioară* a teodolitului, care rămîne fixă la măsurarea unghiurilor orizontale, fiind formată din şuruburi de calare *1*, suportul teodolitului (denumit şi ambază) *2*, nivela sferică *8*, cercul orizontal şi dispozitive auxiliare;

— *partea superioară* a teodolitului, mobilă în timpul măsurărilor azimutale, este formată de alidada *3* care susţine suporţii axului orizontal *4*, axul orizontal *5*, luneta *6*, dispozitivele de lectură, cercul vertical, nivela torică *7* şi dispozitive auxiliare.

Dintre dispozitivele auxiliare se pot menţiona: şuruburi de blocare şi mişcare micrometrică ale alidadei *9*, *10* şi respectiv ale lunetei *11*, *12*, oglinzi *13*, dispozitiv

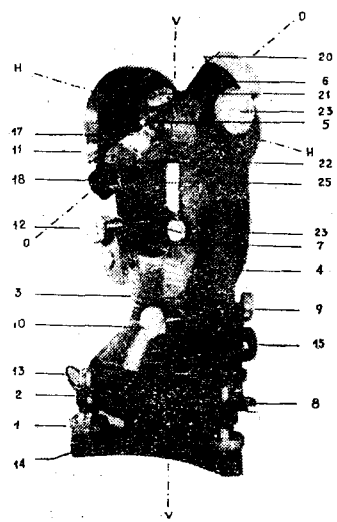


Fig. 14-1. Teodolitul *Wild T 2.*

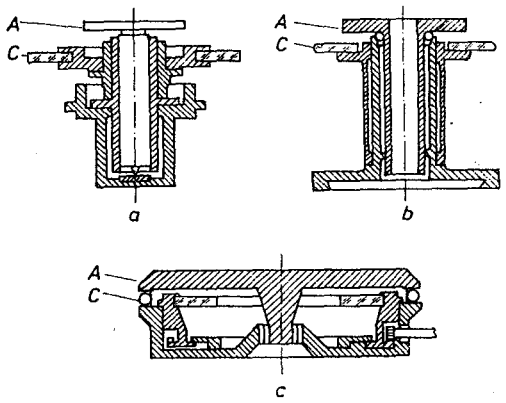


Fig. 14-2. Modalităţi de construcţie a axului principal: *a* — teodolite *Zeiss*; *b* — teodolite *Wild*; *c* — teodolite *Kern*.

optic pentru centrarea teodolitului *14*, dispozitive pentru iluminare electrică, pentru fotografiere etc.

14.1.1. SISTEMUL DE AXE ALE TEODOLITULUI

14.1.1.1. **Axa principală.** Partea superioară a teodolitului este unită de partea inferioară printr-un ax principal (în general de formă tubulară, pentru a permite trecerea razelor de lumină). Materialul din care este construit axul principal are calităţi deosebite, pentru a permite menţinerea constantă a poziţiei reciproce a părţilor teodolitului, chiar în condiţii extrem de diferite de lucru (modificări de temperatură, umiditate, transport, manipulare ş.a.).

Din punctul de vedere al formei, se disting *axe conice* (folosite la teodolitele de construcţie mai veche) şi *axe cilindrice*, în general utilizate la teodolitele moderne (fig. 14-2). Axul principal este montat pe rulmenţi, astfel încît se realizează o mare stabilitate a poziţiei sale, atunci cînd alidada *A* este rotită după diverse direcţii.

Teodolitele folosite în triangulaţie se numesc *teodolite reiteratoare*, deoarece cercul orizontal *C* poate căpăta o mişcare de rotaţie independentă, extrem de utilă la efectuarea observaţiilor azimutale, prin acţionarea unui şurub special *15* (fig. 14-1), protejat de un capac pentru a nu fi acţionat involuntar. Prin aceasta se pot introduce citiri diferite pentru un punct vizat. Se pot defini deci următoarele axe de rotaţie:

— *axa principală VV* a teodolitului, care coincide cu axa de rotaţie a alidadei (fiind denumită uneori şi *axa verticală*) este dreapta care trece prin centrul alidadei fiind perpendiculară pe planul său (fig. 14-1);

— *axa de rotaţie a cercului orizontal V'V'* este dreapta care trece prin centrul acestui cerc fiind perpendiculară pe planul său.

14.1.1.2. **Axa secundară.** Luneta se sprijină pe suporţi prin intermediul unui ax de formă tubulară, pentru a permite trecerea razelor de lumină de la cercurile orizontal şi vertical ale teodolitului. Axa acestui tub este denumită *axă secundară HH* a teodolitului (fig. 14-1).

Prin intermediul axei secundare, luneta, solidară cu cercul vertical, capătă mişcări de rotaţie necesare măsurării unghiurilor zenitale. În timpul acestei rotiri, axa secundară trebuie să rămînă în acelaşi plan orizontal.

14.1.1.3. **Axa de vizare OO.** Este dreapta care uneşte punctul de intersecţie al firelor reticulare cu focarul anterior al obiectivului (fig. 14-1).

Lunetele utilizate în triangulaţie (fig. 14-3, 14-4 şi 14-5) sînt sisteme optice de lungime constantă, corectate de *aberaţiile sferică, cromatică şi coma*, fiind compuse din *obiectiv ob*, *reticul r* şi *ocular oc*.

14.1.2.1. **Obiectivul lunetelor teodolitelor.** Obiectivul este un sistem optic format din 2 sau 3 lentile ca parte anterioară şi un sistem de focusare ca parte posterioară, cu lungimi focale echivalente cuprinse între 100 şi 700 mm. Acestea pot fi modificate, în anumite limite, cu ajutorul sistemului de focusare, astfel încît este posibilă menţinerea constantă a distanţei dintre partea anterioară a obiectivului şi montura firelor reticulare. Acest gen de obiective se mai numesc şi *teleobiective*.

Pentru simplificarea expunerii, se presupune în figura 14-3, că atît partea anterioară, cît şi partea posterioară ale obiectivului sînt formate din cîte o singură lentilă, presupuse, de asemenea (infinit) subţiri.

Lentilele care intervin în schema din figura 14-3 au distanţele focale notate cu: f_1' — lentila anterioară a obiectivului; f_2' — lentila de focusare; f_3' — lentila ocularului. Se poate determina astfel distanţa focală echivalentă f' a sistemului optic format cu următoarea relaţie cunoscută la *cursul de fizică*:

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e}, \qquad (14\text{-}1)$$

unde e reprezintă distanţa (variabilă) dintre cele două părţi ale obiectivului.

Pentru stabilirea traseului de lumină prin sistem, este necesară determinarea poziţiei punctelor principale P şi P' şi a planelor principale care trec prin aceste puncte, prin intermediul distanţelor s şi s':

$$s = \frac{ef_1'}{f_1' + f_2' - e}; \qquad s' = \frac{-ef_2'}{f_1' + f_2' - e}. \qquad (14\text{-}2)$$

Lentila de focusare poate fi deplasată în interiorul lunetei, în lungul axei de vizare, printr-un sistem cu cremalieră *16*, acţionat la exterior de moleta *17* (figurile 14-1 şi 14-5). Prin aceasta se modifică distanţa e şi rezultă pentru punctul O_a valorile s_a şi s_a' cu care se determină punctele

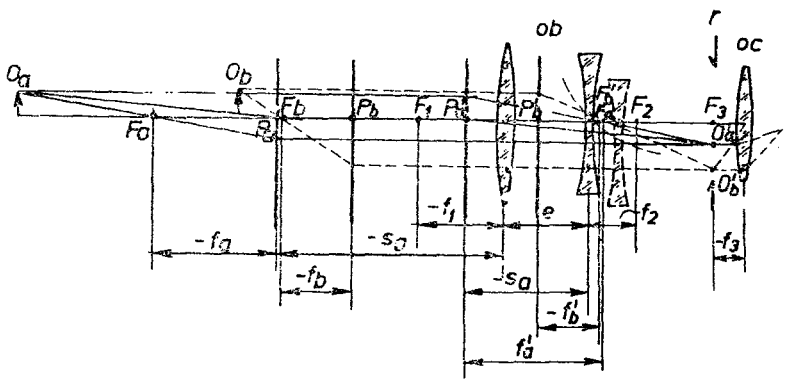


Fig. 14-3. Formarea imaginilor în lunetele teodolitelor universale.

P_a și P'_a pe axa optică. În raport de acestea, la distanța $-f_a$ și respectiv f'_a, calculate cu relația (14-2), se determină pozițiile focarului anterior F_a și a focarului posterior F_b ale sistemului optic al obiectivului. Traseul razelor de lumină pentru determinarea imaginii O'_a este redat prin linii pline și se obține ca pentru o lentilă biconvexă.

În mod asemănător s-a procedat și pentru punctul O_b, obținîndu-se imaginea O'_b (traseul redat prin linie întreruptă). Se observă că, cu cît obiectul este mai aproape de lunetă, cu atît lentila de focusare trebuie deplasată spre ocular.

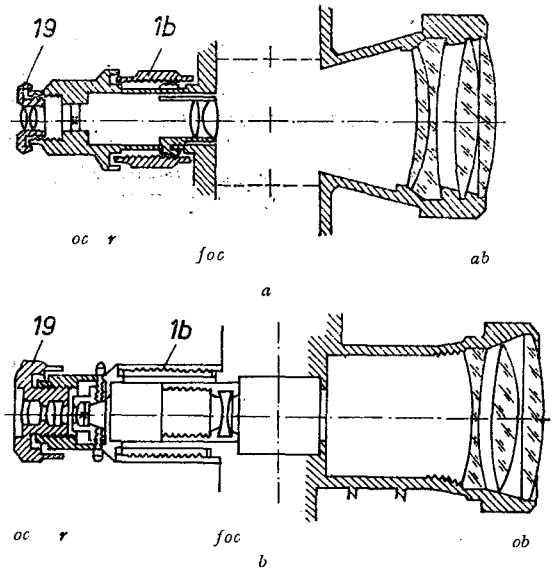
Datorită imperfecțiunilor de construcție, există o necoincidență între axa optică a lentilei de focusare (care, în general, are forma unei hiperbole cu slabă curbură, *Deumlich* 1980) și axa sistemului optic al obiectivului, ceea ce provoacă erori în formarea imaginilor, în funcție de distanța la obiectivul vizat. De aceea, la măsurările geodezice de mare precizie, se evită modificarea focusării, observațiile executîndu-se pe ordine de triangulație (variațiile relativ mici ale distanțelor spre punctele vizate vor solicita în acest fel modificări mici de focusare).

Aceste raționamente sînt valabile numai în cazul lentilelor (infinit) subțiri și atunci cînd razele de lumină formează cu axa optică unghiuri foarte mici (cazul surselor de lumină situate la infinit și slab luminate). Dacă pătrund și raze puternic înclinate, apar o serie de deformații ale imaginii (cunoscute sub numele de „aberație sferică"), care se manifestă prin existența mai multor puncte imagine (pentru un același punct obiect), suprapuse doar parțial, rezultînd o imagine neclară a punctului vizat. Defectul este micșorat constructiv, prin utilizarea unor sisteme de lentile corespunzătoare (cu diverse raze de curbură și diverse distanțe între ele), astfel ca și razele de lumină marginale să se apropie de axa optică. Pentru limitarea dimensiunilor fluxului luminos (și deci pentru micșorarea aberațiilor) se utilizează *diafragme* (denumite și pupile) de intrare și respectiv de ieșire.

Deoarece o rază luminoasă este compusă din raze elementare de diferite culori și lungimi de undă, care au indici de refracție diferiți, pot rezulta imagini multiple ale punctului vizat, a căror suprapunere este imperfectă (datorită refracțiilor inegale prin lentile), astfel că ochiul va observa marginile obiectului ca fiind colorate diferit. Defectul (cunoscut sub denumirea de „aberație cromatică") poate fi eliminat (*Jordan* ș.a. 1963) prin alegerea corespunzătoare a distanțelor focale, precum și a distanțelor dintre lentilele care formează partea anterioară a obiectivului. Astfel, de exemplu, un sistem de două lentile (cu distanțele focale f_1 și f_2) va avea aceeași distanță focală echivalentă pentru razele violete și roșii, atunci cînd distanța dintre ele este 0,5 (f_1+f_2).

Alegerea judicioasă a materialelor folosite la fabricarea lentilelor contribuie, de asemenea, la eliminarea aberației de sfericitate. Astfel, de exemplu, dacă obiectivul ar fi format dintr-o singură lentilă convergentă care ar realiza suprapunerea în planul reticulului, a imaginilor create de razele roșii-verzi, atunci imaginea creată de razele albastre ar fi mai aproape de ocular. Pentru aceasta se adaugă și o lentilă biconcavă, construită dintr-un asemenea material care să mărească convergența razelor albastre, suprapunînd astfel imaginile create de razele roșii-verzi și, respectiv, albastre. În general, pentru instrumentele geodezice, se folosește la fabricarea lentilelor de focusare o sticlă care diverge mai puternic decît normal razele cu lungime de undă scurtă.

Fig. 14-4. Secțiuni prin lunetele unor teodolite universale:
a — teodolitul *Wild T 2*; *b* — teodolitul *Kern DKM 2*.



În figura 14-4 sînt prezentate secțiuni prin două lunete: *Wild* (*a*) și *Kern* (*b*). Lentila de focusare a fost notată (*foc*).

O bună eliminare a aberației cromatice este realizată de lunetele cu lentile-oglinzi, deoarece există posibilități mai mari de alegere a materialelor și a razelor de curbură, în comparație cu lentilele obișnuite (fig. 14-5).

14.1.2.2. **Ocularul lunetelor.** Ocularul este un sistem de lentile cu distanța focală echivalentă de circa 8 mm, deci mult mai mică decît distanța focală echivalentă a obiectivului. Ocularul îndeplinește rolul unei lupe, de mărire și retransmitere a imaginii formate în lunetă, pentru a fi preluată astfel de ochiul operatorului.

Pentru punerea la punct a imaginii firelor reticulare se manevrează moleta *18* prin care este pus în acțiune un dispozitiv cu cremalieră *19*

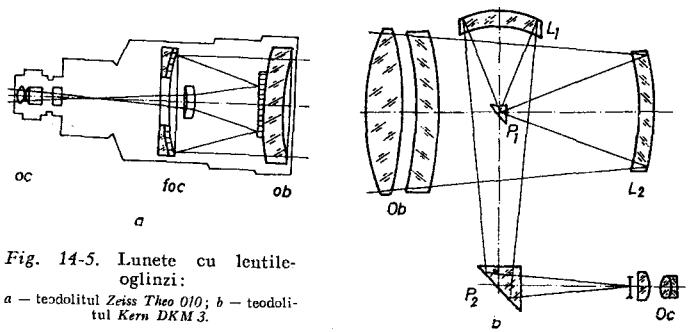


Fig. 14-5. Lunete cu lentile-oglinzi:
a — teodolitul *Zeiss Theo 010*; *b* — teodolitul *Kern DKM 3*.

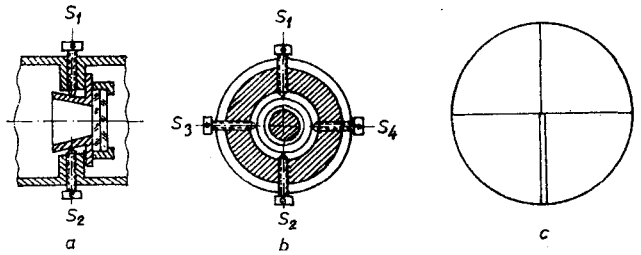


Fig. 14-6. Reticulul lunetelor teodolitelor.

(fig. 14-1 şi 14-5) cu ajutorul căruia ocularul poate căpăta o deplasare de circa 1 mm în raport de firele reticulare. În acest fel, teodolitele moderne oferă, în general, posibilităţi de vizare pentru toţi oamenii care au defecte de vedere (miopism şi presbitism). Pentru un ochi astigmatic, este necesară totuşi folosirea ochelarilor.

14.1.2.3. **Reticulul lunetelor.** Acesta este gravat pe o placă de sticlă cu feţe plane şi paralele, montată fix în lunetă, în planul focal anterior al ocularului. Pentru a fi ferit de praf, reticulul este protejat cu încă o placă de sticlă (fig. 14-6, *a*).

Forma reticulului este de obicei cea din figura 14-6, *c*, ceea ce va permite ca punctarea în timpul observaţiilor azimutale să se facă fie prin bisectare, cu firul reticular vertical, fie prin încadrare între cele două trăsături verticale paralele.

La măsurările unghiulare intervin următoarele planuri de vizare:

— *planul de vizare azimutal*, format de axa de vizare şi firul reticular azimutal;

— *planul de vizare zenital*, format de axa de vizare şi firul reticular zenital.

Montura firelor reticulare (fig. 14-6, *a* şi *b*) delimitează mărimea conului de raze, deci a cîmpului vizual al lunetei. Din figura 14-3 se observă că imaginea O'_b a obiectului vizat O_b este mai aproape de marginea firelor reticulare decît O'_a. În acest fel, pentru puncte foarte apropiate nu se mai pot forma imagini vizibile. De aceea, una dintre caracteristicile tehnice ale oricărui instrument geodezic este constituită de distanţa minimă de vizare. Această caracteristică este deosebit de importantă la instrumentele de nivelment (v. cap. 16).

Prin intermediul celor 4 şuruburi notate $S_1 \ldots S_4$ (fig. 14-6, *a*, *b*), montura poate fi deplasată cu cantităţi mici, operaţie necesară la reglajele de precizie. În acest fel se schimbă şi poziţia axei de vizare.

Punerea la punct a lunetelor cuprinde două operaţii, executate în următoarea ordine:

— privind prin luneta îndreptată spre cer, se reglează claritatea imaginii firelor reticulare prin deplasarea lentilelor ocularului;

— se vizează obiectul din teren, claritatea imaginii fiind reglată prin deplasarea lentilei de focusare.

După aceste reglaje, imaginile reticulului şi obiectului vizat apar în acelaşi plan, putîndu-se efectua observaţii azimutale şi zenitale de precizie

14.1.2.4. **Caracteristicile tehnice ale lunetelor.** Următoarele caracteristici tehnice ale lunetelor teodolitelor folosite în reţelele de triangulaţie sînt cunoscute de la *cursul de topografie*:

— *puterea de mărire* a lunetei;

— *cîmpul de vizare* (real şi respectiv subiectiv) al lunetei;

— *puterea de separare* a lunetei;

— *luminozitatea* lunetei.

Precizia de vizare cu luneta, care este o caracteristică globală a lunetelor teodolitelor utilizate în reţelele de triangulaţie, depinde de totalitatea caracteristicilor tehnice (şi în special de puterea de mărire), de forma, depărtarea, luminozitatea obiectului vizat, a fondului pe care acesta se proiectează, de starea atmosferică, de calificarea operatorului, precum şi de alţi factori secundari. De aceea formula de evaluare a erorii medii pătratice de vizare s'_v are aspect diferit în tratatele de specialitate cunoscute, fiind de forma:

$$s'_v \approx \pm \frac{c}{M}, \qquad (14\text{-}3)$$

unde c are valori cuprinse între 30^{cc} şi 60^{cc}, în funcţie de parametrii amintiţi.

14.1.3. CERCURILE GRADATE ALE TEODOLITELOR

Cercurile gradate ale teodolitelor moderne sînt discuri de sticlă cu feţe perfect plane şi paralele, avînd diametre de diverse dimensiuni (90—250 mm), pe care sînt gravate cu mare precizie gradaţii centezimale sau sexagesimale. Comparativ cu cercurile teodolitelor mai vechi (care erau de fapt coroane circulare metalice), cercurile de sticlă prezintă unele avantaje importante:

— grosimea gradaţiilor gravate pe cerc este mult mai mică (de ordinul a 0,5 μ), ceea ce conduce implicit la erori mai mici de lectură;

— rezistenţă mult mai mare la coroziune şi modificări mult mai mici la variaţiile de temperatură;

— transparenţa lor, ceea ce face posibilă întrebuinţarea unor dispozitive de citire mai perfecţionate.

Există multiple procedee complexe de gravare mecanică, fotomecanică, a căror descriere amănunţită depăşeşte cadrul cursului de faţă.

Datorită destinaţiilor diferite pe care le au, cercurile orizontal şi vertical se deosebesc în ceea ce priveşte valoarea celei mai mici diviziuni, precum şi din punct de vedere funcţional.

Cercul orizontal este montat perpendicular pe axa principală a teodolitului şi rămîne fix pe timpul observaţiilor azimutale (cînd alidada se roteşte). Aşa cum s-a mai menţionat, la teodolitele reiteratoare (folosite în triangulaţie), cercul orizontal poate căpăta şi o mişcare de rotaţie independentă în raport de alidadă.

Cercul vertical este montat perpendicular pe axa secundară a teodolitului, fiind rigid fixat de lunetă, cu care se roteşte solidar la efectuarea observaţiilor zenitale (fig. 14-7). Spre deosebire de cercul orizontal, cercul vertical are un diametru mai mic şi nu este reiterator.

14.1.4. MODALITĂȚI DE EFECTUARE A LECTURILOR PE CERCURILE GRADATE ALE TEODOLITELOR

Pentru eliminarea unor erori instrumentale este necesar să se efectueze citiri diametral opuse pe cerc.

În 1907, *H. Wild* obține patentul de construcție a primului dispozitiv optic de centralizare a lecturilor diametral opuse pe cerc, *teodolitele optice* fiind construite după principii complet noi, care pot fi sintetizate astfel:

— ocularul microscopului la care se efectuează lecturile de către operator trebuie să fie astfel situat încît să nu facă necesară schimbarea poziției de lucru (fig. 14-1 și 14-7);

— în același ocular trebuie să se poată efectua succesiv, sau concomitent, lecturi la ambele cercuri;

— de la fiecare cerc trebuie să pornească două citiri efectuate în poziții diametral opuse, a căror medie să se realizeze pe cale optică (fig. 14-7, 14-8 și 14-9);

— în ocularul microscopului, sensul crescător al diviziunilor trebuie să fie de la stînga spre dreapta;

— să existe posibilități de punere la punct a clarității imaginii lecturilor;

— cercurile gradate trebuie să fie prevăzute cu posibilități de iluminare naturală și artificială.

Aceste cerințe sînt însoțite de o stabilitate corespunzătoare a sistemului optic și de folosire a unui minim de medii optice pentru a avea cît mai puține pierderi de lumină.

În figurile 14-7 și 14-8 se poate urmări modalitatea de realizare a acestor principii la două categorii de teodolite frecvent folosite în rețelele de triangulație.

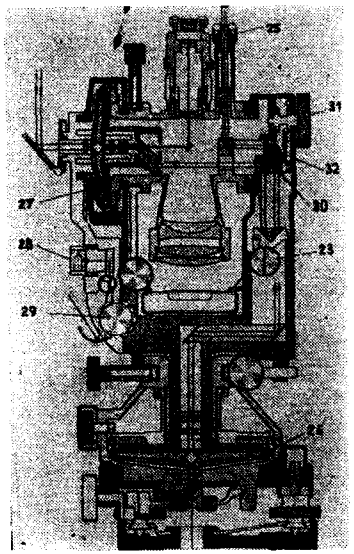


Fig. 14-7. Secțiune prin teodolitul *Wild T 2.*

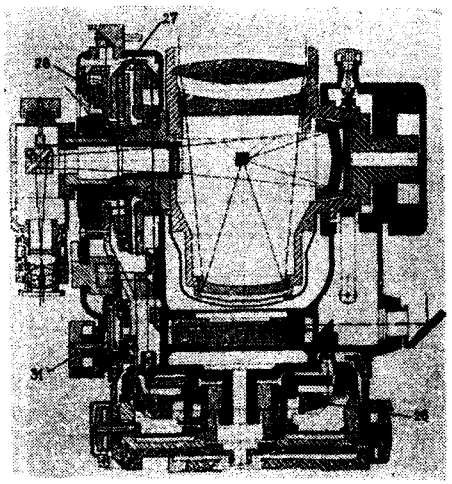


Fig. 14-8. Secțiune prin teodolitul *Kern DKM 3.*

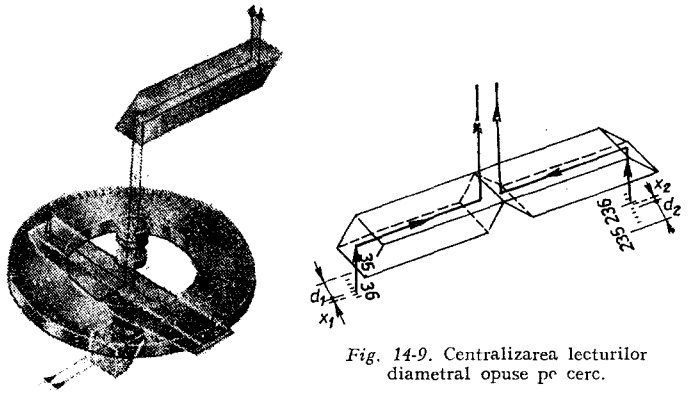


Fig. 14-9. Centralizarea lecturilor diametral opuse pe cerc.

În figura 14-9 este prezentată o schemă de principiu a modului în care *prismele transmițătoare de imagini* „culeg" citirile diametral opuse pe cerc.

Prismele transmițătoare de imagini sînt montate paralel cu cercurile respective și au rol funcțional diferit. *Prismele cercului orizontal 26* (fig. 14-7 și 14-8) sînt solidare cu axul vertical și prin urmare execută aceleași mișcări de rotație cu ale alidadei.

Prismele cercului vertical 27 (fig. 14-7 și 14-8) ocupă o poziție (de obicei) verticală, care este controlată înainte de executarea fiecărei lecturi. La teodolitele de precizie de construcție mai veche, precum și la teodolitele de înaltă precizie, acest control este realizat prin intermediul unei nivele torice de precizie *28* care este acționată de moleta *29*. Prin urmare, înainte de a se efectua o lectură la cercul vertical este necesară aducerea în coincidență a nivelei de control a poziției prismelor transmițătoare de imagini de la cercul vertical.

La multe teodolite de precizie, de construcție mai recentă, operațiunea de control a poziției corecte a prismelor cercului vertical este preluată de un *sistem pendular*, ceea ce mărește randamentul măsurătorilor de unghiuri zenitale (sistemul este cunoscut și sub denumirea de *index automat al cercului vertical*). În figura 14-10, *a* se prezintă sistemul pendulat al teodolitelor *Wild T 2* de construcție recentă, care au în prezent aspectul din figura 14-10, *b* (a se compara cu figura 14-1). Plăcile cu fețe plane și paralele *3* sînt montate pe sistemul pendular (basculant) compensator și realizează o compensare pe cale optică a înclinării razelor trimise de prismele 4. Plăcile de amortizare prevăzute asigură o funcționare corectă a întregului sistem.

În continuare, razele de lumină sînt dirijate spre dispozitivele de lectură. În cazul teodolitului *Wild T 2* din figura 14-1, înainte de a ajunge în ocularul microscopului unic, razele de lumină trec printr-un *bloc de separare 32* (fig. 14-7), care are ca rol principal împărțirea în două părți distincte și alăturate a celor două imagini diametrale de pe cercurile gradate. Acest bloc este format din două prisme lipite, care nu permit trecerea razelor mijlocii spre ocular, evitînd astfel suprapunerile lor (lipitura prismelor va apărea în cîmpul optic al microscopului ca o linie de demarcație între cele două imagini). Aceasta este reprezentată în figura 14-11, în care

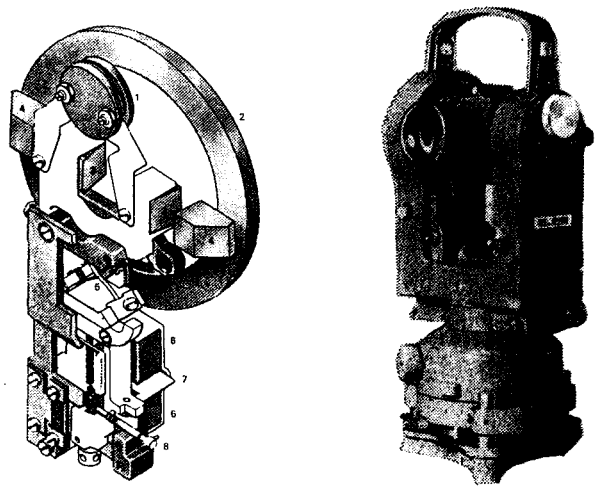


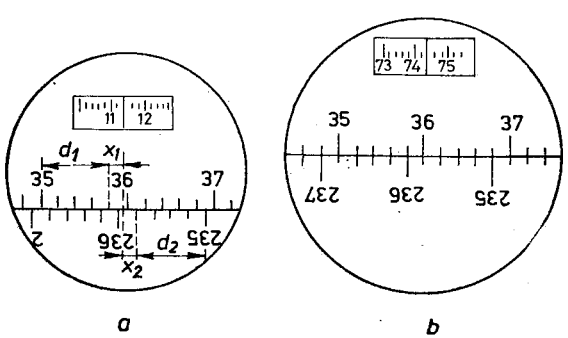
Fig. 14-10. Indexul automat al cercului vertical la teodolitele *Wild T 2* de construcție recentă:
a — schema de funcționare a indexului automat; *1* — amortizor transversal; *2* — cercul vertical; *3* — lamelele plan-paralele ale pendulului; *4* — prismele cercului vertical; *5* — benzi de suspensie; *6* — magnet permanent; *7* — placă de amortizare; *8* — șurub de reglaj; *b* — teodolit *Wild T 2* de construcție recentă.

s-a continuat exemplificarea din figura 14-9. În aceste două figuri se observă că fiecare lectură este formată:

— dintr-un număr întreg de diviziuni (d_1 și respectiv d_2) care poate fi evaluat ușor de către operator;

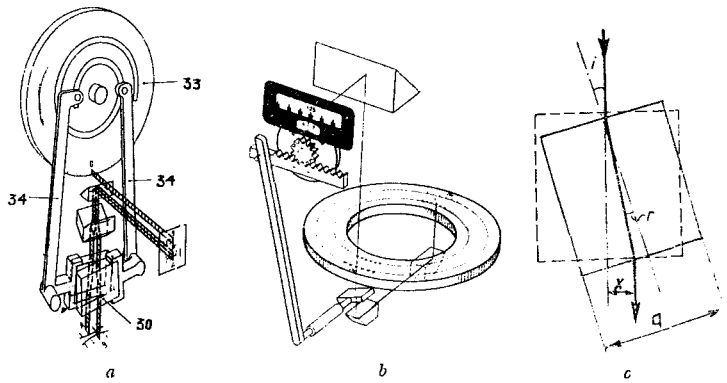
— dintr-o fracțiune de diviziune (x_1 și respectiv x_2) care nu poate fi estimată decît aproximativ cu ochiul liber. Ca reper, în raport de care trebuie citite x_1 și x_2, servește fie un index fix, care apare în cîmpul ocularului microscopului, fie un index fictiv (imaginat), unde diferența celor două lecturi este de 200^g.

Evaluarea precisă a cantităților x_1 și x_2 se realizează cu ajutorul *micrometrului optic* (v. reperul 31 — figurile 14-7 și 14-8), format dintr-un cerc de sticlă *33* pe care sînt gravate gradații reprezentînd fracțiuni ale celei mai



a *b*

Fig. 14-11. Imaginea în ocularul microscopului a diviziunilor diametral opuse pe cerc:
a — înainte de realizarea coincidenței; *b* — după coincidență (35^g 97^c 44^{cc}).



a *b* *c*

Fig. 14-12. Micrometrul optic (schemă):
a — pentru teodolite *Wild*; *b* — pentru teodolite *Kern*; *c* — traseul razei de lumină printr-o placă de sticlă cu fețe plane și paralele.

mici diviziuni de pe cerc. Acționînd asupra tamburului *24* se modifică, prin intermediul pîrghiilor *34* (fig. 14-12, *a*) poziția plăcilor de sticlă cu fețele plane și paralele *30*, ceea ce are ca urmare devierea celor două fascicule de raze cu o cantitate x direct proporțională cu unghiul i de rotație a plăcii în raport de poziția perpendiculară pe direcția razelor de lumină (fig. 14-12, *c*):

$$x = k \cdot i \quad \text{unde} \quad k = \frac{n-1}{n}\, q, \tag{14-4}$$

n fiind indicele de refracție al sticlei folosite.

Prin acțiunea de mai sus, plăcile *30* s-au rotit în sensuri diferite, însă sub unghiuri i egale față de poziția inițială. În acest fel se realizează o deplasare uniformă a imaginilor lecturilor diametral opuse, în sensuri contrare, pînă cînd este realizată coincidența diviziunilor (fig. 14-11, *b*).

Rotirea pe care a suferit-o tamburul micrometrului depinde numai de cantitatea $\frac{x_1+x_2}{2}$, astfel încît, după coincidență, media celor două lecturi poate fi citită direct pe scala micrometrului optic, observată în ocularul microscopului.

În general, cercul micrometrului optic este gradat în 500 și, respectiv, 600 diviziuni (pentru gradația centezimală, respectiv sexagesimală), dintre care numai unele sînt numerotate (din 5 în 5 sau din 10 în 10 diviziuni). Unei rotiri complete a tamburului micrometrului optic îi corespunde (în general) o jumătate de diviziune de pe cerc.

14.1.4.1. **Metodologia generală de efectuare a lecturilor.** Efectuarea lecturilor la teodolitele optice (după ce în prealabil s-a realizat coincidența imaginilor diametral opuse de pe cerc) are loc după următoarea metodologie:

● Se stabilește valoarea celei mai mici diviziuni de pe cerc, respectiv de pe micrometru. În exemplul considerat (fig. 14-11) acestea sînt 20^c, respectiv 2^{cc}, astfel că pe micrometru se citesc minute, zeci de secunde, secunde.

● Se citește valoarea întreagă pe cerc: $\frac{d_1 + d_2}{2}$. În scopul simplificării acestei operațiuni, la teodolitele *Wild*, *Zeiss* ș.a. se consideră *numărul total* al diviziunilor existente între imaginile directă și inversată, care se înmulțește cu *jumătatea* valorii celei mai mici diviziuni de pe cerc (în cazul examinat $9 \times 10^c = 90^c$). La astfel de teodolite nu mai este absolut necesară folosirea indexului fix care apare în microscop.

● Se citește direct pe micrometru $\frac{x_1 + x_2}{2}$. În exemplul urmărit: 7^c44^{cc}, astfel că lectura totală este: $35^g\ 97^c\ 44^{cc}$.

Observații. 1. Nu există deosebiri de principiu între modalitatea de citire la cercul orizontal și cel vertical.

2. Lectura finală este *media* lecturilor diametral opuse și, de aceea, deși există din punct de vedere fizic un singur microscop, se va lua în considerație la compensarea în stație (v. cap. 18) numărul pozițiilor, de unde se culeg imagini de pe cerc (cîte două poziții pentru fiecare cerc).

După aceleași principii se efectuează lecturi la o serie întreagă de teodolite: *Zeiss Theo 010* (fig. 14-13), *Wild T3* (fig. 14-14) ș.a.

La teodolitele *Wild T3*, cea mai mică diviziune de pe cerc este 10^c și, respectiv, 4' (pentru gradația centezimală și, respectiv, sexagesimală). Deoarece și la acest teodolit, unei rotații complete îi corespunde o jumătate de diviziune pe cerc, rezultă că cea mai mică diviziune de pe micrometru este 1^{cc}, respectiv, 0'', 2.

La teodolitul Wild T4 (fabricat numai cu gradație sexagesimală — fig. 14-15) diviziunile minime pe cerc și pe micrometru sînt de 2' și respectiv 0'', 1 și lecturile se fac cu ușurință: numărul de gradații existente pe cerc între imaginea directă și inversată reprezintă minutele, iar cifrele de pe micrometru reprezintă secundele, putîndu-se citi direct zecimea de secundă și estima sutimea de secundă sexagesimală.

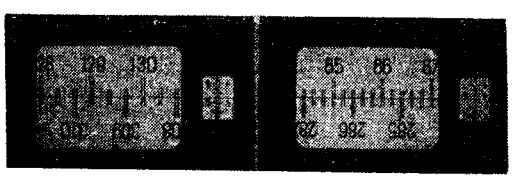


Fig. 14-13. Lecturi la teodolite *Theo 010*:
a — gradație sexagesimală ($129°25'47'',5$)
b — gradație centezimală ($85^g\ 75^c\ 03^{cc}$).

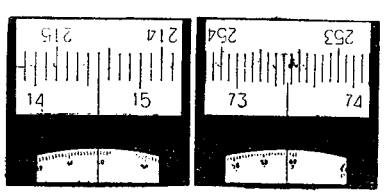


Fig. 14-14. Lecturi la teodolite *Wild T 3*:
a — gradație centezimală ($14^g64^c99^{cc},0$); *b* — gradație sexagesimală ($73°27'59'',6$).

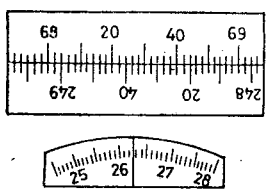


Fig. 14-15. Lectură la teodolitul *Wild T 4*, gradație sexagesimală ($68°32'26'',27$).

14.1.4.2. **Particularități în construcția teodolitelor Kern de tip** *DK*. Prescurtarea *DK* provine de la: *Doppel-Kreis* (*cercuri duble*), cu care sînt dotate teodolitele de tip *Kern* (fig. 14-8, 14-12, *b*).

Cercurile teodolitului au gravate două rînduri de gradații concentrice, dintre care cea exterioară este principală (fiind numerotată). Dispozitivul de citire, reprezentat schematic în figura 14-12, *b* este astfel construit încît în cîmpul ocularului microscopului se observă imaginea lecturii principale și imaginea lecturii secundare diametral opuse.

Coincidența imaginilor diametral opuse se realizează tot cu ajutorul unui *micrometru* optic, ceea ce a determinat firma *Kern* să-și definească această serie de instrumente prin prescurtarea generală *DKM*.

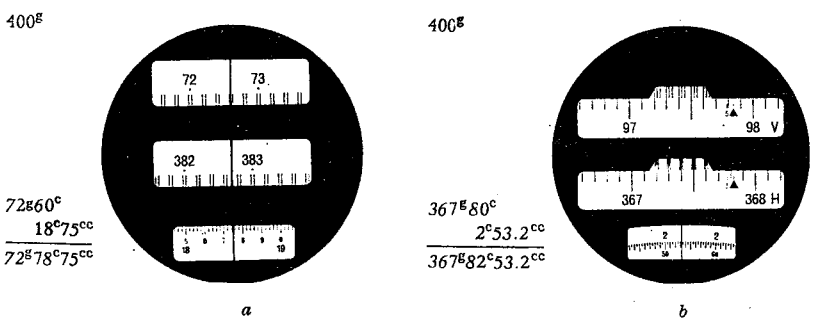
La acest gen de teodolite, imaginile cercului orizontal apar concomitent cu imaginile cercului vertical. Metodologia de efectuare a lecturilor este analoagă cu cea descrisă anterior. Se disting următoarele două situații:

● La teodolitul *DKM 2*, gradațiile principală și secundară sînt construite din linii simple ale căror imagini sînt reprezentate alăturat în ocularul microscopului, ca o serie de gradații duble. Prin acționarea micrometrului optic, cele două serii de gradații se deplasează în *același sens*. Lectura se efectuează la un index fix, după ce acesta a fost încadrat în prealabil cu o astfel de gradație dublă (fig. 14-16, *a*).

● La teodolitul *DKM 3*, gradația principală este formată din linii simple, iar cea secundară, din linii duble. Prin acționarea micrometrului optic, cele două serii de gradații se deplasează *în sensuri opuse*. Lectura se efectuează la un index, după ce în prealabil s-au încadrat diviziunile principale între cele secundare (fig. 14-16, *b*).

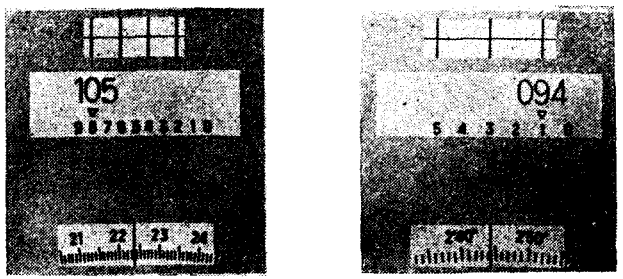
14.1.4.3. **Sistem semi-digitalizat de lectură.** În ultimul deceniu, firmele constructoare de teodolite de precizie au introdus sisteme perfecționate de efectuare a lecturilor pe cercurile gradate, care fac posibilă citirea directă și a numărului de zeci de minute. Asemenea perfecționări au fost introduse la teodolitele *Wild T2*, *Zeiss Theo 010 A*, *Kern DKM 2A* ș.a.

După aducerea în coincidență a imaginilor diametral opuse de pe cerc (transmise în partea superioară a cîmpului, în cazul teodolitului *Wild T 2* figura 14-17), lectura se efectuează deosebit de simplu, fără a mai fi necesar să se apeleze la metodologia descrisă în 14.1.4.1. Pe cerc (partea



a *b*

Fig. 14-16. Lecturi la teodolitele *Kern*:
a — lectură la cercul vertical al unui teodolit *Kern DKM 2* ($72^g\ 78^c\ 75^{cc}$); *b* — lectură la cercul orizontal al unui teodolit *Kern DKM 3* ($367^g\ 82^c\ 53^{cc},2$).



a *b*

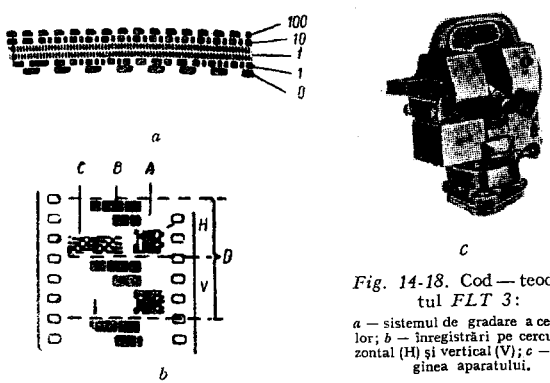
Fig. 14-17. Lecturi la teodolite *Wild T 2* dotate cu sistem semi-digitalizat de lectură:
a — gradație centezimală ($105^g\,82^c\,24^{cc}$); *b* — gradație sexagesimală (94°12'44").

mijlocie a cîmpului) se citesc direct gradele și zecile de minute, iar pe micrometru (partea inferioară a cîmpului) se citesc direct minutele și zecile de secunde, urmînd a se număra doar secundele (fig. 14-17).

Pe lîngă simplitate, acest sistem perfecționat de lectură contribuie la creșterea productivității muncii în stație și micșorează substanțial posibilitatea comiterii unor greșeli de lectură. Este de semnalat de asemenea faptul că prin acest sistem s-a obținut și micșorarea valorii celei mai mici diviziuni de pe micrometru, ajungîndu-se pînă la 1^{cc} sau 1", în cazul teodolitului *Wild T2* și cele de aceleași tip (fig. 14-17) în loc de 2^{cc} și 1", cît există la modelele mai vechi (fig. 14-11).

14.1.4.4. **Cod-teodolitul.** În anul 1960 se construiește un teodolit la care gradația obișnuită a cercurilor orizontal și vertical este înlocuită cu o gradație codificată. Teodolitul, denumit *FLT 3*, este în principiu un teodolit de 1^{cc} care ar putea fi folosit și în lucrările de triangulație (figura 14-18, *a*). Cercurile teodolitului au gravate 4 canale concentrice (100^g; 10^g; 1^g; $0{,}1^g = 10^c$) formate din linii alb-negre, de diverse dimensiuni (figura 14-18, *b*) și 2 canale *t* folosite la exploatarea ulterioară.

O înregistrare (pentru cercul orizontal *H* sau vertical *V* — fig. 14-18,*b*) este formată din imaginile diviziunilor de pe limb *A* (pînă la 10^c) și imaginea rezultatului interpolării *B* (pentru realizarea coincidenței imaginilor diametral opuse), care se va aduna la valoarea *A*. Raportul dintre acestea este de 1 : 1 000, astfel că sînt posibile înregistrări directe pînă la 1^{cc}.



a *b* *c*

Fig. 14-18. Cod — teodolitul *FLT 3*:
a — sistemul de gradare a cercurilor; *b* — înregistrări pe cercul orizontal (H) și vertical (V); *c* — imaginea aparatului.

După realizarea pe cale optică a coincidenței imaginilor diametral opuse ale cercului gradat, este declanșat un blitz fotografic și se înregistrează, pe film de 35 mm, imaginea poziției cercului. Aceste înregistrări vor fi ulterior (după developarea filmului) decodificate de către un traductor *ZUSE Z 84*.

Încercările mai noi (de genul cod-teodolitului *Digigon*) sînt îndreptate spre întregistrarea *directă*, pe bandă perforată, fără a mai fi necesară utilizarea intermediară a filmului, ceea ce reprezintă un pas important spre automatizarea completă a întregului proces de măsurare-calcul.

Totuși, este de semnalat că aceste cod-teodolite nu sînt folosite curent în lucrările geodezice.

14.1.5. NIVELE

Noțiunile generale de construcția nivelelor se presupun cunoscute de la *cursurile de topografie și astronomie geodezică*. Unele completări se vor mai face și în 16.1.1.

Teodolitele utilizate în triangulație posedă mai multe tipuri de nivele:

● *Nivele pentru calaj* utilizate pentru aducerea în poziție verticală a axei principale a teodolitului. În acest fel teodolitul este instalat în stație în poziție corectă de lucru, cu axa principală orientată spre zenit. Calajul se poate realiza în mod aproximativ cu o nivelă sterică *8* (v. fig. 14-1), sau mult mai precis cu nivela torică *7*, situată pe alidadă, între furcile de susținere ale axului orizontal.

● *Nivela torică a cercului vertical* servește pentru controlul poziției prismei transmițătoare de imagini *27* (v. fig. 14-1 — sau mai exact a liniei formate de punctele în care se fac lecturile la cercul vertical) în raport cu verticala locului. Nivela cercului vertical este de obicei o nivelă cu coincidență (și în general fără gradații).

● *Nivela călăreață*, independentă în raport de teodolit, cunoscută de la cursul de *astronomie geodezică* (v. 14.2.4.).

14.2. INSTRUMENTE ȘI DISPOZITIVE AUXILIARE UTILIZATE LA EFECTUAREA OBSERVAȚIILOR UNGHIULARE

Pentru efectuarea unor observații unghiulare de înaltă precizie, în condiții de lucru cît mai variate, firmele constructoare au realizat dispozitive și chiar instrumente auxiliare. Dintre acestea, se prezintă în continuare cele care se folosesc în observațiile unghiulare din rețelele de triangulație.

14.2.1. DISPOZITIVE DE ILUMINARE ELECTRICĂ

Pentru a putea efectua observații pe timp de noapte sau ziua în condiții de iluminare naturală nesatisfăcătoare, teodolitele moderne au posibilități de anexare a unei surse de iluminare electrică a firelor reticulare, micrometrului optic și ambelor cercuri ale teodolitului (fig. 14-19).Ca sursă de curent servește, în general, o baterie de 3 V, care se poate monta pe trepiedul teodolitului. Lămpile se montează în locul oglinzilor folosite în cazul iluminării naturale.

Fig. 14-19. Teodolit *Wild T 3* echipat cu dispozitiv de iluminare electrică.

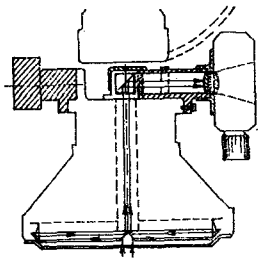


Fig. 14-20. Propunere *Gigas* de dispozitiv pentru înregistrare fotografică (schemă).

Fig. 14-21. Teodolit *Wild T 2* cu oculare zenitale.

14.2.2. DISPOZITIV PENTRU ÎNREGISTRAREA FOTOGRAFICĂ A GRADAȚIILOR

Experiența observațiilor de înaltă precizie (la triangulația de ordinul I în special) a arătat că durata efectuării lecturii este mult mai mare decît durata punctării propriu-zise. Deoarece perioada optimă pentru executarea unor observații extrem de precise este în general foarte scurtă, *E. Gigas* realizează, la firma *Askania* în 1941 (fig. 14-20) un dispozitiv optic de înregistrare fotografică a gradațiilor, ceea ce conduce la o reducere importantă a timpului de lucru necesar în teren (de circa 3—5 ori). În plus sînt eliminate erorile posibile de lectură (sau de înregistrare în carnet).

Exploatarea filmului (aducerea în coincidență a imaginilor gradațiilor diametral opuse și efectuarea lecturilor) se poate realiza fie la un microscop auxiliar (ca în cazul teodolitului *Wild T3*), fie (la teodolitul *Askania Tpr*) prin folosirea casetei detașabile a micrometrului optic cu coincidență.

14.2.3. OCULARE ȘI PRISME ZENITALE

Pentru efectuarea observațiilor în care intervin unghiuri zenitale mici, teodolitele sînt prevăzute cu oculare cotite sau zenitale (fig. 14-21) cunoscute de la cursul de *Astronomie*, precum și prisme zenitale (fig. 14-22). Acestea se montează atît la ocularul lunetei, cît și la microscopul de lecturi pe cercurile gradate. Cu prismele zenitale se pot viza puncte situate pînă la 65° deasupra orizontului, iar cu ocularele zenitale pentru vize oricît de înclinate.

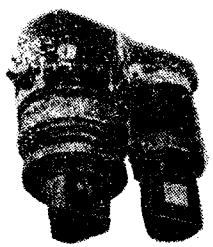


Fig. 14-22. Prisme oculare (pentru vize înclinate).

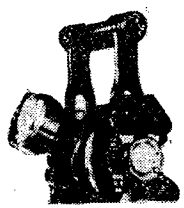
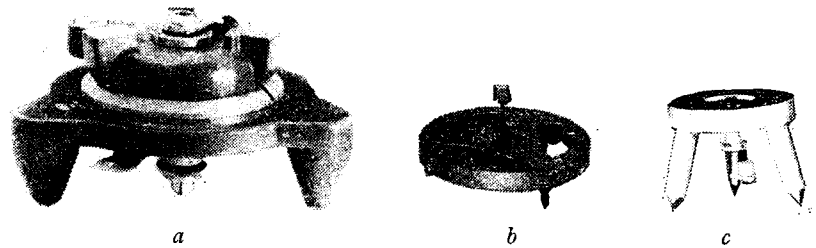


Fig. 14-23. Nivelă călăreață (independentă).



a *b* *c*

Fig. 14-24. Plăci pilastru:
a — Kern; b — Wild; c — Zeiss Jena.

14.2.4. NIVELA CĂLĂREAȚĂ

Nivela călăreață (fig. 14-23) este o nivelă torică independentă, în raport de teodolit, cu sensibilitate foarte ridicată (2''—10''). Acest gen de nivele este folosit în special pentru verificarea orizontalității axei secundare a teodolitului, îndeosebi în cazul vizelor foarte înclinate față de orizont, cînd eroarea de orizontalitate a axei secundare se manifestă foarte puternic.

14.2.5. PLĂCI PILASTRU

Cînd se staționează pe pilastrul semnalelor geodezice, sau pe un pilastru la sol, teodolitul este instalat pe o placă pilastru, care asigură o stabilitate corespunzătoare a aparatului pe timpul observațiilor (fig. 14-24).

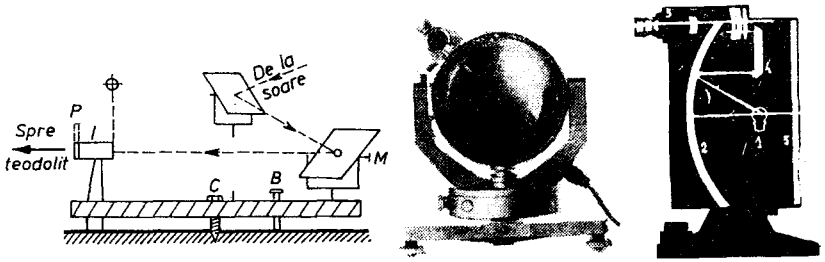
14.2.6. HELIOTROPUL

Pe măsură ce distanțele cresc, vizarea directă a piramidei de semnalizare se realizează din ce în ce mai greu, obținîndu-se *imagini directe*, clare, numai pentru intervale de timp foarte mici. Chiar și pentru distanțe de 8—10 km, în unele zone de șes, luminozitatea naturală optimă este de scurtă durată, astfel încît apare necesitatea utilizării unor instrumente auxiliare, menite să materializeze direcțiile ce urmează a fi măsurate.

Pe timp de zi poate fi transmisă lumină solară către un punct îndepărtat (care este staționat) cu ajutorul unui instrument denumit *heliotrop*, a cărui construcție a fost propusă încă în 1820.

Se cunosc mai multe modele de asemenea instrumente, dintre care la noi în țară s-a folosit heliotropul *Bertram* (construit în 1825) a cărui schemă funcțională se prezintă în figura 14-25, *a*.

Prin intermediul oglinzilor O_1 și O_2, razele solare sînt dirijate, prin tubul T, spre teodolit. Heliotropul este susținut de un stativ S, care are posibilități de fixare (C și B) în punctul staționat (fie pe pilastru, fie pe balustradele duble ale ultimului pod al semnalului geodezic). Orientarea heliotropului pe direcția spre punctul în care se află teodolitul se realizează cu orificiul o și reticulul r al tubului T. Toate aceste trei puncte trebuie să se afle pe o aceeași dreaptă. La unele modele, oglinda O_2 (care este demontabilă) se înlocuiește, pe durata orientării heliotropului, cu un tub auxiliar prevăzut cu un fir reticular vertical.



a b

Fig. 14-25. Dispozitive auxiliare pentru transmis lumină de la punctul vizat:
a — heliotropul tip *Bertram*; *b* — reflectorul geodezic TSG 200 — *Zeiss Jena*.

După orientarea heliotropului, se rotesc oglinzile O_1 și O_2, pînă cînd fasciculul luminos este centrat pe direcția spre punctul de stație. Aceasta se obține prin centrarea petei de umbră (datorată orificiului *o* al oglinzii O_2) pe firele reticulare *r*.

Perfecționările aduse în decursul anilor heliotropului *Bertram* pot fi rezumate astfel:

— tubul *T* a fost înlocuit la unele tipuri (*Germania, S.U.A.*) cu lunete, pentru a se realiza o orientare cît mai exactă a heliotropului pe direcția spre punctul de stație;

— modificări ale sistemului de recepționare și transmitere a luminii solare, prin utilizarea de exemplu a unor filtre (colorate) cu ajutorul cărora se reglează luminozitatea fasciculului.

14.2.7. REFLECTORUL GEODEZIC

Pentru extinderea timpului favorabil observațiilor de mare precizie, precum și pentru diminuarea erorilor datorate refracției laterale, observațiile azimutale în triangulația de ordinul I se execută, potrivit instrucțiunilor, numai pe lumină de heliotrop (ziua) sau pe lumină de reflector (pentru observațiile de noapte și uneori chiar și ziua, pe timp noros).

Se folosesc diferite tipuri de proiectare sau reflectoare, începînd cu simple faruri de autoturisme și terminînd cu instrumente speciale, din care se prezintă reflectorul *TSG 200* (fig. 14-25, *b*).

Reflectorul geodezic *TSG 200* este destinat lucrărilor de triangulație de ordinul I și internaționale, putînd fi folosit pentru iluminări pînă la 100 km. Dintre datele tehnice ale reflectorului se menționează: diametrul oglinzii paraboloidice 2 de 200 mm, lampa reflectorizantă 1 de 6 V și 5W, posibilitățile de alimentare de la baterie de 6V, masa 7,6 kg. Pentru orientarea pe direcția spre punctul de stație, reflectorul este echipat cu o lunetă 3 și cu un cerc orizontal, putînd fi orientat și în funcție de un reper mai apropiat, vizibil, în raport de care se cunoaște unghiul format de direcția spre punctul către care se trimite lumină.

14.2.8. DISPOZITIV DE RECEPȚIONARE A LUMINII INFRAROȘII

Starea atmosferică și caracteristicile terenului peste care trec vizele, nu permit întotdeauna obținerea unor rezultate de bună calitate și într-un interval de timp scurt, chiar atunci cînd la observații se folosesc heliotroape sau faruri.

Pentru înlăturarea acestor neajunsuri, *E. Gigas* concepe în 1947 un dispozitiv denumit de către el „ochi electric", destinat în special observațiilor din rețeaua de triangulație de ordin superior. Dispozitivul construit de *Gigas* înlocuiește firul reticular al teodolitelor optice cu muchia unei prisme sau printr-o placă cu fețe plane și paralele semiargintată. Fasciculul de raze infraroșii (care trece prin ceață sau pîclă) emis din punctul vizat este recepționat de lunetă în mod optim numai atunci cînd aceasta este orientată exact spre punctul vizat. Orientarea lunetei nu se mai realizează vizual ci prin intermediul unei instalații electronice anexe, care furnizează indicații precise din acest punct de vedere.

Modelele realizate pînă în prezent nu au satisfăcut complet, însă ideea construirii unui „teodolit electronic", care să elimine necesitățile de vizibilitate, preocupă specialiștii și probabil rezultatele viitoare vor fi mai încurajatoare.

14.3. CLASIFICAREA TEODOLITELOR FOLOSITE ÎN REȚELELE DE TRIANGULAȚIE

După examinarea modalităților generale de construcție a teodolitelor folosite în rețelele de triangulație se poate prezenta o clasificare a acestora, în funcție de parametrii funcționali principali: puterea de mărire a lunetei și cea mai mică diviziune de pe cercurile gradate (respectiv de pe micrometrul optic). De semnalat faptul că acești doi parametri sînt în dependență reciprocă și în același timp condiționează întreaga structură a teodolitului.

14.3.1. TEODOLITE DE PRECIZIE

Teodolitele utilizate în rețelele de triangulație de ordinul III, IV și V sînt denumite *teodolite de precizie*, fiind caracterizate, în general, prin următoarele elemente comune: puterea de mărire a lunetei 30 ×, cea mai mică deviziune pe micrometru 1'' (2^{cc}) etc., așa cum reiese și din tabelul 14.1.

Structura constructivă a acestor teodolite a fost clarificată în paragrafele anterioare și tipul de teodolit de bază poate fi acceptat teodolitul *Wild T2* (figurile 14-1 și 14-10, *a*). În figura 14-26 sînt prezentate și alte modele de teodolite, care fac parte din această categorie, dintre care unele se folosesc și la noi în țară.

14.3.2. TEODOLITE DE ÎNALTĂ PRECIZIE

Teodolitele utilizate în rețelele de triangulație de ordinele I și II sînt denumite teodolite de *înaltă precizie*, fiind caracterizate prin parametri de precizie foarte ridicați: puterea de mărire a lunetei poate fi în general modificată de la 30 × pînă la 80 × prin schimbarea ocularelor; datorită diametrelor mari pe care le au cercurile, cea mai mică diviziune pe micrometru ajunge pînă la 0'', 1 (*Wild T4*) etc., așa cum rezultă și din tabelul 14-2.

Unele teodolite din această categorie (*Wild T4, Zeiss Theo 003* ș.a.), deși au o mare stabilitate, și asigură o precizie deosebit de ridicată a determinărilor, s-au folosit mai puțin în lucrările curente de triangulație, deoa-

Tabelul 14–1

Denumirea teodolitului	Firma producătoare	Luneta				Diametrul cercurilor [mm]		Cea mai mică diviziune pe micrometru	Sensibilitatea nivelei torice de cală ["]	Sensibilitatea nivelei torice a cercului vertical ["]	Masa [kg]	Observații
		Puterea de mărire	Diametrul obiectivului [mm]	Lungimea [mm]	Distanța minimă de vizare [m]	Orizontal	Vertical					
T 2	*Wild*	28	40	150	1,5	90	70	1'' [2cc]	20	30	5,6	Modelul nou are index automat la cercul vertical
DKM 2	*Kern*	30	45	170	1,7	75	70	1'' [2cc]	20	20	3,6	–
TH 2	*Opton*	30	40	155	2,4	100	85	1'' [1cc]	20	–	5,2	Index automat la cercul vertical
THEO 010	*Zeiss-Jena*	31	53	135	2,0	84	60	1'' [2cc]	20	20	5,3	Luneta cu lentile oglinzi
THEO 010 A	*Zeiss-Jena*	30	40	177	1,5	86	86	1'' [2cc]	20	–	4,5	Index automat la cercul vertical
4200	*Filotecnica Salmoiraghi*	30	40	172	2,5	90	90	1'' [2cc]	20	–	6,1	Index automat la cercul vertical
TE–B1	*MOM*	30	45	174	2,0	93	60	1''	20	20	5,5	–

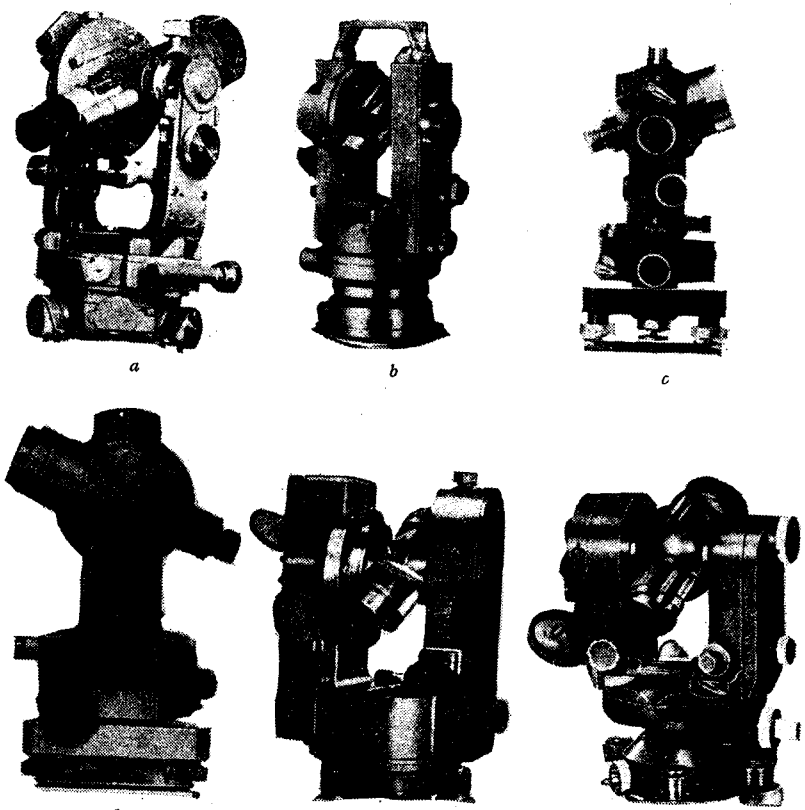


Fig. 14-26. Teodolite de precizie:
a — Kern DKM 2; b — Zeiss OPTON Th 2; c — Zeiss Jena Theo 010; d — Zeiss Jena, Theo 010 A; e — Filotecnica Salmoiraghi 4200; f — MOM TE B 1.

rece sînt mai scumpe și mai greu de manipulat, transportul lor în punctele greu accesibile punînd probleme deosebite.

Astfel, multe rețele de triangulație de ordin superior au fost determinate prin utilizarea largă a teodolitelor *Wild T3, DKM 3, OT 02* ș.a., care în comparație cu celelalte tipuri menționate sînt mai ușor de manipulat, mai ieftine, asigurînd totodată și o precizie ridicată de măsurare.

Teodolitul Wild T3 este foarte asemănător în structura sa cu teodolitul *Wild T2*, descris în paragrafele anterioare, avînd însă parametri funcționali mult mai ridicați, așa cum s-a mai menționat.

Teodolitul Kern DKM 3 posedă o lunetă cotită principală (*1* — obiectiv; *2* — ocular; *3* — moleta de acționare asupra lentilei de focusare) și o lunetă secundară, folosită pentru vizări aproximative. Lecturile la cercuri se efectuează în ocularul *5*, după ce în prealabil s-a realizat coincidența imaginilor diametral opuse prin acționarea tamburului *6* al micrometrului

Tabelul 14–2

Denumirea teodolitului	Firma producătoare	Luneta				Diametrul cercurilor [mm]		Cea mai mică diviziune pe micrometru	Sensibilitatea nivelei torice de cală ["]	Sensibilitatea nivelei torice a cercului vertical ["]	Masa [kg]	Observații
		Puterea de mărire	Diametrul obiectivului [mm]	Lungimea [mm]	Distanța minimă de vizare [m]	Orizontal	Vertical					
T 3	*Wild*	24; 30; 40	60	265	3,6	135	90	0″,2 [1cc]	7	13	11,2	—
DKM 3	*Kern*	27; 45	72	140	19,0	100	100	0″,5 [0cc,5]	10	10	12,2	Luneta cu lentile oglinzi
T 4	*Wild*	70	60	—	70	240	135	0″,1	1	2	50,0	Luneta cotită
OT 02	*U.R.S.S.*	24; 30; 40	60	265	5,0	135	90	0″,2	7	12	11,0	—
THEO 003	*Zeiss-Jena*	37,5; 58; 75	65	—	8	250	200	0″,2	10	—	60,0	Luneta cotită; index automat la cercul vertical

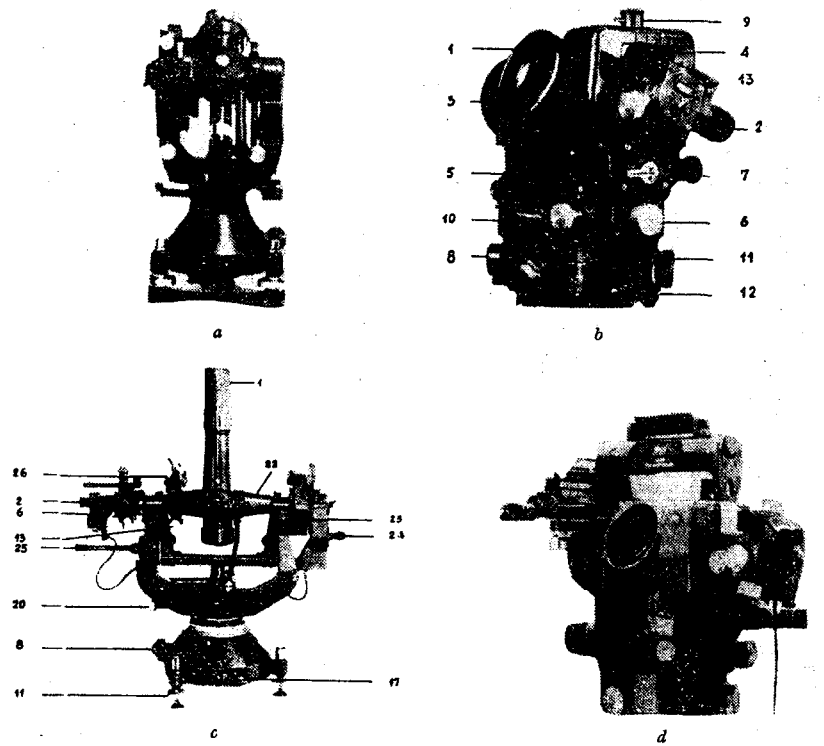


Fig. 14-27. Teodolite de înaltă precizie:
a — Wild T 3; b — Kern DKM 3; c — Wild T 4; d — Kern DKM 3 A.

optic. Pîrghia *7* folosește pentru dirijarea razelor de la cercul orizontal sau vertical. Rotirea independentă a cercului orizontal se realizează cu șurubul *8* prevăzut cu capac protector. Ca la toate teodolitele *Kern*, instrumentul este adus în poziție corectă de lucru prin sistemul de orizontalizare specific (șuruburile *11*). Priza *12* la sursa de curent, nivela torică a cercului vertical *9*, acționată de șurubul *10*, clema *13* pentru axa secundară au fost menționate în paragrafele anterioare. Modelul perfecționat *Kern DKM 3A* (fig. 14-27, *d*) este utilizat în determinările astronomo-geodezice.

Teodolitul Wild T4 reprezintă nivelul ultim pe care l-au atins instrumentele folosite la măsurările unghiulare în rețelele de triangulație de ordinul I (în special în rețelele de dezvoltare a bazelor). Datorită posibilității de citire directă a 0″, 1, precum și anexelor sale, teodolitul *Wild T4* este folosit și la măsurările astronomice. Față de notațiile anterioare s-au mai folosit: *22* — axa secundară, *23* — cercul vertical, *24*, *25* — ocularele pentru lecturi la cercul vertical, respectiv orizontal, *26* — nivelă *Horrebow*, utilizată în măsurări astronomice. Este de menționat că lecturile la cele două cercuri se fac la oculare diferite, după acționarea micrometrelor optice respective.

14.4. ERORILE TEODOLITELOR

Teodolitele moderne sînt astfel construite încît erorile instrumentale sînt, în general, mici, deci se poate admite că pătratul sau produsul lor este neglijabil. În acest fel relaţiile (9-3), (9-10) — (9-12) se particularizează ca pentru cazul mărimilor independente. Prin urmare, ipoteza existenţei unor erori instrumentale mici conduce la afirmarea caracterului lor de independenţă şi implicit la posibilitatea studierii separate a influenţelor pe care aceste erori le au asupra observaţiilor unghiulare.

Pentru a asigura ipoteza erorilor instrumentale mici este necesară verificarea şi rectificarea teodolitelor atît în condiţii de laborator (în perioadele dintre campaniile de teren), cît şi operativ, în teren. În plus, se disting următoarele posibilităţi de acţiune în scopul micşorării influenţelor erorilor instrumentale asupra rezultatelor măsurărilor:

— se aplică un asemenea procedeu de lucru încît anumite erori pot fi considerate, practic, eliminate (erorile de excentricitate, de poziţie a axelor teodolitului);

— se determină mărimea erorii instrumentale cu care se corectează rezultatul măsurării (eroarea de run, erorile de diviziune şi, respectiv, erorile datorită antrenării cercului orizontal).

Pentru anumite scopuri se poate presupune că unele erori instrumentale sînt într-o asemenea măsură eliminate încît pot fi neglijate (de exemplu, erorile de diviziune a cercului orizontal, pentru măsurările azimutale în triangulaţia de ordin inferior).

Trebuie menţionat că unele erori ale teodolitelor sînt cunoscute studenţilor secţiei de geodezie de la *cursurile de topografie* şi respectiv *astronomie geodezică*, astfel încît aici vor fi doar menţionate (în scopul asigurării continuităţii expunerii, precum şi al legăturii cu celelalte erori specifice teodolitelor de precizie şi înaltă precizie care se vor examina mai detaliat).

Anumite erori instrumentale (verificarea calităţilor optice ale teodolitului, perpendicularitatea dintre axa principală şi cercul orizontal etc.) pot fi puse în evidenţă, prin metode speciale, în laborator, şi eliminate de către tehnicieni cu înaltă calificare în optică şi mecanică fină.

Păstrarea parametrilor funcţionali, cu care aparatul părăseşte uzina constructoare, depinde în mare măsură de condiţiile în care acesta este depozitat, transportat şi manipulat. Aceste aspecte sînt, de asemenea, presupuse cunoscute de la *cursul de topografie*, de la lucrările practice şi din perioadele de practică efectuate în cadrul acestei discipline. În plus, la ridicarea teodolitelor pe semnale geodezice, se vor folosi samare speciale sau, în cazuri mai dificile, ridicarea se va efectua cu ajutorul scripeţilor.

14.4.1. ERORI DE EXCENTRICITATE

Erorile de excentricitate sînt abordate şi în cadrul *cursului de topografie*. Aici se vor examina particularităţile teodolitelor folosite în triangulaţiile geodezice (teodolite iteratoare).

Datorită imperfecţiunii operaţiunilor de montaj, centrul geometric C al cercului orizontal nu coincide cu centrul său de rotaţie R şi nici cu punctul A în care axa principală a teodolitului întîlneşte cercul gradat (fig. 14-28, *a*).

14.4.1.1. **Eroarea de excentricitate a alidadei.** În figura 14-28 s-a notat cu e eroarea de excentricitate a alidadei, în raport de centrul cercului orizontal. Pe punctul A sînt centrate dispozitivele de lectură (culegere a imaginilor) I şi J. În cazul în care $e = 0$, poziţia axei IJ este $I'J'$, astfel încît lectura α pe I', s-ar efectua în raport de originea O a gradaţiilor.

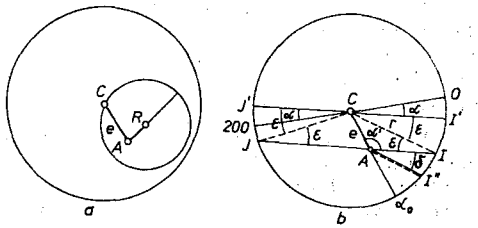


Fig. 14-28. Erorile de excentricitate, datorate montajului cercului orizontal şi alidadei.

În raport de poziţiile efective I şi J, „diametral" opuse pe cerc, se citesc prin urmare:

$$\text{în } I\text{:}\quad \alpha + \varepsilon; \qquad \text{în } J\text{:}\quad 200 + \alpha - \varepsilon.$$

Media celor două lecturi elimină deci influenţa erorii unghiulare ε, generată de existenţa erorii de excentricitate a alidadei e. De aceea în tot ce urmează a se prezenta în continuare în manual se presupune că „o citire" la unul din cercurile teodolitului este în fapt „o medie a două citiri opuse diametral pe cercul respectiv".

Se poate observa că valoarea erorii ε este funcţie de poziţia citirii pe cercul orizontal. În adevăr, în triunghiul ACI se poate scrie:

$$\frac{\sin \alpha'}{r} = \frac{\sin \varepsilon}{e}.$$

Deoarece ε este un unghi foarte mic, se poate aproxima:

$$\varepsilon^{cc} = \rho^{cc}\,(e/r)\,\sin \alpha'. \tag{14-5}$$

Pentru direcţiile perpendiculare pe segmentul CA, $\alpha' = 100^g$, respectiv $\alpha' = 300^g$, eroarea ε ia valori maxime (valori absolute):

$$\varepsilon^{cc}_{max} = \rho^{cc}\,(e/r), \tag{14-6}$$

astfel că:

$$\varepsilon^{cc}_i = \varepsilon^{cc}_{max} \cdot \sin \alpha'_i. \tag{14-7}$$

Pentru direcţii situate în prelungirea segmentului CA ($\alpha' = 0^g$ şi, respectiv, $\alpha' = 200^g$) $\varepsilon = 0$, deci se poate stabili poziţia α_0 pe cerc a prelungirii segmentului e, în raport de originea 0^g.

Observaţii. 1. Dacă punctele J, A şi I nu se află pe aceeaşi dreaptă, rezultînd un unghi δ de frîngere, fiecare direcţie măsurată va fi eronată cu o aceeaşi cantitate unghiulară (δ se menţine constant prin rotirea alidadei). Pentru un unghi (rezultat ca diferenţă a două direcţii) sau pentru măsurări executate în ambele poziţii ale lunetei, influenţa lui δ se anulează.

2. Elementele de excentricitate a alidadei (e şi α_0) se deduc (*Deumlich* 1980 ş.a.) prin determinări de laborator.

3. În mod asemănător se pot determina şi *elementele de excentricitate a cercului orizontal*, urmînd ca, în cadrul determinărilor practice, alidada să ocupe o poziţie fixă şi să se rotească cercul orizontal.

14.4.1.2. **Eroarea de excentricitate a planului de vizare azimutal.** Eroarea de excentricitate a planului de vizare azimutal rezultă atunci cînd urma axei de vizare $O\,O$ pe planul cercului orizontal nu trece prin centrul acestuia. La *cursul de topografie* se demonstrează că media lecturilor efectuate în ambele poziții ale lunetei elimină eroarea examinată.

14.4.1.3. **Eroarea de excentricitate a axei secundare.** Raționamentele de mai sus pot fi extinse și în ceea ce privește măsurările zenitale: axa secundară a teodolitului trebuie să treacă prin centrul cercului vertical. *Eroarea de excentricitate a axei secundare* se elimină prin considerarea mediei lecturilor diametral opuse pe cercul vertical.

14.4.1.4. **Eroarea de excentricitate a planului de vizare zenital.** Analog ca și la 14.4.1.2., se poate defini provenienta erorii de excentricitate a planului de vizare zenital, precum și posibilitatea eliminării influenței sale prin lecturi la cercul vertical în ambele poziții ale lunetei.

14.4.2. ERORILE DE POZIȚIE ALE AXELOR TEODOLITULUI

Studiul detaliat al metodelor de punere în evidență a erorilor de poziție ale axelor teodolitului, a metodelor de rectificare, precum și deducerea formulelor privind influența erorilor respective asupra lecturilor la cercul orizontal se realizează în cadrul *cursului de topografie*.

14.4.2.1. **Eroarea de colimație.** Eroarea de colimație rezultă din neîndeplinirea condiției de perpendicularitate dintre axa de vizare și axa secundară (de aceea se mai numește și *eroarea axei de vizare*).

Influența erorii de colimație δ_1, asupra unei lecturi la cercul orizontal este (*Ghițău* 1972, p. 146):

$$\delta_1 = \pm\, c/\sin\zeta\,, \qquad (14\text{-}8)$$

unde: c este mărimea propriu-zisă a erorii de colimație, iar ζ — unghiul zenital al vizei considerate.

În relația (14-8) semnele $\pm$ corespund celor două poziții ale lunetei (CS — cerc stînga și CD — cerc dreapta). Rezultă, prin urmare, că prin medierea citirilor la cercul orizontal, efectuate în cele două poziții ale lunetei, se elimină (pînă la anulare) influența erorii de colimație.

14.4.2.2. **Eroarea de poziție a axei secundare.** Axa secundară HH trebuie să fie perpendiculară pe axa principală VV a teodolitului, astfel ca după aducerea acesteia din urmă în poziție verticală (prin operațiunea de calaj), axa secundară să ocupe o poziție orizontală.

Influența neperpendicularității dintre cele două axe importante ale teodolitului δ_2 asupra unei citiri la cercul orizontal este (*Ghițău* 1972, p. 149):

$$\delta_2 = \pm\, i\,\mathrm{ctg}\,\zeta, \qquad (14\text{-}9)$$

unde i este eroarea de perpendicularitate propriu-zisă. Semnele $\pm$ au aceeași semnificație ca la eroarea de colimație, astfel încît rezultă că și influența erorii de poziție a axei secundare se elimină (pînă la anulare) prin lecturi la cercul orizontal efectuate în ambele poziții ale lunetei.

14.4.2.3. **Eroarea de verticalitate a axei principale.** Eroarea k de verticalitate a axei principale este reprezentată de unghiul format de către această axă cu verticala locului. Această eroare nu este în primul rînd o eroare instrumentală, ci o eroare de așezare în stație a teodolitului, datorată unei operațiuni de calaj necorespunzătoare. Totuși, deoarece calajul teodolitului se efectuează în raport de indicațiile nivelei torice de calaj, această eroare are și un caracter instrumental (determinat de sensibilitatea nivelei torice de calaj).

Ca urmare directă a acțiunii acestei erori, cercul orizontal presupus (prin construcție) perpendicular pe axa principală nu va mai ocupa o poziție corectă de lucru. Influența erorii de verticalitate a axei principale δ_3 asupra unei citiri la cercul orizontal este (*Ghițău* 1972, p. 150):

$$\delta_3 = k\,\mathrm{ctg}\,\zeta\,\sin\omega, \qquad (14\text{-}10)$$

unde k și ζ au fost definiți anterior, iar ω este unghiul diedru format de planul de viză efectiv cu planul determinat de verticala locului și axa principală a teodolitului.

După cum se observă, în expresia (14-10) nu mai intervin semnele $\pm$, ceea ce înseamnă că eroarea de verticalitate a axei principale nu se elimină prin metoda de lucru, avînd prin urmare o acțiune sistematică. De aceea, operația de calaj trebuie realizată și verificată cu cea mai mare atenție.

14.4.2.4. **Influența concomitentă a erorilor de poziție a axelor teodolitului.** Considerînd că o lectură la cercul orizontal este funcție de acțiunea simultană a celor trei erori mai sus-menționate, se dezvoltă această funcție în *serie Taylor*. Prin neglijarea termenilor de ordinul doi (potrivit cu convenția făcută la începutul acestui paragraf) se obține *formula Bessel* pentru o eroare δ, sumă a celor trei erori considerate:

$$\delta = k\,\sin\omega\,\mathrm{ctg}\,\zeta \pm i\,\mathrm{ctg}\,\zeta \pm c\,\mathrm{cosec}\,\zeta. \qquad (14\text{-}11)$$

În astronomia geodezică formula (14-11) este folosită pentru corectarea observațiilor executate numai într-o poziție a lunetei, deoarece k, i și c sînt valori determinabile, iar ω și ζ depind de poziția punctului vizat. *Trebuie remarcat că în lucrările de triangulație sînt interzise observații unghiulare într-o singură poziție a lunetei.*

Se observă că în cazul *unei vize orizontale* ($\zeta = 100^g$) influența celor trei erori este egală cu eroarea de colimație ($\delta = \pm\, c$).

Pentru studiul unor erori care se iau în considerație în cazul teodolitelor de înaltă precizie este utilă examinarea unor cazuri particulare. Astfel, în cazul în care se observă un unghi între punctele P_1 și P_2, se obține pentru poziția I a lunetei expresia erorii sumă Δ_{12} pentru cele trei erori considerate:

$$\Delta_{12} = k\,(\sin\omega_2\cdot\mathrm{ctg}\,\zeta_2 - \sin\omega_1\cdot\mathrm{ctg}\,\zeta_1) + \\ + i\,(\mathrm{ctg}\,\zeta_2 - \mathrm{ctg}\,\zeta_1) + c\,(\mathrm{cosec}\,\zeta_2 - \mathrm{cosec}\,\zeta_1). \qquad (14\text{-}12)$$

Dacă punctele considerate sînt la aceeași altitudine ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) rezultă:

$$\Delta_{12} = k\,\mathrm{ctg}\,\zeta\,(\sin\omega_2 - \sin\omega_1). \qquad (14\text{-}13)$$

O b s e r v a ț i e. Un caz particular, des folosit în operațiile de verificare și rectificare în laborator a teodolitelor, este dat de situația în care cele două puncte vizate se află exact la aceeași altitudine cu altitudinea axei secundare a teodolitului ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta = 100^g$). Se observă din formula (14-12) că, într-un asemenea caz, influența celor trei erori de poziție a axelor teodolitului *este anulată* ($\Delta_{12} = 0$), chiar dacă unghiul considerat se măsoară numai într-o singură poziție a lunetei. Eliminarea necesității măsurătorilor în cele două poziții ale lunetei mărește considerabil randamentul operațiunilor de verificări de laborator care se vor expune în 14.4.4 și 14.4.5.

Influența maximă a celor trei erori de poziție a axelor teodolitului se obține în situația punctelor vizate aflate în aliniament ($\omega_2 = \omega_1 \pm 200^g$):

$$\Delta_{max} = 2\,k\,\mathrm{ctg}\,\zeta\,\sin\omega. \qquad (14\text{-}14)$$

14.4.3. EROAREA DE ZENIT INSTRUMENTAL (EROAREA DE INDEX)

Eroarea de zenit instrumental (denumită în multe lucrări și *eroarea de index*) intervine la măsurarea unghiurilor zenitale (verticale), ca urmare a unor imperfecțiuni de montaj.

La măsurarea unghiurilor zenitale, cercul vertical se rotește solidar cu luneta, iar prisma, care preia imaginile de pe cerc, ocupă o poziție stabilă. În acest fel, toate unghiurile zenitale măsurate au o latură comună (linia care unește punctele de preluare a lecturilor diametral opuse pe cercul vertical), celelalte laturi fiind determinate de pozițiile axei de vizare.

Pentru teodolitele de tip *Wild*, la care prisma transmițătoare de imagini de la cercul vertical ocupă o poziție verticală (cu o anumită eroare), rezultă că la determinarea oricărui unghi zenital pot interveni următoarele două erori:

— eroarea τ_1 de necoincidență între axa de vizare și linia care unește gradațiile 0^g — 200^g de pe cercul vertical;

— eroarea τ_2 de neperpendicularitate dintre axa nivelei torice a cercului vertical și linia care unește punctele de preluare a lecturilor diametral opuse pe cercul vertical.

Suma τ a acestor două erori este cunoscută sub denumirea de eroare de zenit instrumental (eroare de index):

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \qquad (14\text{-}15)$$

În figura 14-29, *a* s-a presupus că punctul P este vizat în poziția I a lunetei. Cu ζ s-a notat unghiul zenital care ar trebui măsurat și cu a_I valoarea efectivă, măsurată. Rezultă, grafic:

$$\zeta = a_I - (\tau_1 + \tau_2). \qquad (14\text{-}16)$$

În poziția a II-a a lunetei (fig. 14-29, *b*) se obține în schimb:

$$\zeta = 400 - a_{II} + (\tau_1 + \tau_2). \qquad (14\text{-}17)$$

Media acestor două valori nu mai este afectată de erorile τ_1 și τ_2:

$$\zeta = \frac{a_I + (400^G - a_{II})}{2}, \qquad (14\text{-}18)$$

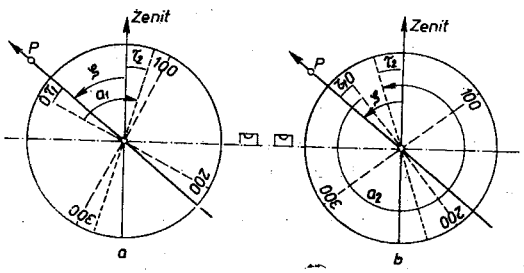


Fig. 14-29. Eroarea de zenit instrumental.

rezultînd că eroarea de zenit instrumental se elimină prin media citirilor la cercul vertical în cele două poziții ale lunetei.

Condiția necesară pentru aceasta este ca τ_2 să se mențină constant în pozițiile I și a II-a ale lunetei. Acest lucru se realizează prin aducerea în coincidență a imaginilor bulei nivelei torice, înainte de a se efectua lecturile a_I și a_{II}, sau în mod automat la teodolitele de construcție mai nouă (fig. 14-10, *a*) prevăzute cu dispozitive speciale.

Din relațiile (14-16) și (14-17) se obține:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{a_I + a_{II}}{2} - 200^g$$

și în continuare:

$$(a_I + a_{II}) - 400^g = 2\tau. \qquad (14\text{-}19)$$

Rezultă că suma lecturilor a_I și a_{II} diferă în raport de 400^g prin *dublul erorii de zenit instrumental*, trebuind să rămînă constantă pentru observațiile efectuate spre diverse puncte cu un același teodolit (control). În practică se întrebuințează în plus și următoarea formulă de control pentru determinarea „locului zenitului" L_z:

$$L_z = \frac{(a_I + 400^g) + a_{II}}{2} = \text{constant}. \qquad (14\text{-}20)$$

Rectificarea unui teodolit de tip *Wild T2* de construcție veche de eroarea de zenit instrumental poate fi efectuată în felul următor:

— se citesc unghiurile a_{II} și a_I în cele două poziții ale lunetei, determinîndu-se valoarea corectă cu formula (14-18);

— se introduc minutele și secundele de la valoarea corectă pe tamburul micrometrului optic;

— se restabilește coincidența imaginilor lecturilor diametral opuse pe cerc cu ajutorul șurubului micrometric de reglare a nivelei cercului vertical;

— se readuc în coincidență imaginile capetelor bulei nivelei cercului vertical, prin acționarea șuruburilor de rectificare ale nivelei.

Operațiunea trebuie repetată, pentru verificare.

14.4.4. EROAREA DE RUN

Unui număr întreg de rotiri complete ale tamburului micrometrului optic îi corespunde o diviziune întreagă pe cercul gradat. Diferența care rezultă este numită *eroarea de run* și provine din imperfecțiuni ale microscopului și mediilor optice folosite la transmiterea lecturilor pe cerc. Rectificările corespunzătoare sînt posibile doar în ateliere specializate, iar corecțiile Δ_a calculate după relația (14-21) se iau în considerație numai pentru observațiile din triangulația de ordinul I:

$$\Delta_a = \frac{r}{i}\,a, \qquad (14\text{-}21)$$

în care:

a este partea de lectură efectuată pe scara micrometrului;

i — mărimea totală a intervalului micrometrului;

r — corecția de run totală, pentru întregul interval i, rezultată din media unor multiple determinări [vezi relația (14-22)].

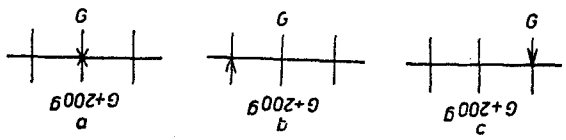


Fig. 14-30. Eroarea de run.

Determinările corecției de run se fac pentru mai multe poziții ale alidadei (se iau în general intervale de aproximativ 25^g, care diferă între ele și prin fracțiuni de grad, în scopul eliminării influenței erorilor de diviziune a cercului și pentru așa-numitele gradații „scurte").

Pentru fiecare poziție k a alidadei, se efectuează următoarele două determinări:

— se așază scara micrometrului la zero și se realizează cu șurubul de mișcare fină a alidadei coincidența imaginilor gradațiilor G și $G + 200^g$, diametral opuse pe cerc (fig. 14-30, *a*). Se realizează apoi, prin manevrarea tamburului micrometrului optic, coincidența dintre gradațiile $G - i$ și $G + 200^g$ (fig. 14-30, *b*). Diferența pînă la mărimea totală i constituie o primă valoare r'_k a corecției de run;

— cealaltă determinare r''_k decurge analog, făcîndu-se însă în etapa finală coincidența dintre gradațiile G și $G + 200^g - i$ (fig. 14-30, *c*).

Corecția totală de run rezultă din media aritmetică a tuturor determinărilor:

$$r = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (r'_k + r''_k). \qquad (14\text{-}22)$$

14.4.5. EROAREA DE ANTRENARE A CERCULUI ORIZONTAL

Datorită unui contact (nedorit) existent între alidadă și cercul orizontal, poate avea loc o deplasare (extrem de mică) a cercului gradat, atunci cînd se rotește alidada teodolitului. Aceasta echivalează cu schimbarea (cu cantități infinit mici) poziției originii cercului, în sensul de rotație a alidadei.

Eroarea de antrenare a cercului orizontal are un caracter sistematic și este în general foarte mică, datorită perfecționărilor aduse construcției teodolitelor moderne. Acțiunea sa poate fi micșorată prin rotiri repetate „în gol" ale alidadei teodolitului, înainte de începerea observațiilor propriu-zise.

Mărimea acestei erori poate fi obținută din determinări de laborator, presupunîndu-se că celelalte erori, studiate anterior, sînt eliminate prin metoda de lucru. Pentru aceasta se fac determinări unghiulare repetate pe două puncte A și B (fig. 14-31) situate la înălțimea instrumentului ($\zeta_A = \zeta_B = 100^g$). Potrivit cu remarca din 14.4.2.4, în asemenea situații, erorile de poziție ale axelor teodolitului rămîn fără influență, chiar dacă măsurătorile unghiulare se fac numai într-o singură poziție a lunetei. Deoarece determinarea erorii de antrenare a cercului orizontal se face numai pentru teodolitele de înaltă precizie se presupune că citirile se vor corecta și de influența erorii de run cu formula (14-21).

Se notează cu γ mărimea unghiului cu care se deplasează originea cercului orizontal, atunci cînd alidada capătă o rotire completă, de 400^g.

Programul de lucru cuprinde mai multe determinări, în diverse poziții ale cercului orizontal (de exemplu, la intervale de 5^g). Pentru fiecare determinare se fac două măsurători.

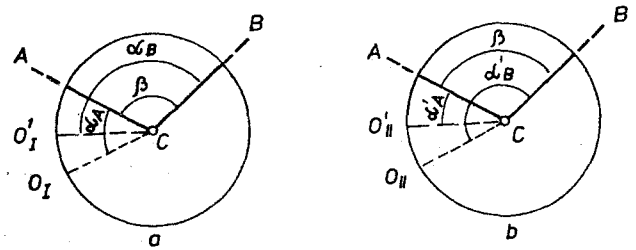


Fig. 14-31. Eroarea de antrenare a cercului orizontal.

În măsurătoarea I (fig. 14-31, *a*) se observă punctul A cu originea situată în poziția O_I. Datorită antrenării cercului orizontal, cînd se efectuează citirea α_B, originea se deplasează în O'_I.

Unghiul β dintre A și B va fi obținut prin urmare cu relația:

$$\beta = (\alpha_B + O_I O'_I) - \alpha_A. \qquad (14\text{-}23)$$

Acceptînd o variație liniară a erorii de antrenare a cercului orizontal în funcție de unghiul măsurat:

$$O_I O'_I = \frac{\gamma}{400^g} \beta^g, \qquad (14\text{-}24)$$

rezultă pentru această primă măsurătoare:

$$\beta = \beta_I + \frac{\gamma}{400^g} \beta^g, \qquad (14\text{-}25)$$

unde:

$$\beta_I = \alpha_B - \alpha_A, \qquad (14\text{-}26)$$

iar β^g este o valoare aproximativă a unghiului măsurat.

În cealaltă măsurătoare se vizează inițial punctul B (lectura α'_B în raport de originea O_{II}) și apoi punctul A (lectura α'_A, în raport de originea O'_{II}), prin rotirea alidadei tot în sens orar.

Analog ca în cazul precedent se obține:

$$\beta = \beta_{II} - \gamma \left(1 - \frac{\beta^g}{400^g}\right), \qquad (14\text{-}27)$$

unde:

$$\beta_{II} = \alpha'_B - \alpha'_A. \qquad (14\text{-}28)$$

Se observă că media celor două valori ale unghiului β, din relațiile (14-25) și (14-27), nu elimină influența erorii de antrenare a cercului orizontal:

$$\beta = \frac{\beta_I + \beta_{II}}{2} + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\beta^g}{200^g} - 1\right). \qquad (14\text{-}26)$$

Un rezultat asemănător s-ar fi obținut și în cazul în care măsurătoarea a doua s-ar fi efectuat prin rotirea alidadei în sens antiorar.

Din diferența relațiilor (14-27) și (14-25) rezultă eroarea de antrenare a cercului orizontal:

$$\gamma = \beta_{II} - \beta_I , \qquad (14\text{-}27)$$

ca diferență a celor două măsurători.

Observație. Condiția necesară ca eroarea de antrenare a cercului orizontal să poată fi determinată cu relația (14-27) este ca cele două măsurători să fie efectuate în același sens de rotație a alidadei.

Analog se va proceda în cadrul tuturor determinărilor, în celelalte poziții ale cercului orizontal, rezultatul urmărit fiind reprezentat de media artimetică a tuturor valorilor obținute cu relația (14-27). Prin acest mod de lucru se diminuează simțitor și influențele erorilor de diviziune a cercului orizontal, chiar dacă scopul direct urmărit aici nu a fost acesta.

Odată fiind cunoscută eroarea de antrenare a cercului orizontal γ, observațiile unghiulare efectuate cu teodolite de înaltă precizie se corectează, la cabinet, cu formula (14-26).

14.4.6. ERORILE DE DIVIZIUNE A CERCULUI ORIZONTAL

Deși metodele folosite pentru înregistrarea diviziunilor pe cercurile gradate au cunoscut perfecționări remarcabile, totuși, operațiunea este însoțită de erori, a căror influență este luată în considerație la efectuarea observațiilor azimutale de precizie, în triangulația de ordinul I. Erorile de diviziune a cercurilor verticale nu sînt, în general, examinate deoarece sînt mult mai mici decît erorile provocate de necunoașterea exactă a refracției atmosferice.

Se cunosc mai multe metode de determinare a erorilor de diviziune a cercului orizontal.

Dintre acestea, procedeul elaborat de *H.J. Heuvelink* în anul 1913 oferă rezultate de precizie superioară, fiind întrebuințat pe scară largă, desigur cu anumite completări și perfecționări.

Se măsoară un unghi de control β în t poziții ale cercului orizontal (de obicei la intervale de 5^0 și respectiv 5^g, astfel încît $t = 36$ și respectiv 40), pentru fiecare poziție executîndu-se două serii complete de măsurători. Observațiile se execută în laborator, în condiții constante de temperatură, umiditate și densitate a aerului din încăpere. Pentru siguranța păstrării acestor condiții de lucru, măsurătorile se împart în mai multe grupe: I, II, ... υ (de regulă $\upsilon = 4$). Rezultă astfel următoarea desfășurare a originilor pentru întregul program de lucru:

Grupa I:	0^g, 20, 40, 60, ..., 180.
Grupa II:	5^g, 25, 45, 65, ..., 185.
Grupa III:	10^g, 30, 50, 70, ..., 190.
Grupa IV:	15^g, 35, 55, 75, ..., 195.

Se notează cu t' numărul de poziții ale cercului orizontal în interiorul fiecărei grupe. În condițiile acceptate pînă în prezent rezultă:

$$t = 4t', \qquad (14\text{-}28)$$

În interiorul fiecărei grupe se acceptă constanța unghiului β, de la o grupă la alta putînd exista însă și mici abateri, nedorite, în poziția teodolitului sau a colimatoarelor. Mărimile probabile (compensate) ale unghiului β în interiorul grupelor de măsurători vor fi notate β_I, β_{II}, β_{III}, β_{IV}, constituind necunoscute ale modelului funcțional.

Cele două puncte vizate (colimatoarele) se află la aceeași altitudine cu teodolitul care trebuie examinat ($\zeta_1 = \zeta_2 = 100^g$), astfel încît se poate lucra numai în poziția I a lunetei (v. observația din 14.4.2.4).

Într-o poziție φ oarecare a cercului orizontal se execută, de obicei, două serii de măsurători ale unghiului β, după principiul „dus-întors". Notînd cu α_s, α_d citirile pe colimatorul din stînga și respectiv pe cel din dreapta, se poate scrie:

Seria 1	dus	$\alpha_d^{(1)} - \alpha_s^{(1)} = \beta_\varphi^{(1)}$;	$d_\varphi^{(1)} = \beta_\varphi^{(2)} - \beta_\varphi^{(1)}$;
	întors	$\alpha_d^{(2)} - \alpha_s^{(2)} = \beta_\varphi^{(2)}$;	
Seria 2	dus	$\alpha_d^{(3)} - \alpha_s^{(3)} = \beta_\varphi^{(3)}$;	$d_\varphi^{(2)} = \beta_\varphi^{(4)} - \beta_\varphi^{(3)}$;
	întors	$\alpha_d^{(4)} - \alpha_s^{(4)} = \beta_\varphi^{(4)}$;	

(14-29)

$$\beta_\varphi = 1/4\,(\beta_\varphi^{(1)} + \beta_\varphi^{(2)} + \beta_\varphi^{(3)} + \beta_\varphi^{(4)}).$$
$$\varphi = 1,2 \ldots, t$$

Observație. De menționat că prin programul de observații adoptat, alidada este rotită de fiecare dată cu aceeași valoare, egală cu unghiul β. Prin urmare, influența erorii de antrenare a cercului orizontal este, de asemenea, constantă. Deoarece măsurătorile sînt executate „dus-întors", influența are nu numai aceeași valoare, ci și același semn.

Ca urmare, diferențele d_φ nu sînt afectate de eroarea de antrenare a cercului orizontal. Mai mult, prin faptul că măsurătorile perechi sînt referite la aceleași gradații, rezultă că aceste diferențe nu sînt afectate nici de erorile de diviziune a cercului.

Procedeul *Heuvelink* introduce ipoteza existenței unei periodicități în distribuția erorilor de diviziune a cercului.

Corecția corespondentă $\Delta\varphi$ pentru o lectură pe cerc la diviziunea φ este exprimată sub forma unei serii *Fourier* în termeni pari. Nu pot fi luați în considerație și termeni impari deoarece fiecare măsurătoare rezultă din media *a două lecturi* diametral opuse pe cerc:

$$\Delta\varphi = a \sin (2\varphi + A) + b \sin (4\varphi + B) + c \sin (6\varphi + C) + \ldots . \qquad (14\text{-}30)$$

În interiorul fiecărei grupe de măsurători, valoarea compensată a unghiului β se va obține prin urmare cu formula:

$$\beta_\varphi + v_\varphi + (\Delta\varphi_d - \Delta\varphi_s) = \beta_j, \qquad (14\text{-}31)$$
$$j = \text{I}, \ldots, \text{IV}.$$

Pentru simplificarea scrierii se notează $\varphi_s = \varphi$, astfel că:

$$\varphi_d = \varphi + \beta. \qquad (14\text{-}32)$$

Din relațiile (14-31) și (14-30) rezultă forma generală a ecuațiilor corecțiilor:

$$v_\varphi = a \sin (2\varphi + A) - a \sin (2\varphi + 2\beta + A) +$$
$$+ b \sin (4\varphi + B) - b \sin (4\varphi + 4\beta + B) +$$
$$+ c \sin (6\varphi + C) - c \sin (6\varphi + 6\beta + C) + \ldots + \beta_j - \beta_\varphi . \qquad (14\text{-}33)$$

Necunoscutele cu care este descris modelul funcțional general sînt prin urmare: a, b, c, ...; A, B, C, ... și β_I, ..., β_{IV}.

Forma curentă de lucru a ecuațiilor corecțiilor rezultă din transformări simple ale relației (14-33) rezultînd:

$$v_\varphi = x_1 \cos 2\varphi + x_2 \cos 4\varphi + x_3 \cos 6\varphi + \ldots + \\ + y_1 \sin 2\varphi + y_2 \sin 4\varphi + y_3 \sin 6\varphi + \ldots + z_j + l_\varphi , \qquad (14\text{-}34)$$

unde:

$$x_1 = -2a \sin\beta \cos(\beta + A); \qquad y_1 = 2a \sin\beta \sin(\beta + A);$$
$$x_2 = -2b \sin 2\beta \cos(2\beta + B); \qquad y_2 = 2b \sin 2\beta \sin(2\beta + B); \qquad (14\text{-}35)$$
$$x_3 = -2c \sin 3\beta \cos(3\beta + C); \qquad y_3 = 2c \sin 3\beta \sin(3\beta + C).$$

De asemenea în (14-34) s-au mai notat:

$$\beta_j = \beta^0 + z_j; \\ l_\varphi = \beta^0 - \beta_\varphi , \qquad (14\text{-}36)$$

unde β^0 este o valoare provizorie a unghiului β, astfel încît termenul liber l_φ este calculabil. Prin urmare, modelul funcțional este descris acum prin intermediul necunoscutelor $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, z_4$. Necunoscutele inițiale, care intervin în relația (14-30), se pot deduce la terminarea prelucrării cu relațiile:

$$\operatorname{tg}(A + \beta) = -y_1/x_1; \quad \operatorname{tg}(B + 2\beta) = -y_2/x_2; \quad \operatorname{tg}(C + 3\beta) = -y_3/x_3;$$
$$a = -x_1/2 \sin\beta \cos(\beta + A) = y_1/2 \sin\beta \sin(\beta + A);$$
$$b = -x_2/2 \sin 2\beta \cos(2\beta + B) = y_2/2 \sin 2\beta \sin(2\beta + B); \qquad (14\text{-}37)$$
$$c = -x_3/2 \sin 3\beta \cos(3\beta + C) = y_3/2 \sin 3\beta \sin(3\beta + C).$$

Prelucrarea riguroasă se poate desfășura în continuare după algoritmul de calcul descris în 9.2. Există însă o cale directă de obținere a necunoscutelor problemei, prezentată pe larg în literatura de specialitate:

$$\beta_I = \frac{[\beta]_I}{t'}; \quad \ldots; \quad \beta_{IV} = \frac{[\beta]_{IV}}{t'}, \qquad (14\text{-}38)$$

unde cu $[\beta]_j$ (j = I, ..., IV) s-a notat suma tuturor unghiurilor β_φ aferente grupei j. În acest fel, în ipoteza măsurătorilor de aceeași precizie, luată în considerare la începutul rezolvării, necunoscutele β_j se determină ca medii aritmetice ale tuturor determinărilor efectuate în grupa j. Celelalte necunoscute ale problemei se pot determina, de asemenea, direct cu următoarele relații:

$$x_1 = 2\,[(\beta_\varphi - \beta_j) \cos 2\varphi]/t; \qquad y_1 = 2\,[(\beta_\varphi - \beta_j) \sin 2\varphi]/t;$$
$$x_2 = 2\,[(\beta_\varphi - \beta_j) \cos 4\varphi]/t; \qquad y_2 = 2\,[(\beta_\varphi - \beta_j) \sin 4\varphi]/t; \qquad (14\text{-}39)$$
$$x_3 = 2\,[(\beta_\varphi - \beta_j) \cos 6\varphi]/t; \qquad y_3 = 2\,[(\beta_\varphi - \beta_j) \sin 6\varphi]/t.$$

În relațiile (14-39) și în cele care urmează, parantezele drepte au semnificația unor sume (notații *Gauss*), la fel ca și în relațiile (14-38).

Evaluarea preciziei

● *Eroarea medie* s_0 *a unui unghi măsurat* $\beta_\varphi^{(i)}$ se calculează cu relația (9-52) particularizată la situația de față (măsurători de aceeași precizie):

$$s_0 = s_\beta = \sqrt{\frac{[vv]}{n - u}}. \qquad (14\text{-}40)$$

În cazul concret examinat $n = t$; $u = 10$. Atunci cînd se efectuează o rezolvare directă, $[vv]$ se poate determina cu relația:

$$[vv] = [(\beta_\varphi - \beta_j)^2] - \{t\,([x^2] + [y^2])/2\}. \qquad (14\text{-}41)$$

● *Erorile necunoscutelor* se determină cu relațiile:

$$s_a = k/\sin\beta; \quad s_b = k/\sin 2\beta; \quad s_c = k/\sin 3\beta;$$
$$s_A = \rho^{cc} s_a/a; \quad s_B = \rho^{cc} s_b/b; \quad s_C = \rho^{cc} s_c/c, \qquad (14\text{-}42)$$

unde:

$$k = s_0/\sqrt{2t}. \qquad (14\text{-}43)$$

● *Eroarea sistematică medie de diviziune a cercului orizontal* notată μ:

$$\mu = \sqrt{s_a^2 + s_b^2 + s_c^2}. \qquad (14\text{-}44)$$

● *Eroarea întîmplătoare medie de diviziune a cercului orizontal* notată τ (referitoare de fapt la două diviziuni diametral opuse pe cercul orizontal):

$$\tau = \sqrt{(s_0^2/2) - (\delta^2/4)}. \qquad (14\text{-}45)$$

● În relația (14-45) δ reprezintă *eroarea de măsurare a unei direcții*, în care nu intervin influențele erorilor de antrenare a cercului orizontal și respectiv erorile de diviziune a acestuia. După cum s-a menționat în nota de la începutul paragrafului, diferențele d, calculate cu relațiile (14-29) nu cuprind aceste influențe. De aceea δ se calculează cu o formulă similară cu cea care se va demonstra în 15.3.2.2. cu particularizările următoare: în fiecare poziție φ s-au efectuat patru măsurători și s-au determinat două diferențe d. Rezultă astfel:

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum [dd]_\nu - \frac{1}{2t'}\sum [d]_\nu^2}{2t - \nu}}. \qquad (14\text{-}46)$$

O b s e r v a ț i i. 1. Dacă întîmplător $l \cdot \beta = 200^g$, rezultă $\sin l\beta = 0$ și, în consecință, necunoscutele $x_j = y_j = 0$, iar erorile individuale corespondente din (14-42) vor avea valori infinite. O asemenea situație apare în cazul unghiului $\beta = 50^g$: termenii de ordinul 4 nu pot fi determinați.

2. Toate citirile trebuie corectate, în prealabil, de eroarea de run.

3. Se poate lucra concomitent pe mai multe colimatoare, ceea ce schimbă desigur complet programul de observații și procedeul de prelucrare (*Roelofs* recomandă dispunerea colimatoarelor la 0^g, 15^g, 37^g, 90^g).

4. În figura 14-31 se prezintă grafic rezultatul exemplificării prof. *Wolf* (1968, pag. 469):

$A = 153^g$; $B = 107^g$; $C = 225^g$; $a = +0^{cc},045$; $b = -0^{cc},089$; $c = +0^{cc},190$;

$s_A = \pm 132^g$; $s_B = \pm 48^g$; $s_C = \pm 32^g$; $s_a = \pm 0^{cc},095$; $s_b = \pm 0^{cc},067$;

$s_c = \pm 0^{cc},095$; $s_0 = \pm 0^{cc},60$; $\delta = \pm 0^{cc},33$; $\mu = \pm 0^{cc},15$; $\tau = \pm 0^{cc},40$.

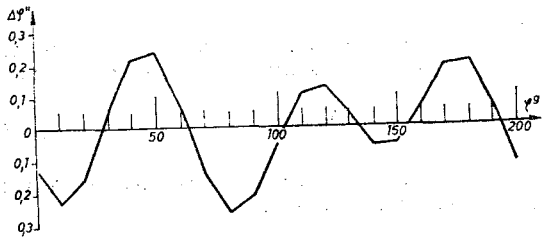


Fig. 14-32. Curba corecțiilor diviziunilor cercului orizontal.

5. Pentru o lectură oarecare pe cercul orizontal, corecția $\Delta\varphi$ se poate extrage de pe graficul specific teodolitului utilizat (de tipul celui prezentat în figura 14-32).

6. În cazul teodolitelor de precizie, unde erorile de măsurare depășesc erorile de diviziune a cercului, o cercetare similară cu cea prezentată mai înainte nu are sens. De aceea, pentru diminuarea influenței erorilor de diviziune a cercului orizontal, se prevăd în programul de observații mai multe determinări (serii), fiecare dintre acestea începînd cu o origine diferită. Ca urmare, lecturile din fiecare serie sînt afectate *în mod sistematic* cu eroarea corespondentă originii seriei respective. Deoarece erorile de diviziune au un caracter periodic, semnul și valoarea erorilor sistematice menționate diferă de la o serie la alta, astfel încît prin mediereа rezultatelor se poate realiza o diminuare a influenței erorilor de diviziune. Desigur, această măsură se ia și în cazul observațiilor efectuate cu teodolite de înaltă precizie, chiar și atunci cînd măsurătorile urmează a fi corectate cu o formulă de tipul (14-30).

Capitolul 15
OBSERVAȚII UNGHIULARE AZIMUTALE ÎN REȚELELE GEODEZICE

În cadrul rețelelor geodezice se utilizează metode de *măsurare a direcțiilor* (atunci cînd se folosește o direcție de referință, comună pentru toate măsurătorile) și metode de *măsurare a unghiurilor* (atunci cînd măsurătorile sînt grupate două cîte două, de fiecare dată direcția de referință fiind aleasă direcția din stînga). Deși în cadrul ultimelor metode, unghiurile măsurate sînt formate de două direcții, se poate admite că fiecare cuplu formează o unitate distinctă, independentă, deoarece direcțiile comune unghiurilor învecinate sînt măsurate separat.

Dintre metodele cunoscute de observații unghiulare azimutale, în manual se vor prezenta și examina în detaliu metodele care sînt folosite la noi în țară, potrivit instrucțiunilor în vigoare, pentru realizarea rețelelor geodezice de stat:

— metoda seriilor complete;

— metoda *Schreiber*.

Aceste metode se folosesc și în cadrul altor lucrări geodezice: rețele geodezice cu caracter local, lucrări combinate de triangulație—trilaterație ș.a.

Înainte de a aborda tratarea metodelor propriu-zise de observații unghiulare, este necesară examinarea *refracției atmosferice terestre* (care are loc în *troposferă* și în primele straturi ale *stratosferei*, deci în total pînă la 10—11 km),

care îndeplinește un rol de prim ordin, atît pentru măsurătorile zenitale, cît și pentru cele azimutale. Cealaltă componentă a refracției atmosferice, și anume *refracția atmosferică astronomică*, depășește obiectul cursului de față.

15.1. REFRACȚIA ATMOSFERICA TERESTRĂ

Refracția atmosferică terestră depinde de proprietățile fizice ale atmosferei și de starea solului, între care există de fapt o dependență reciprocă. Atmosfera este compusă dintr-un amestec de gaze (în condiții normale de temperatură, $t_0 = 0°C$, și presiune, $p_0 = 760$ mm Hg, există următoarea proporție a elementelor componente principale: azot 78,09%, oxigen 20,95%, argon 0,93%, anhidridă carbonică circa 0,03%, hidrogen $5 \cdot 10^{-5}$%, alte gaze circa $2 \cdot 10^{-3}$%), vapori de apă, impurități (praf, fum, în special în primele straturi), a căror răspîndire este neuniformă. Pentru definirea proprietăților fizice ale atmosferei, s-au făcut în decursul timpurilor diverse ipoteze, prin care s-au stabilit anumite relații între temperatura t, presiunea p, densitatea Δ și altitudinea H, rezultînd teorii (uneori diferite, contradictorii) cu privire la refracția atmosferică.

Se prezintă în continuare aspectele strict necesare pentru deducerea unor concluzii în ceea ce privește perioada optimă în care se pot executa măsurările unghiulare de precizie superioară, precum și a unor formule de calcul (în special pentru observațiile zenitale).

Se acceptă modelul de atmosferă terestră cu straturi plane și paralele. În aceste straturi, refracția are loc după legile descoperite de *Snellius* și *Descartes*:

— normala la suprafața de separare a două medii omogene transparente, diferite în punctul de incidență, se află în același plan cu raza incidentă și cea refractată (fig. 15-1);

— raportul dintre sinusul unghiului de incidență i și sinusul unghiului de refracție r este o mărime constantă pentru două medii date:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{\Delta n}{n}, \qquad (15\text{-}1)$$

unde n_1 și n_2 sînt indicii de refracție absoluți ai primului și respectiv ai celui de-al doilea mediu. Indicii de refracție ai straturilor atmosferice descresc cu înălțimea, tinzînd spre valoarea 1 pentru straturile superioare ale atmosferei. Ca urmare, $i_2 = r_1 < i_1$, iar raza luminoasă care pornește dintr-un punct oarecare P_1 spre un alt punct P_2 capătă o concavitate către sol. În acest fel, refracția atmosferică are ca efect ridicarea aparentă a punctului vizat. Acest fenomen a fost observat încă în secolul I e.n. de către *Cleomedes* („Soarele va fi văzut din cauza refracției, cînd în realitate el se află sub orizont") și *Ptolemeu* secolul II e.n. („Distanța zenitală măsurată a unei stele este mai mică decît cea adevărată").

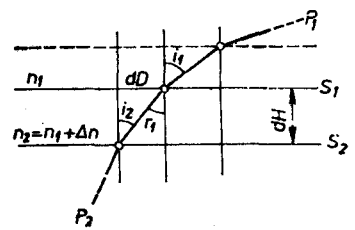


Fig. 15-1. Refracția razelor de lumină în ipoteza straturilor plane și paralele ale atmosferei.

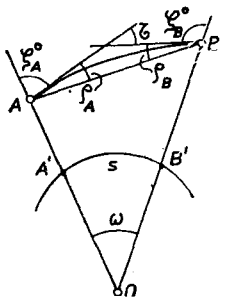


Fig. 15-2. Refracția terestră verticală.

15.1.1. REFRACȚIA ATMOSFERICĂ TERESTRĂ VERTICALĂ

În ipoteza că între două puncte A și B există un număr infinit de straturi atmosferice, linia frîntă din figura 15-1, care reprezintă traseul razei de lumină, care pleacă din B către A, poate fi aproximată cu o curbă (fig. 15-2). Unghiul format de raza de lumină cu verticala la suprafața geoidului, într-un punct oarecare P, notat cu ζ_P^0 este unghiul zenital (sau distanța zenitală) măsurat în acest punct. În cadrul acestui capitol, se va înlocui suprafața complexă a geoidului cu suprafața sferei medii *Gauss*, de rază $R = \sqrt{MN}$ (6.3.2).

Această aproximație, admisă în general în literatura de specialitate la studierea fenomenului de refracție, nu introduce erori superioare celor generate de acceptarea altor aproximații.

Prin *refracție totală* se înțelege unghiul τ format din tangentele în punctele A și B:

$$\tau = \rho_A + \rho_B, \tag{15-2}$$

unde ρ_A și ρ_B sînt *unghiurile de refracție* din cele două puncte, astfel încît legătura dintre unghiurile zenitale *măsurate sau aparente* ζ^0 și cele *„reale"* ζ este:

$$\zeta_A = \zeta_A^0 + \rho_A \text{ și } \zeta_B = \zeta_B^0 + \rho_B. \tag{15-3}$$

Notînd cu Γ curbura, variabilă, a razei de lumină, se deduce expresia cea mai generală pentru refracția totală pornind de la relația cunoscută:

$$\frac{d\tau}{ds} = \Gamma,$$

de unde, se obține pentru intervalul A, B:

$$\tau_{A,B} = \int_A^B \Gamma \, ds, \tag{15-4}$$

unde cu ds s-a notat elementul de arc al arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Strict riguros, integrala din expresia (15-4) este practic imposibil de evaluat, depinzînd de starea efectivă a atmosferei în timpul măsurătorilor. O asemenea evaluare s-ar putea face numai prin măsurări de temperatură, presiune sau densitate în lungul razei de lumină, ceea ce evident este exclus pentru scopul urmărit aici.

Deoarece în triangulație refracția atmosferică verticală intervine doar la efectuarea observațiilor zenitale necesare pentru stabilirea cotelor prin nivelment trigonometric, se acceptă ipoteze care simplifică substanțial modalitatea de calcul a integralei din (15-4). O justificare a acestor ipoteze este generată și de faptul că distanțele cu care se operează sînt de regulă mai mici ca 6 km. Pentru asemenea domenii se poate accepta $\Gamma_0 = \text{constant}$, rezultînd că arcul de curbă $\overset{\frown}{AB}$ poate fi asimilat cu un arc de cerc (a

cărui rază este de aproximativ 8 ori mai mare decît raza medie a Pămîntului). În această ipoteză rezultă:

$$\rho_A = \rho_B = \rho = \tau_{A,B}/2, \tag{15-5}$$

și, ca urmare, din relația (15-4) rezultă:

$$\tau_{A,B} = \Gamma_0 \overset{\frown}{AB}. \tag{15-6}$$

În continuare se mai introduce o aproximație și anume $\overset{\frown}{AB} \approx s$, unde s reprezintă proiecția distanței dintre punctele A și B pe sfera medie *Gauss*, sau, mai general, pe elipsoidul de referință. Această nouă aproximație ar putea apărea ca exagerată, atunci cînd se examinează situația prezentată în figura 15-2. Nu trebuie uitat însă că desenul respectiv nu este realizat la o anumită scară, ci are doar un caracter reprezentativ. În realitate, raportul dintre arcul $\overset{\frown}{AB}$ și raza R este aproximativ egal cu 1/1 000, astfel încît diferența dintre arcul $\overset{\frown}{AB}$ și distanța s nu este foarte mare.

În aceste condiții se poate scrie:

$$\tau_{A,B} = \Gamma_0 R \omega = \frac{1}{R'} R \omega = k \omega, \tag{15-7}$$

unde coeficientul de proporționalitate k:

$$k = R/R', \tag{15-8}$$

este denumit *coeficient de refracție*. Din relațiile (15-5) și (15-7) rezultă:

$$\rho = \frac{k \omega}{2}. \tag{15-9}$$

Din figura 15-1 rezultă:

$$\zeta_A^0 + \rho = \omega + 180^0 - (\zeta_B^0 + \rho),$$

adică:

$$\tau = 180^0 + \omega - (\zeta_A^0 + \zeta_B^0). \tag{15-10}$$

Utilizînd relația (15-7) se obține o formulă de determinare a coeficientului de refracție:

$$(k - 1) = \frac{180^0 - (\zeta_A^0 + \zeta_B^0)}{\omega}, \tag{15-11}$$

în funcție de distanțele zenitale ζ_A^0 și ζ_B^0 (presupuse ca fiind măsurate la sol) și unghiul ω presupus de asemenea cunoscut (a se vedea și 17.2.2).

Această formulă este aplicabilă numai în limitele aproximațiilor introduse și sub restricții precise în ceea ce privește determinarea unghiurilor zenitale ζ_A^0 și ζ_B^0. Aceste restricții provin din faptul că refracția totală τ este o funcție periodică, cu perioada de 24 ore. Alura acestei funcții este diferită, în timp și spațiu, în funcție de diverși parametri, dintre care cel mai important este temperatura atmosferei. Temperatura atmosferei, la rîndul său, depinde într-o foarte mică măsură de radiațiile solare directe (pentru care aerul este aproape în întregime permeabil), fiind condiționată de radiațiile obscure, cu lungime mare de undă, reflectate de către sol.

Se ajunge astfel la o concluzie extrem de importantă pentru măsurătorile geodezice: *ciclul refracției atmosferice terestre este o consecință directă a gradului de încălzire a solului*. La acest ciclu se observă următoarele caracteristici:

— un maxim în timpul nopții;
— descreștere către răsăritul soarelui;
— un minim către ora 10;
— stabilitate între orele 10 și 15;
— creștere către apusul soarelui.

Trebuie luate însă în considerație și *variațiile locale* datorate anotimpului, poziției geografice a zonei, naturii terenului peste care trece viza (vegetație, ape, nisipuri ș.a.), distanței de vizare etc.

Măsurările zenitale trebuie efectuate în perioada de stabilitate a refracției terestre, deoarece prin nivelment trigonometric reciproc simultan s-ar putea elimina în acest fel influența necunoașterii exacte a unghiului de refracție ρ. Dar în perioadele de stabilitate a refracției, calitatea imaginii lasă de dorit, datorită agitației atmosferice. De aceea experiența fiecărui operator este hotărîtoare în alegerea momentului optim pentru efectuarea observațiilor, care însă trebuie să se afle în intervalul arătat.

Există numeroase teorii prin care se poate determina *pe cale fizică* refracția totală τ sau coeficientul de refracție k, bazate însă pe ipoteze mai mult sau mai puțin exacte, ceea ce face ca rezultatele obținute să difere întotdeauna de cele care se deduc prin folosirea unghiurilor zenitale măsurate. Astfel *Levallois* (1969) recomandă următoarea formulă de calcul a coeficientului de refracție k:

$$k = 0{,}670\,(+34{,}15 - \mathrm{d}T/\mathrm{d}H)\,p/T^2, \qquad (15\text{-}12)$$

unde $\mathrm{d}T/\mathrm{d}H$ este gradientul vertical (constant) de temperatură, acceptat în 1952 de către *Organizația Aviației Civile Internaționale* (*I.C.A.O*) ca fiind egal, pînă la 11 000 m, cu — 0,0065°C/m. Temperatura T se exprimă în °K. Cu formulele (15-11) și respectiv (15-12) s-au obținut în *Franța*, în cadrul unor experimentări multiple, rezultatele prezentate în tabelul 15-1.

Tabelul 15 – 1

ora	k obținut cu (15—11)	k obținut cu (15—12)
5^{30}	0,300	0,207
8	0,230	0,175
9^{30}	0,195	0,165
10	0,156	0,160
11	0,118	0,148
12	0,107	0,140
13	0,112	0,127
14	0,135	0,087
17	0,162	0,105
20	0,204	0,133

În general, pentru țările cu climă continentală, vara în zilele călduroase coeficientul de refracție este $0{,}11 < k < 0{,}14$. *Gauss* a dedus $k = 0{,}13$, iar coeficientul adoptat pentru țara noastră este $k = 0{,}14$. Trebuie menționat aici studiul condus de Prof. *A. Russu* (1964) prin care s-au stabilit valori ale coeficientului k pentru zona orașului *Brașov*, pe baza unui număr mare de determinări. S-au dedus următoarele valori medii, valabile pentru vize „înalte" (minimum 6 m deasupra terenului):

$k = 0{,}115$ între orele 10 și 14;

$k = 0{,}145$ între orele 7—9 și 15—17.

15.1.2. REFRACȚIA ATMOSFERICĂ LATERALĂ

Un fenomen deosebit de important, care influențează precizia măsurărilor azimutale (în special pentru vizele lungi în cadrul rețelelor de triangulație de ordin superior), îl constituie *refracția atmosferică laterală*, denumită uzual *refracția laterală* sau *refracția în azimut*. Acest fenomen provoacă o curbură în planul orizontal al razei de lumină, deci erori de poziție în determinarea punctelor geodezice.

Avînd în vedere importanța refracției laterale, s-au efectuat studii amănunțite încă de la începutul secolului trecut, emițîndu-se diferite ipoteze prin care să se poată determina o formulă de corectare a măsurărilor azimutale. Dintre acestea se menționează:

— geodezul rus *V.I. Struve*, în 1829, a cercetat observațiile azimutale efectuate în cadrul măsurărilor graduale, stabilind o dependență a refracției laterale în funcție de $\sqrt{D}$, unde D este lungimea vizei considerate;

— geodezul german *A. Fischer* publică în 1882 rezultatul cercetărilor efectuate pe circa 1 400 direcții din rețeaua prusacă, constatîndu-se o dependență între lungimea D și corecția v, pentru viza considerată, dedusă din compensare.

În lucrări relativ mai recente (*Kukkamäki* — 1936, *Rabinovici* — 1961, *Levallois* — 1969) sînt publicate formule de calcul pentru determinarea corecțiilor datorate refracției laterale (prezentate și în vechea ediție a manualului — *Ghițău* 1972).

Spre deosebire de refracția verticală, unde acceptarea formulelor de calcul al diferențelor de nivel prin nivelment trigonometric este aproape unanimă, stabilirea unei formule unice de calcul al corecțiilor datorită refracției laterale nu a fost realizată pînă în prezent, cercetările efectuate păstrînd încă un pronunțat caracter experimental. Aceasta se datorește în primul rînd gradului ridicat de precizie cu care ar trebui determinate asemenea corecții (pentru a nu vicia calitatea observațiilor propru-zise) și în al doilea rînd, lipsei de fonduri pentru desfășurarea unor studii de mare amploare în zona în care se fac măsurările. Numai asemenea studii ar putea conduce la eliminarea efectivă a unor aproximații pe care sînt obligate să le păstreze teoriile actuale (la stabilirea în special a gradientului orizontal sau vertical de temperatură, la calculul căruia se folosesc, uneori, coeficienții constanți, determinați în zone diferite de cea în care se execută observațiile geodezice).

Lipsa unui acord în adoptarea unei formule de calcul pentru determinarea corecțiilor datorate refracției laterale a fost suplinită de examinarea influenței acestui fenomen, a preîntîmpinării acțiunii sale prin adoptarea unor precauții de natură operațională.

Astfel s-a constatat că o influență deosebit de mare asupra măsurărilor azimutale o au coastele marine sau lanțurile de munți, care provoacă o curbură accentuată a razei de lumină. Se poate demonstra (*Ghițău* 1972) că refracția laterală, determinată de fluxul termic existent într-o asemenea situație, nu poate fi pusă în evidență de neînchiderile în triunghiuri și nici prin ecuațiile de pol (fig. 15-3).

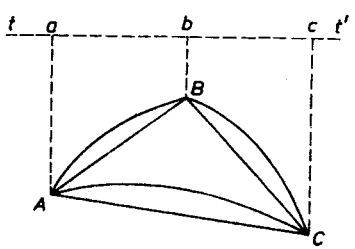


Fig. 15-3. Influența refracției laterale determinată de fluxul termic tt'.

Azimutul rețelei însă va fi modificat, deoarece unghiurile folosite la transmiterea sa sînt evident deformate și prin urmare, întreaga rețea se va roti către zona caldă. Existența unor neconcordanțe, destul de mari, între estimările privind calitatea măsurărilor, care se obțin în diverse etape ale prelucrării

observațiilor (la compensarea în stație apoi în funcție de neînchiderile în triunghiuri și, în sfîrșit, după compensarea rețelei) se datorește, în mare parte, acțiunii sistematice a refracției laterale.

Mulți autori consideră că refracția laterală poate fi micșorată prin adoptarea unui mod de lucru adecvat:

— observațiile azimutale se execută în condiții optime timp de circa 3—4 ore după răsăritul soarelui, precum și circa 3—4 ore înainte de apus. *F.N. Krasovski* consideră că cea mai potrivită perioadă pentru observațiile azimutale este perioada de seară (care se termină cu o oră înainte de apusul soarelui). Observațiile de noapte, începute o oră după apus și terminate cu 1—2 ore înainte de răsăritul soarelui, sînt, de asemenea, precise, deoarece oscilațiile azimutale sînt mici;

— trebuie evitată trecerea vizelor în apropierea construcțiilor sau versanților neacoperiți (evitarea „razanței"), prin asigurarea unei distanțe corespunzătoare între viză și teren;

— nu este recomandabil să se execute observații de mare precizie înainte de ploaie.

15.2. EXECUTAREA OBSERVAȚIILOR UNGHIULARE AZIMUTALE ÎN REȚELELE GEODEZICE

● Se cunoaște un număr însemnat de metode distincte de măsurare a unghiurilor sau direcțiilor, care posedă însă următoarele caracteristici comune:

— pentru eliminarea erorilor de poziție ale axelor teodolitului, măsurările se efectuează în număr egal în cele două poziții ale lunetei;

— în scopul micșorării erorii de antrenare a cercului și a erorii determinate de torsiunea pilastrului, măsurările se efectuează în număr egal în cele două sensuri de rotație a alidadei;

— măsurările repetate se efectuează cu origini diferite pentru a se diminua influența erorilor de diviziune ale cercului.

● În ceea ce privește efectuarea propriu-zisă a observațiilor unghiulare se impune ca fiecare operator să respecte anumite reguli de măsurare dintre care se menționează:

— teodolitul (verificat și rectificat) se instalează în stație cu circa o jumătate de oră înainte de începerea observațiilor pentru a căpăta temperatura mediului ambiant;

— pe tot timpul măsurătorilor, aparatul trebuie să ocupe o poziție stabilă. Dacă este necesar, se vor executa reparații prealabile ale piramidei pilastru;

— observațiile se execută numai în perioadele optime de măsurare, așa cum s-a menționat anterior, după metodele de lucru specifice ordinului de triangulație din care face parte rețeaua respectivă;

— la fiecare punctare a semnalelor geodezice se urmărește ca firul reticular azimutal să nu depășească imaginea obiectului vizat, astfel încît, sub acțiunea șurubului micrometric, alidada să continue mișcarea de rotație în același sens. Dacă acest lucru nu s-a realizat, este necesară efectuarea unei rotații complete a alidadei și repetarea operațiunii de punctare. Procedînd în acest fel se micșorează influența unor erori instrumentale (antrenarea cercului, erori ale șurubului micrometric, ale mișcării alidadei etc.);

— pentru evitarea mișcărilor de prisos la operațiunile de punctare, se execută un tur de orizont aproximativ, înainte de începerea observațiilor care va fi apoi folosit la punctările precise;

— punctarea pe direcție azimutală se realizează fie prin încadrare (între firele reticulare duble), fie prin bisectare, în funcție de distanța la care se află punctul vizat și experiența proprie a operatorului. În cazul vizării semnalelor la sol este indicat să se vizeze partea vizibilă de la apropierea solului, pentru a se evita eroarea datorată neverticalității semnalului vizat;

— punctarea la măsurările zenitale se realizează prin tangența dintre firul reticular zenital și marginea (de obicei cea superioară) cilindrului antifazic sau fluturelui etc. Pentru evitarea oricărei confuzii, este necesar să se întocmească o schiță de vizare în carnetul de observații;

— instrucțiunile în vigoare la noi în țară prevăd ca toate lecturile să fie făcute prin dublă coincidență, pentru verificare, prevăzîndu-se și toleranțele pentru abaterile constatate, în funcție de caracteristicile teodolitului folosit;

— după terminarea observațiilor se determină elementele de centrare și reducere. Este indicat ca aceste determinări să se repete la sfîrșitul perioadei de observație sau oricînd se consideră necesar (după furtună etc.).

● În cadrul fiecărui ordin de triangulație se adoptă o asemenea metodă de lucru încît observațiile unghiulare să rezulte cu ponderi egale. În consecință rezultă necesitatea stabilirii numărului necesar de măsurători elementare pentru realizarea acestui deziderat. În cadrul unor metode de observații, cum este de exemplu *metoda Schreiber* (v. 15.4), intervine necesitatea stabilirii raportului ponderilor dintre măsurarea unui unghi și respectiv măsurarea unei direcții.

Presupunînd că unghiul β rezultă din măsurarea directă a direcțiilor α_1 și α_2 (afectate de erorile s'_α):

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1,$$

se obține eroarea unghiului considerat s'_β *în ipoteza observațiilor directe și independente*:

$$s'_\beta = s'_\alpha \sqrt{2}. \tag{15-13}$$

Deoarece ponderea unei determinări poate fi evaluată, *aproximativ*, cu relația:

$$p = \frac{const}{s'^2}, \tag{15-14}$$

derivată din formula (9-17), se poate scrie:

$$p_\beta = \frac{const}{s'^2_\beta} = \frac{const}{2\,s'^2_\alpha} = \frac{p_\alpha}{2}. \tag{15-16}$$

Rezultă că măsurarea simplă a unui unghi are ca pondere jumătate din ponderea unei direcții măsurate. Ponderea se poate mări, de exemplu, prin efectuarea unor măsurări repetate, astfel că măsurătoarea dublă a unui unghi va avea aceeași pondere cu măsurătoarea simplă a unei direcții.

● Un rezultat analog s-ar obține și în cazul în care unghiul β ar fi obținut ca o sumă sau o diferență de două unghiuri γ_1, γ_2, măsurate direct:

$$\beta = \gamma_1 \pm \gamma_2; \quad p_\beta = \frac{p_\gamma}{2}. \tag{15-17}$$

● După terminarea observațiilor unghiulare se efectuează *compensarea în stație*, operație care are următoarele trei obiective principale:

— determinarea valorilor probabile ale direcțiilor, respectiv unghiurilor, strict necesare, care se au în vedere ulterior la prelucrarea în rețea;

— evaluarea preciziei interioare;

— determinarea caracterului de dependență a elementelor rezultate din compensarea în stație.

Pentru a putea păstra rigoarea *compensării rețelei de triangulație*, rezultatele compensării în stație pot fi tratate ulterior ca elemente independente numai cînd sînt funcții ortogonale de elementele măsurate. În caz contrar, trebuie aplicată teoria compensării observațiilor dependente (corelate).

15.3. METODA SERIILOR COMPLETE

15.3.1. EFECTUAREA OBSERVAȚIILOR

Metoda seriilor complete constă din efectuarea *tuturor observațiilor azimutale în turul de orizont*, într-un punct de stație, spre punctele de același ordin sau de ordin imediat superior (de racordare) pentru realizarea conexiunilor prevăzute de proiectul rețelei geodezice. Observațiile încep și se termină (pentru control) pe un *punct de referință*, care este cel mai îndepărtat și are condiții optime de vizibilitate.

O serie este compusă din două semiserii; în prima semiserie se vizează toate punctele în poziția I a lunetei prin rotirea alidadei în sens orar; în cealaltă semiserie, măsurările se efectuează în poziția a II-a a lunetei, rotindu-se alidada în sens antiorar.

Metoda este recomandată de instrucțiuni pentru rețelele de triangulație de ordinele III, IV, V, rețele principale și secundare din localități, precum și în diverse lucrări tehnico-inginerești, prevăzîndu-se toleranțele din tabelul 15-2.

Tabelul 15-2

Specificația	Ordinul III—IV		Ordinul V	Rețele în localități
	Aparate de 2^{cc}	Aparate de 5^{cc}	Aparate de 2^{cc}	
Diferența între două coincidențe	4^{cc}	5^{cc}	4^{cc}	4^{cc}
Abateri admise între începutul și sfîrșitul unei semiserii	15^{cc}	20^{cc}	$6\sqrt{n}$	$6\sqrt{n}$
Variația între diferite măsurători reduse la origine	15^{cc}	20^{cc}	20^{cc}	20^{cc}
Numărul de serii t	9 — ord III 6 — ord IV	12 — ord III 6 — ord. IV	3	6 — rețele principale 3 — rețele secundare

n = numărul de vize

Pentru diminuarea acțiunii erorilor de diviziune a cercului, seriile se execută cu origini diferite, la intervale I, calculate cu relația:

$$I = 200^g/t, \tag{15-18}$$

în care t este numărul seriilor.

Pentru a se diminua erorile de perioadă scurtă ale gradațiilor cercului, se modifică intervalele stabilite cu formula (15-18) cu 10^c.

Considerînd de exemplu că măsurările se efectuează cu un teodolit *Wild T2* într-un punct de triangulație de ordinul IV ($t = 6$), se obțin următoarele origini ale seriilor:

Seria	*Originea*
1	$0^g\,00^c$
2	$0^g\,00^c + I + 10^c = 33^g\,43^c$
3	$0^g\,00^c + 2(I + 10^c) = 66^g\,87^c$
4	$0^g\,00^c + 3(I + 10^c) = 100^g\,30^c$
5	$0^g\,00^c + 4(I + 10^c) = 133^g\,73^c$
6	$0^g\,00^c + 5(I + 10^c) = 167^g\,17^c$

Seriile fiind cicluri de observații independente, este permisă refacerea calajului la începutul unei serii noi.

Într-o serie se admit maximum 8 vize.

Dacă într-o stație este necesar să se observe mai multe puncte, se vor forma două grupe care să conțină 2—3 vize comune, fiind indicat să se păstreze în ambele grupe aceeași direcție de referință.

În planul de observații se includ două direcții spre puncte de ordin superior, necesare pentru racordarea tuturor observațiilor din stația respectivă.

În tabelul 15-3 se prezintă un model de formular folosit în producție în care sînt trecute observațiile dintr-o serie.

Rezultatele obținute în toate seriile sînt concentrate în tabelul 15-5, în care se efectuează, de asemenea, și calculele de compensare în stație, precum și evaluarea preciziei de măsurare.

15.3.2. COMPENSAREA ÎN STAȚIE

Se presupune cazul general în care dintr-un punct oarecare $P^{(0)}$ trebuie vizate punctele $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$ în t serii (fig. 15-4).

Cu O_i s-a notat poziția gradației zero pe cerc, în seria i. Se notează citirea pe direcția către punctul $P^{(j)}$ în seria i cu $l_i^{(j)}$, corecția aferentă cu $v_i^{(j)}$, iar citirea pe originea seriei i cu $l_i^{(0)}$.

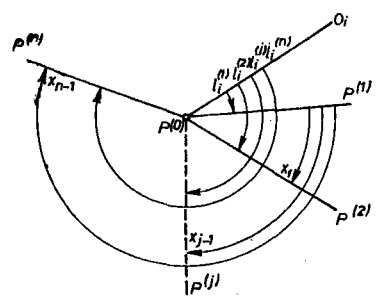
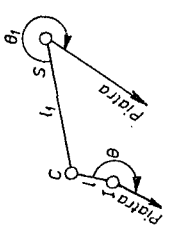


Fig. 15-4. Observații azimutale executate prin *metoda seriilor complete* în stația $P^{(0)}$.

15.3.2.1. **Determinarea elementelor compensate.** Se propune compensa-

Tabelul 15-3



Schița excentricității

$l = 0{,}010$ m; $\theta = 243^g\,15^c$

$l_1 = 0{,}022$ m; $\theta_1 = 345^g\,76^c$

Denumirea punctului: *Dealul Viei*
Ordinul: IV Trapezul: L-34-93
Data: 2.09.1960. Instrumentul: Wild T 2, seria 034
Început: ora 17,30. Terminat: ora 18,30
Starea timpului: senin, vînt din est
Vizibilitatea: bună
Numărul seriilor: 6

Denumirea punctelor observate	Citiri								$2x = S - D$	$\frac{S + (D \pm 200^g)}{2}$			Direcții reduse la zero		
	Stînga			Dreapta			Media (cc)								
	g	c	cc	g	c	cc				g	c	cc	g	c	cc
Cîntări	00	00	94	200	00	74	76		+26cc	00	00	84	00	00	00
			90			78		92							
Arsuri	58	92	91	258	92	61	59		+30	58	92	74	58	91	90
			88			57		89							
Arbori	115	26	98	315	26	88	90		+10	115	26	95	115	26	11
		27	02			92		00							
Pita	183	18	54	383	18	53	51		+ 2	183	18	52	183	17	68
			52			50		53							
Piatra	305	58	25	105	58	35	34		− 11	305	58	29	305	58	45
			22			34		23							
Cîntări	00	00	85	200	00	80	78		+ 6	00	00	81	(control)		
			83			77		84							

rea observațiilor efectuate (înscrise simbolic în tabelul 15-4) prin *metoda observațiilor indirecte*.

Numărul total de măsurători este $t \cdot n$. Se aleg ca necunoscute unghiurile x_1, x_2, ... x_{n-1} formate de direcția de referință cu celelalte puncte vizate. În funcție de notațiile introduse se obține:

$$\begin{aligned} x_1 &= (l_i^{(2)} + v_i^{(2)}) - (l_i^{(1)} + v_i^{(1)}); \\ x_2 &= (l_i^{(3)} + v_i^{(3)}) - (l_i^{(1)} + v_i^{(1)}); \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= (l_i^{(n)} + v_i^{(n)}) - (l_i^{(1)} + v_i^{(1)}); \\ & i = 1,2, \ldots, t. \end{aligned} \tag{15-19}$$

Tabelul 15-4

Seria	Orig.	Măsurători
1	$l_1^{(0)}$	$l_1^{(1)} \ldots l_1^{(j)} \ldots l_1^{(n)}$
...	...	... ...
i	$l_i^{(0)}$	$l_i^{(1)} \ldots l_i^{(j)} \ldots l_i^{(n)}$
...	...	... ...
t	$l_t^{(0)}$	$l_t^{(1)} \ldots l_t^{(j)} \ldots l_t^{(n)}$

Se observă astfel că o direcție măsurată este afectată atît de erori proprii de măsurare, cît și de erori ale direcției de referință, care provoacă o rotire a seriei considerate.

Notînd pentru direcția de referință:

$$l_i^{(1)} + v_i^{(1)} = -z_i, \tag{15-20}$$

se obțin următoarele grupe de sisteme de ecuații de erori, pentru fiecare din cele t serii:

Seria 1		*Seria t*
$v_1^{(1)} = -z_1 - l_1^{(1)}$		$v_t^{(1)} = -z_t - l_t^{(1)}$
$v_1^{(2)} = -z_1 + x_1 - l_1^{(2)}$		$v_t^{(2)} = -z_t + x_1 - l_t^{(2)}$
$v_1^{(3)} = -z_1 + x_2 - l_1^{(3)}$	...	$v_t^{(3)} = -z_t + x_2 - l_t^{(3)}$
$\vdots$		$\vdots$
$v_1^{(n)} = -z_1 + x_{n-1} - l_1^{(n)}$		$v_t^{(n)} = -z_t + x_{n-1} - l_t^{(n)}$.

(15-21)

Se observă că sistemul de ecuații de erori (15-21) conține $t \cdot n$ ecuații cu $n - 1 + t$ necunoscute, astfel că numărul total al observațiilor suplimentare este:

$$t \cdot n - (n-1) - t = (t-1)(n-1). \tag{15-22}$$

Necunoscutele z_i au, în sistemul de ecuații de erori (15-21), coeficientul -1. În ipoteza *observațiilor independente și de egală precizie* ($p_1 = p_2 = \ldots = p_n$) rezultă din ecuația (9-34):

$$[v]_1 = [v]_2 = \ldots = [v]_t = 0. \tag{15-23}$$

Cu indici inferiori s-a notat ca și pînă acum numărul seriei.

Formăm sistemul de ecuații normale corespunzător sistemului (15-21), considerînd ca necunoscute x_1, x_2, ..., x_{n-1} și $[z]$:

$$\begin{aligned} t \cdot x_1 \qquad\qquad\qquad & -[z] - [l]^{(2)} = 0; \\ t \cdot x_2 \qquad\qquad\qquad & -[z] - [l]^{(3)} = 0; \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad & \ldots \\ t \cdot x_{n-1} \qquad & -[z] - [l]^{(n)} = 0; \\ -t \cdot x_1 - t \cdot x_2 \ldots - t \cdot x_{n-1} \quad & +n[z] + [l] = 0. \end{aligned} \tag{15-23, a}$$

Cu $[l]^{(j)}$ s-a notat suma termenilor liberi (respectiv a lecturilor) pentru punctul $P^{(j)}$ vizat, prin luarea în considerație a tuturor seriilor, iar cu $[l]$ suma termenilor liberi pentru toate ecuațiile de erori. Adunînd ecuațiile sistemului (15-23, a) rezultă:

$$[z]\ \{n-(n-1)\}+[l]^{(1)}=0, \tag{15-24}$$

de unde:

$$[z]=-[l]^{(1)}. \tag{15-25}$$

Dacă se consideră (așa cum se procedează de fapt și din punct de vedere practic) *că direcțiile obscrvate se reduc pe direcția de referință înainte de a se efectua compensarea în stație* (v. tabelul 15-5), se obține:

$$l_1^{(1)}=l_2^{(1)}=\ldots=l_t^{(1)}=0 \tag{15-26}$$

și prin urmare

$$[l]^{(1)}=0, \tag{15-27}$$

adică:

$$[z]=0. \tag{15-28}$$

Folosind ultima egalitate, rezultă din sistemul (15-23, a) următoarele soluții pentru necunoscutele x_i:

$$x_1=\frac{[l]^{(2)}}{t};\qquad x_2=\frac{[l]^{(3)}}{t};\ \ldots;\qquad x_{n-1}=\frac{[l]^{(n)}}{t}. \tag{15-29}$$

C o n c l u z i e. *În cazul metodei seriilor complete, valoarea cea mai probabilă a unei direcții este dată de media aritmetică a măsurătorilor efectuate în toate seriile, după ce în prealabil au fost reduse pe direcția de referință.*

Calculele de evaluare a preciziei pot fi, de asemenea, ușurate. Sistemul (15-21) poate fi scris și sub forma:

$$\begin{aligned}
&v_1^{(1)}=-z_1 && v_t^{(1)}=-z_t;\\
&v_1^{(2)}=-z_1+d_1^{(2)} && v_t^{(2)}=-z_t+d_t^{(2)};\\
&v_1^{(3)}=-z_1+d_1^{(3)} \quad \ldots && v_t^{(3)}=-z_t+d_t^{(3)};\\
&\vdots && \vdots\\
&v_1^{(n)}=-z_1+d_1^{(n)} && v_t^{(n)}=-z_t+d_t^{(n)}.
\end{aligned} \tag{15-30}$$

Cantitățile $d_i^{(j)}$ reprezintă diferența între valorile medii obținute cu relația (15-29) și valorile $l_i^{(j)}$ măsurate și reduse la origine. Folosind proprietatea dată de relațiile (15-23) se obține din sistemul (15-30):

$$z_i=\frac{[d]_i}{n};\qquad i=1,2,\ \ldots,\ t. \tag{15-31}$$

Cu formulele (15-29) și (15-31) se deduc extrem de simplu (în tabelul 15-5) necunoscutele modelului funcțional. Cu relațiile (15-30) s-ar putea determina corecțiile v, operație care nu este însă neapărat necesară.

15.3.2.2. **Estimarea preciziei interioare.** *Eroarca medie s'_α a unei singure direcții, măsurată într-o singură serie (egală în cazul nostru cu eroarea medie a unității de pondere s'_0) se obține cu:*

$$s'_0=s'_\alpha=\sqrt{\frac{[vv]}{(t-1)(n-1)}}. \tag{15-32}$$

Se poate determina o formulă pentru calculul $[vv]$ în funcție de diferențele $d_i^{(j)}$. În adevăr, pentru seria 1, se obține din sistemul (15-30):

$$[vv]_1=nz_1^2-2z_1[d]_1+[dd]_1$$

sau cu relația (15-31):

$$[vv]_1=[dd]_1-\frac{[d]_1[d]_1}{n}. \tag{15-33}$$

Pentru totalul celor t serii rezultă prin însumare:

$$[vv]=[dd]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}[d]_i[d]_i. \tag{15-34}$$

● *Erorile necunoscutelor x, care în cazul examinat reprezintă erorile unghiurilor compensate s'_β* se deduc cu relații de forma (9-53). Se poate demonstra (*Wolf* 1968, *Ghițău* 1972 ș.a.) că:

$$\begin{aligned}
&Q_{ii}=2/t;\qquad Q_{ij}=1/t;\\
&\qquad\qquad i=1,\ \ldots,\ n-1;\\
&\qquad\qquad j=1,\ \ldots,\ n-1;\quad (j\neq i).
\end{aligned} \tag{15-35}$$

Rezultă astfel:

$$s'_x=(s'_\beta)=s'_0\sqrt{Q_{ii}}=s'_0\sqrt{2/t}. \tag{15-36}$$

● *Eroarea medie a unei direcții compensate în stație s'_α* se obține prin utilizarea relației (15-13):

$$(s'_\alpha)=(s'_\beta)/\sqrt{2}=s'_0/\sqrt{t}, \tag{15-37}$$

adică:

$$(s'_\alpha)=\sqrt{\frac{[dd]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}[d]_i[d]_i}{t(t-1)(n-1)}}. \tag{15-38}$$

O b s e r v a ț i e. Viza de închidere pe punctul de referință nu trebuie folosită decît *pentru control*. În cazul în care pentru reducerea la zero s-ar folosi o medie între lectura inițială și cea de închidere pe această direcție, ar trebui să se atribuie unei asemenea valori ponderea 2, ceea ce ar complica în mod inutil toată procedura de compensare în stație.

Un exemplu de compensare în stație a observațiilor azimutale executate prin metoda seriilor complete se prezintă în tabelul 15-5.

15.3.2.3. **Gradul de dependență a elementelor compensate în stație.** *Unghiurile x_i compensate în stație* nu sînt funcții ortogonale, deoarece coeficienții de pondere dreptunghiulari $Q_{ij}\neq 0$ și, prin urmare, nu ar putea fi compensate în continuare (în rețea) ca mărimi independente [v. relația (9-12)].

Tabelul 15-5

Nr. serieI	Origini		Cintări			Arsuri			Arbori			Pita			Piatra			$[d]_i$
	g	c	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	
								$d_i^{(1)}$			$d_i^{(2)}$			$d_i^{(3)}$			$d_i^{(4)}$	$d_i^{(5)}$	
1	0	00	00	00	00	58	91	90	115	26	11	183	17	68	305	58	45	+5cc
					0cc			−1cc			+3cc			+0cc			+3cc	
2	33	43			0			−4			+6			+3			−2	+3
3	66	87			0			+8			−5			−7			+1	−3
4	100	30			0			−9			−3			+5			−2	−9
5	133	73			0			0			+2			+3			+3	+8
6	167	17			0			+4			−2			−2			−4	−4
	Media		00	00	00	58	91	89	115	26	14	183	17	68	305	58	48	

$t = 6$; $n = 5$; $[dd] = 404$; $\dfrac{\sum [d]_i \, [d]_i}{n} = \dfrac{204}{5} = 4$; $[vv] = 363$; $(n-1)(t-1) = (5-1)(6-1) = 20$

n = numărul de puncte vizate

t = numărul de serii

$$s_0' = \pm \sqrt{\frac{363}{20}} = \pm 4^{cc},2; \quad s_a' = 4{,}2 / \sqrt{6} = 1^{cc},7$$

Direcţiile compensate sînt în schimb funcţii ortogonale, putînd fi prelucrate ca atare în reţeaua geodezică.

15.3.2.4. **Cu privire la compensarea seriilor incomplete.** Datorită lipsei de vizibilitate ce poate exista la un moment dat, pot rezulta serii incomplete a căror compensare este diferită de cea expusă anterior. Se cunosc procedee diverse de compensare a seriilor complete, elaborate cu mulţi ani în urmă de către renumiţi geodezi: *Bessel, Clarke, Helmert, Hansen, Kneissl* ş.a., a căror utilizare a intervenit în ţările în care metoda seriilor a fost folosită şi în *reţelele de triangulaţie de ordin superior* (desigur, cu un număr mult mai mare de serii decît cel specificat în tabelul 15-2). Descrierea metodelor menţionate, precum şi alte metode de observaţii unghiulare azimutale care nu se folosesc în ţara noastră se pot găsi în lucrări mai dezvoltate (*Jordan* ş.a. 1958, *Krasovski* 1955, *Wolf* 1968 ş.a.).

În condiţiile ţării noastre, unde metoda seriilor este aplicată numai în *reţelele de triangulaţie de ordinul III, IV, V, în reţelele tehnice inginereşti şi în localităţi*, se pot realiza serii complete aproape în toate situaţiile.

15.3.2.5. **Comasarea seriilor cu vize comune.** Comasarea seriilor cu vize comune se poate realiza fie riguros prin metodele menţionate la 15.3.2.4, fie prin procedee aproximative, indicate în cazul în care observaţiile azimutale *nu sînt efectuate* în reţelele geodezice de ordin superior. Se prezintă în continuare *metoda mediilor* (*Jordan* ş.a. 1958), pentru care se poate urmări şi exemplul numeric prezentat în tabelul 15-6 în care s-au avut în vedere două serii notate *1* şi *2*. Aproximaţia rezidă din modul în care se determină necunoscutele de orientare z care intervin la compensarea în staţie. Calculele decurg în felul următor:

— se calculează mediile pentru toate direcţiile (coloana *4*);

— se calculează diferenţele între aceste medii şi valorile din prima şi respectiv a doua grupă (coloanele *5* şi *6*);

— unghiurile z_1^* şi z_2^* cu care sînt rotite seriile se determină din condiţia ca suma diferenţelor (mai sus calculate) să fie zero. Numărul condiţiilor de acest gen este egal cu numărul seriilor minus 1. Deoarece numărul de necunoscute este egal cu numărul seriilor, se uzează şi de condiţia suplimentară, şi anume: suma unghiurilor z^* să fie zero. În cazul în care cele două grupe de serii au vize de referinţă diferite, se poate face o nouă „reducere la zero" pe una din vizele comune, astfel încît aceasta devine direcţie de referinţă comună.

Necunoscutele z_1^* şi z_2^* se determină prin urmare din sistemul:

$$\begin{aligned} z_1^* - z_2^* - 2^{cc},\ 1 &= 0; \\ z_1^* + z_2^* &= 0. \end{aligned} \tag{15-39}$$

Soluţiile acestui sistem sînt $z_1^* \approx +1^{cc},\ 1$; $z_2^* \approx -1^{cc},\ 1$. Cu aceste valori se modifică corespunzător cifrele din coloana *4*, rezultînd valorile definitive (coloana *7*).

Observaţie. Pentru încadrarea unor măsurători de ordin inferior între direcţii de ordin superior (care rămîn neschimbate valoric după compensarea în staţie a măsurătorilor de ordin inferior), se poate proceda în felul următor:

— se stabilesc diferenţele care există între cele două categorii de măsurători (pentru vizele comune);

— media acestor diferenţe se adaugă tuturor direcţiilor de ordin inferior, care nu au corespondent în observaţiile de ordin superior.

Tabelul 15-6

Punctul vizat	Măsurători		Media $\frac{1}{t}[l]$	Diferenţe		Valori definitive
	$l_1^{(j)}$ (seria 1)	$l_2^{(j)}$ (seria 2)		$d_1^{(j)}$	$d_2^{(j)}$	
$P^{(1)}$	$0^g00^c00^{cc},0 + z_1^*$	$0^g00^c00^{cc},0 + z_2^*$	$0^g00^c00^{cc},0 + \frac{1}{2}(z_1^* + z_2^*)$	$0^{cc},0 + \frac{1}{2}(-z_1^* + z_2^*)$	$0^{cc},0 + \frac{1}{2}(z_1^* - z_2^*)$	$0^g00^c00^{cc},0$
$P^{(2)}$	—	45 60 81,8 + z_2^*	45 60 81,8 + z_2^*	—	0	$45^g60^c80^{cc},7$
$P^{(3)}$	128 18 20,0 + z_1^*	128 18 24,2 + z_1^*	128 18 22,1 + $\frac{1}{2}(z_1^* + z_2^*)$	$2^{cc},1 + \frac{1}{2}(-z_1^* + z_2^*)$	$-2^{cc},1 + \frac{1}{2}(z_1^* - z_2^*)$	$128^g18^c22^{cc},1$
$P^{(4)}$	288 89 54,5 + z_1^*	—	288 89 54,5 + z_1^*	0	—	$228^g89^c55^{cc},6$
Media				$2^{cc},1 - z_1^* + z_2^*$	$-2^{cc},1 + z_1^* - z_2^*$	

15.4. MĂSURAREA UNGHIURILOR ÎN TOATE COMBINAŢIILE (METODA SCHREIBER)

Măsurarea unghiurilor în toate combinaţiile a fost propusă ca metodă ideală de măsurare de către *C.F. Gauss* şi *C.L. Gerling*. *O. Schreiber* a dezvoltat şi definitivat această metodă în cadrul observaţiilor unghiulare din triangulaţia germană 1868—1874 şi de aceea metoda poartă numele său.

Prin instrucţiunile în vigoare în ţara noastră, măsurările azimutale în triangulaţia de ordinele I-II se efectuează numai prin *metoda Schreiber*, care constă în măsurarea unghiurilor în toate combinaţiile fără însă ca acestea să se completeze la 400^g.

15.4.1. EFECTUAREA OBSERVAŢIILOR

Se consideră în figura 15-5 punctul de staţie $P^{(0)}$ din care se vizează punctele de triangulaţie $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$. Pe schiţă sînt trecute toate unghiurile care se pot măsura, luîndu-se cîte două direcţii în toate combinaţiile posibile şi fără ca acestea să se completeze la 400^g, precum şi unghiurile x strict necesare, ce urmează a fi determinate prin compensarea în staţie.

Revenind la cazul general, cînd din punctul de staţie $P^{(0)}$, ar trebui vizate n puncte din reţeaua geodezică, rezultă că numărul total de unghiuri măsurate ar fi egal cu $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Pentru cazul concret examinat se vor măsura prin urmare $4 \cdot 3/2 = 6$ unghiuri.

Pe lîngă faptul că fiecare unghi va fi observat direct în cele t serii, vor rezulta concomitent şi un număr de $t \cdot (n-2)$ determinări indirecte (ca sume sau diferenţe de unghiuri măsurate direct).

Admiţînd că numărul de determinări (directe şi indirecte) efectuate asupra unui unghi contribuie la formarea ponderii sale, se obţine relaţia de determinare a numărului de serii [v. şi formulele (15-16) şi (15-17)]:

$$t + t(n-2)/2 = p/2, \qquad (15\text{-}40)$$

de unde:

$$t = p/n. \qquad (15\text{-}41)$$

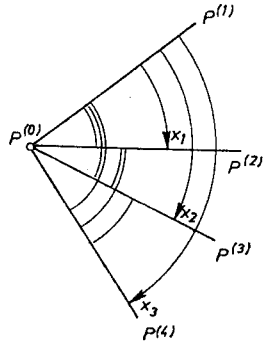


Fig. 15-5. Observaţii azimutale executate prin *metoda Schreiber* în staţia $P^{(0)}$.

Potrivit cu instrucţiunile valabile la noi în ţară, pentru ordinul II, p este 24, 25, 27 sau 28. Dacă se consideră că punctul $P^{(0)}$ este din reţeaua de ordinul II, numărul de serii ar fi prin urmare: $t = 6$.

Pentru reţeaua de triangulaţie de ordinul I se prevede: $p = 36$ ($n = 3$, 4, 6 sau 9); $p = 35$ ($n = 5$, 7); $p = 32$ ($n = 8$).

În scopul diminuării influenţei erorilor de diviziune a cercului, fiecare direcţie va fi observată numai o singură dată cu o anumită origine, intervalul I dintre acestea determinîndu-se cu aceeaşi formulă ca la metoda seriilor:

$$I = 200^g/t. \qquad (15\text{-}18)$$

Metoda prevede încă o precauţie din acest punct de vedere şi anume unghiurile consecutive se măsoară cu origini diferite, intervalul i dintre acestea fiind determinat cu formulele:

$$i = I/n \text{ pentru } n \text{ impar};$$
$$i = I/(n-1) \text{ pentru } n \text{ par}. \qquad (15\text{-}42)$$

Pentru cazul concret examinat rezultă: $I = 33^g\,33^c$ şi respectiv $i = 11^g\,11^c$. În tabelul 15-7 se prezintă originile pentru cazul concret considerat.

Tabelul 15-7

Unghiul	Măsurătoarea					
	I	II	III	IV	V	VI
1—2	0^g00^c	33^g43^c	66^g86^c	100^g29^c	133^g72^c	167^g15^c
1—3	11 21	44 64	78 07	111 50	144 93	178 36
1—4	22 42	55 85	89 28	122 71	156 14	189 57
2—3	22 42	55 85	89 28	122 71	156 14	189 57
2—4	11 21	44 64	78 07	111 50	144 93	178 35
3—4	0 21	33 43	66 86	100 29	133 72	167 15

$n = 4$; $p = 24$

O b s e r v a ţ i e. În unele ţări se foloseşte un alt sistem de întocmire a planului de observaţii, ţinîndu-se seama şi de posibilitatea de eliminare a erorii de run chiar în timpul măsurării. Aceste planuri de observaţii diferă de cele conţinute de instrucţiunile valabile în ţara noastră.

Măsurarea propriu-zisă a unui unghi decurge astfel:

— se vizează punctul din stînga şi se introduce prima origine (o valoare apropiată de cea trecută în tabelul originilor);

— se roteşte alidada în sens orar şi se vizează punctul din dreapta, efectuîndu-se lectura pe acest punct;

— cu luneta în poziţia a II-a se vizează acelaşi punct din dreapta, înregistrînd lectura efectuată;

— se continuă mişcarea alidadei în sens orar şi se vizează din nou punctul din stînga, efectuînd lectura corespunzătoare.

Aceste patru etape de măsurare constituie un cuplu sau o serie completă.

Următorul cuplu va fi măsurat cu o origine diferită, corespunzătoare planului de observaţii conţinut de tabelul 15-7 şi într-un sens de rotaţie al alidadei diferit de cel anterior.

Urmînd acest mod practic de măsurare, unghiurile vor fi măsurate în mod egal în cele două sensuri de rotaţie ale alidadei, cît şi în cele două poziţii de lucru ale lunetei.

Valorile citirilor se înscriu în jurnalul de observaţii, al cărui model este dat în tabelul 15-3. Rezultatele obţinute în exemplul examinat se prezintă în tabelul 15-8.

Tabelul 15-8

Unghiul / Nr. seriei	1–2	1–3	1–4	2–3	2–4	3–4
I	45g27c17cc,3	98g52c40cc,2	162g45c70cc,0	53g25c25cc,2	117g18c60cc,5	63g93c23cc,0
II	16 ,2	42 ,1	69 ,2	20 ,2	60 ,8	21 ,4
III	10, 5	48 ,3	73 ,0	19 ,4	64 ,4	27 ,2
IV	10 ,1	44 ,7	74 ,3	24 ,3	58 ,0	30 ,5
V	14 ,4	38 ,0	75 ,3	15 ,6	61 ,5	29 ,2
VI	19 ,8	46 ,5	71 ,6	26 ,3	59 ,3	26 ,3
Media	45g27c14cc,7	98g52c43cc,3	162g45c72cc,2	53g25c21cc,8	117g18c60cc,7	63g93c26cc,2

Pentru ordinele I, II, instrucţiunile prevăd următoarele toleranţe:

— diferenţa între două coincidenţe la fiecare vizare să fie de maximum 3cc, respectiv 4cc;

— ecartul maxim dintre măsurările directe efectuate asupra aceluiaşi unghi cu diverse origini nu trebuie să depăşească 8cc şi respectiv 12cc.

● *Metoda Schreiber*, după care s-au efectuat observaţii de înaltă precizie în multe triangulaţii de ordinul I, *posedă unele avantaje esenţiale* în comparaţie cu *metoda seriilor*, dintre care se menţionează:

— programul de observaţii se poate desfăşura în orice ordine, în funcţie de vizibilitatea cea mai bună existentă în teren la un moment dat;

— programul de lucru prevede (în special pentru n mic) mai multe origini decît la metoda seriilor şi, prin urmare, se elimină mai bine influenţa erorilor de diviziune a cercului gradat.

● Trebuie totodată făcute şi cîteva *observaţii critice*:

— pe măsură ce numărul de direcţii creşte, scade numărul de serii t; în acest fel valorile compensate ale unui unghi se vor deduce în special din măsurători indirecte;

— toate observaţiile, indiferent de condiţiile de vizibilitate, sînt considerate de precizie egală, ceea ce contrazice realitatea, deoarece măsurătorile au loc, de regulă, în zile diferite şi prin urmare în condiţii atmosferice care se pot deosebi esenţial. Se pot menţiona cercetări (*Rotaru* 1975 ş.a.) de a atribui fiecărei vize o anumită pondere în funcţie de condiţiile concrete de măsurare, precum şi de a stabili criterii după care să se elimine unele observaţii deficitare din punct de vedere calitativ, încă înainte de compensarea în staţie;

— cînd $n > 5$, programul de observaţii devine extrem de laborios.

Unii specialişti consideră ca un dezavantaj al procedeului şi faptul că, măsurînd continuu un acelaşi unghi, există pericolul memorizării lecturilor anterioare şi influenţării subiective a rezultatelor măsurării.

15.4.2. COMPENSAREA ÎN STAŢIE

15.4.2.1. **Determinarea elementelor compensate.** Se cunosc mai multe procedee de compensare în staţie a observaţiilor unghiulare executate prin metoda *Schreiber*.

Cel mai simplu se pot deduce valorile compensate ale unghiurilor β_i^0 măsurate, prin aplicarea *teoriei observaţiilor indirecte combinate cu observaţii directe* în ipoteza independenţei acestora. Este cunoscut că dacă se atribuie celor două categorii de măsurători ponderile *1*, respectiv *2*, unghiurile x se obţin ca *medii ponderate*:

$$\beta_{12} = x_1 = \frac{2\beta_{12}^0 + (\beta_{13}^0 - \beta_{23}^0) + (\beta_{14}^0 - \beta_{24}^0)}{4};$$

$$\beta_{13} = x_2 = \frac{2\beta_{13}^0 + (\beta_{12}^0 + \beta_{23}^0) + (\beta_{14}^0 - \beta_{34}^0)}{4}; \qquad (15\text{-}43)$$

$$\beta_{14} = x_3 = \frac{2\beta_{14}^0 + (\beta_{12}^0 + \beta_{24}^0) + (\beta_{13}^0 + \beta_{34}^0)}{4}.$$

În relaţia (15-43) şi în continuare, cu β_{ij}^0 s-a notat *media unghiurilor măsurate direct în cele t serii*. În exemplul considerat, valorile unghiurilor β_{ij}^0 sînt prezentate în ultima linie a tabelului 15-8.

Celelalte unghiuri compensate se deduc din valorile obţinute anterior:

$$\beta_{23} = x_2 - x_1; \quad \beta_{24} = x_3 - x_1; \quad \beta_{34} = x_3 - x_2. \qquad (15\text{-}44$$

Pentru a deduce complet formulele necesare evaluării preciziei interioare, precum şi pentru a desprinde concluzii în legătură cu caracterul de dependenţă a valorilor compensate, se compensează observaţiile din figura 15-5, prin aplicarea *teoriei observaţiilor indirecte, procedeul Jordan*.

Sistemul ecuațiilor de erori în cazul concret examinat este:

$$\begin{aligned}
v_{12} &= x_1 - \beta^0_{12};\\
v_{13} &= x_2 - \beta^0_{13};\\
v_{14} &= x_3 - \beta^0_{14};\\
v_{23} &= -x_1+x_2 - \beta^0_{23};\\
v_{24} &= -x_1+x_3 - \beta^0_{24};\\
v_{34} &= -x_2+x_3 - \beta^0_{34}.
\end{aligned} \tag{15-45}$$

Sistemul de ecuații normale corespunzător sistemului (15-45) este:

$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2 - x_3 - \beta^0_{12} + \beta^0_{23} + \beta^0_{24} &= 0;\\
-x_1 + 3x_2 - x_3 - \beta^0_{13} - \beta^0_{23} + \beta^0_{34} &= 0;\\
-x_1 - x_2 + 3x_3 - \beta^0_{14} - \beta^0_{24} - \beta^0_{34} &= 0.
\end{aligned} \tag{15-46}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem se însumează ecuațiile normale și se obține:

$$x_1 + x_2 + x_3 - \beta^0_{12} - \beta^0_{13} - \beta^0_{14} = 0. \tag{15-47}$$

Valorile necunoscutelor rezultă imediat prin adunarea ecuației (15-47) la fiecare din ecuațiile sistemului (15-46) și sînt identice cu soluțiile (15-43).

Corecțiile v pentru unghiurile β^0 se pot obține fie din sistemul (15-45) atunci cînd acesta este format, sau mai simplu [cînd valorile unghiurilor se deduc cu relațiile (15-43) și (15-44)] cu relații de forma:

$$v = \beta - \beta^0, \tag{15-48}$$

valorile fiind, evident, aceleași.

15.4.2.2. **Estimarea preciziei interioare.** Deducerea coeficienților de pondere necesari pentru calculul erorilor medii ale necunoscutelor se realizează după procedeul cunoscut de la cursul de *teoria erorilor* (*Wolf* 1968, *Fotescu* 1975 ș.a.): necunoscutele se înlocuiesc cu coeficienții de pondere corespondenți, iar termenii liberi cu matricea unitate. În plus, trebuie ținut seama și de faptul că fiecare unghi este măsurat direct de t ori, astfel încît o primă serie de coeficienți de pondere se calculează din următorul sistem:

$$\begin{aligned}
3tQ_{11} - tQ_{12} - tQ_{13} &= 1;\\
-tQ_{11} + 3tQ_{12} - tQ_{13} &= 0;\\
-tQ_{11} - tQ_{12} + 3tQ_{13} &= 0.
\end{aligned} \tag{15-49}$$

Suma acestor ecuații este:

$$t(Q_{11} + Q_{12} + Q_{13}) = 1. \tag{15-50}$$

Aceasta, adunată succesiv la ecuațiile sistemului (15-49) oferă:

$$Q_{11} = 1/2t; \quad Q_{12} = Q_{13} = 1/4\ t. \tag{15-51}$$

Procedînd în mod analog, s-ar obține și celelalte valori ale coeficienților de pondere, rezultînd pentru cazul general:

$$Q_{ii} = 2/n\ t; \tag{15-52}$$

$$Q_{ij} = 1/n\ t. \tag{15-53}$$

● Pentru deducerea *erorii medii a unității de pondere*, cu o formulă de forma (9-52), se stabilește numărul relațiilor suplimentare:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{15-54}$$

Prin urmare:

$$s'_0 = \sqrt{\frac{2[vv]}{(n-1)(n-2)}}. \tag{15-55}$$

În situația examinată, eroarea medie a unității de pondere este egală cu *eroarea medie a unghiului* β^0_{ij} rezultat din medierea unghiurilor corespondente, măsurate în cele t serii:

$$s'_0 = s'_{\beta^0}. \tag{15-56}$$

● *Eroarea medie a unui unghi măsurat într-o singură serie, notat* β', se determină cu relația:

$$s'_{\beta'} = s'_0\sqrt{t} = \sqrt{\frac{2t[vv]}{(n-1)(n-2)}}. \tag{15-57}$$

● *Eroarea medie a unui unghi compensat*, egală în situația examinată cu *eroarea unei necunoscute* x_i, se determină cu o formulă de forma (9-53), utilizînd coeficienții de pondere exprimați cu relația (15-52):

$$(s'_{\beta_i}) = s'_{\beta'}\sqrt{Q_{ii}} = 2\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)(n-2)}}. \tag{15-58}$$

● Considerînd (15-13) se obțin în continuare:

— *eroarea medie a unei direcții măsurate într-o singură serie, notată* s'_α:

$$s'_\alpha = \frac{s'_{\beta'}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{t[vv]}{(n-1)(n-2)}}; \tag{15-59}$$

— *eroarea medie a unei direcții compensate în stație, notată* (s'_α):

$$(s'_\alpha) = \frac{(s'_{\beta_i})}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2[vv]}{n(n-1)(n-2)}}. \tag{15-60}$$

Calculele de compensare în stație și de estimare a preciziei interioare se prezintă în tabelul 15-9.

15.4.2.3. **Gradul de dependență a elementelor compensate în stație.** Deoarece coeficienții de pondere dreptunghiulari Q_{ij} ai unghiurilor compensate sînt diferiți de zero, rezultă că *unghiurile* obținute din compensarea în stație *nu sînt funcții ortogonale* și nu pot fi supuse în continuare unei

Tabelul 15-9

	1–2	1–3	1–4	2–3	2–4	3–4
Valoare directă	45g27c14cc,7	98g52c43cc,3	162g45c72cc,2	53g25c21cc,8	117g18c60cc,7	63g93c26cc,2
Valoare directă	14,7	43,3	72,2			
Valoare indirectă	11,5	46,0	75,4			
Valoare indirectă	21,5	36,5	69,5			
Valoare compensată	45g27c15cc,60	98g52c42cc,28	162g45c72cc,32	53g25c26cc,68	117g18c56cc,72	63g93c30cc,40
Corecții v cc	+0cc,90	−0cc,02	+0cc,12	+4cc,88	−3cc,98	+3cc,84

$$[vv] = 55{,}2252 \qquad (n-1)(n-2) = 3 \times 2 = 6 \qquad n(n-1)(n-2) = 24$$

$$s_0' = \sqrt{\frac{2[vv]}{(n-1)(n-2)}} = \pm 4^{cc},28; \qquad s_{\beta'} = s_0' \sqrt{t} = \pm 10^{cc},48$$

$$\left(s_{\beta_i}'\right) = \sqrt{\frac{4[vv]}{n(n-1)(n-2)}} = \pm 3^{cc},03; \qquad s_\alpha' = \frac{s_{\beta'}}{\sqrt{2}} = \pm 7^{cc},43; \quad \left(s_\alpha'\right) = \frac{\left(s_{\beta_i}'\right)}{\sqrt{2}} = \pm 2^{cc},14$$

t = numărul seriilor = 6; n = numărul punctelor vizate = 4

compensări ca mărimi independente (de exemplu la compensarea rețelei de triangulație).

H. Wolf (1968) demonstrează că în cazul în care compensarea în stație ar cuprinde ca necunoscute direcțiile spre punctele vizate, s-ar obține pentru toți coeficienții de pondere dreptunghiulari valoarea zero. Aceasta înseamnă că *direcțiile* care rezultă la compensarea în stație *sînt funcții ortogonale* și pot fi tratate în continuare ca și cum ar fi observații „originare".

Deoarece procedeul de compensare în stație, pe direcții, este mai greoi, se poate folosi următoarea succesiune de operațiuni:

Tabelul 15-10

Direcția	Direcția compensată în stație
$P^{(0)}\ P^{(1)}$	0g00c00cc,00
$P^{(0)}\ P^{(2)}$	45g27c15cc,60
$P^{(0)}\ P^{(3)}$	98g52c42cc,28
$P^{(0)}\ P^{(4)}$	162g45c72cc,32

— observațiile efectuate după procedeul *Schreiber* sînt compensate după metoda expusă (pe unghiuri);

— unghiurile rezultate din compensare sînt „transformate" în direcții compensate, prin considerarea unei direcții drept „origine" a rezultatelor. Pentru exemplul practic examinat, funcțiile ortogonale (direcțiile compensate) sînt referite la direcția $P^{(0)}\ P^{(1)}$ (tabelul 15-10).

Capitolul 16

APARATE, INSTRUMENTE ȘI DISPOZITIVE UTILIZATE ÎN NIVELMENTUL GEOMETRIC GEODEZIC

Aparatele sau instrumentele utilizate în rețelele geodezice pentru determinarea diferențelor de nivel prin metoda nivelmentului geometric sînt denumite în mod curent *nivele*. Dar, aceeași denumire este acceptată, aproape fără excepție, și pentru dispozitivele de orizontalizare propriu-zise, menționate deja în structura teodolitelor (v. 14.1.5) și care vor interveni și în structura instrumentelor de nivelment. Fiind însă vorba de lucruri complet diferite, confuzia este aproape imposibilă. A existat și propunerea de introducere a denumirii de „nivelmetru" pentru astfel de aparate, sau instrumente, care însă nu a găsit adepți, astfel încît a fost părăsită.

Evoluția acestor instrumente a fost impulsionată de descoperirea în anul 1662 a *nivelei torice* de către mecanicul francez *Thévenot* (*Deumlich* 1967). Primele instrumente, construite la puțin timp după aceea au fost prevăzute cu ocular, șurub de basculare, dispozitive de reglaj ș.a.

Și în domeniul construcției instrumentelor moderne de nivelment trebuie remarcate realizările lui *H. Wild*, care în anul 1908 construiește primele nivele cu lunete cu focusare interioară. Tot el realizează în anii următori complexul constituit de micrometrul cu plăci plane și paralele și mirele de invar, care de atunci și pînă în prezent au cunoscut o aplicabilitate generală în lucrările geodezice de precizie.

Construcția instrumentelor de nivelment a cunoscut etape distincte de evoluție, reprezentate prin diverse tipuri și categorii concrete (*Jordan* 1956, *Filimon* ș.a. 1958 ș.a.), care însă sînt practic scoase din uz, enumerarea

lor selectivă avînd doar rolul unei posibilităţi de comparaţie cu ceea ce se foloseşte în prezent:

— instrument cu luneta reversibilă (în jurul axei sale geometrice) şi nivela fixată lateral pe lunetă sau fixată independent de lunetă;

— instrument cu lunetă mobilă şi nivela fixată pe traversă;

— instrument cu luneta şi nivela mobile, împreună sau separat, nivela fiind aşezată deasupra, lateral sau sub lunetă.

Un salt remarcabil este realizat în anul 1938, la firma *Carl Zeiss* din *Jena*, unde se realizează modelul A, *de tip rigid*, la care luneta şi nivela torică de precizie constituie un ansamblu unitar, care poate primi deplasări foarte mici în plan vertical prin intermediul şurubului de basculare. Acest tip de nivele a cunoscut ulterior o largă dezvoltare.

În anul 1950 firma *Zeiss Oberkochen* construieşte modelul Ni 2, primul din categoria instrumentelor de nivelment *automate*, la care înclinarea axei de vizare a lunetei este rectificată printr-un sistem compensator, care înlocuieşte, prin urmare, nivela torică de precizie. Această nouă clasă de instrumente de nivelment a cunoscut în continuare o largă dezvoltare şi, ca urmare, o utilizare frecventă în lucrările geodezice-topografice de precizie sau de mare precizie.

În manual vor fi avute în vedere numai nivelele de tip rigid, respectiv cu compensator, singurele care se folosesc în prezent în reţelele geodezice de sprijin.

16.1. STRUCTURA INSTRUMENTELOR DE NIVELMENT

Părţile constitutive comune instrumentelor de nivelment de tip rigid se vor prezenta pentru instrumentul de nivelment de înaltă precizie *Zeiss Ni 004* (fig. 16-1, *a*, *b*) în raport cu care se vor face completări şi adăugiri.

Asemănător ca la teodolite, se pot distinge două părţi generale de structură a instrumentelor de nivelment (nivelelor):

— *partea inferioară* a instrumentului, care rămîne fixă la măsurarea diferenţelor de nivel, fiind formată din şuruburi de calare *1*, suportul nivelei *2*. Cu rare excepţii, instrumentele folosite în reţelele geodezice *nu au* cerc orizontal;

— *partea superioară* a instrumentului, mobilă în timpul măsurării diferenţelor de nivel care este alcătuită din: nivele torice de calaj *3* (înlocuite la alte tipuri de instrumente cu nivelă sferică de calaj), nivela torică de precizie *4* (a cărei imagine poate fi observată în cîmpul ocularului prin acţionarea moletei *5*), clemă de blocare a mişcării generale orizontale *6*, şurub de mişcare fină orizontală *7*, luneta *8* (cu partea anterioară a obiectivului *9*, ocularul *10*, moleta de acţionare a sistemului de focusare *11*), şurubul de basculare *12*, şurubul de acţionare a micrometrului cu plăci plane şi paralele *13*, lupă pentru citiri pe tamburul micrometrului *14* şi alte dispozitive auxiliare (la alte tipuri de instrumente).

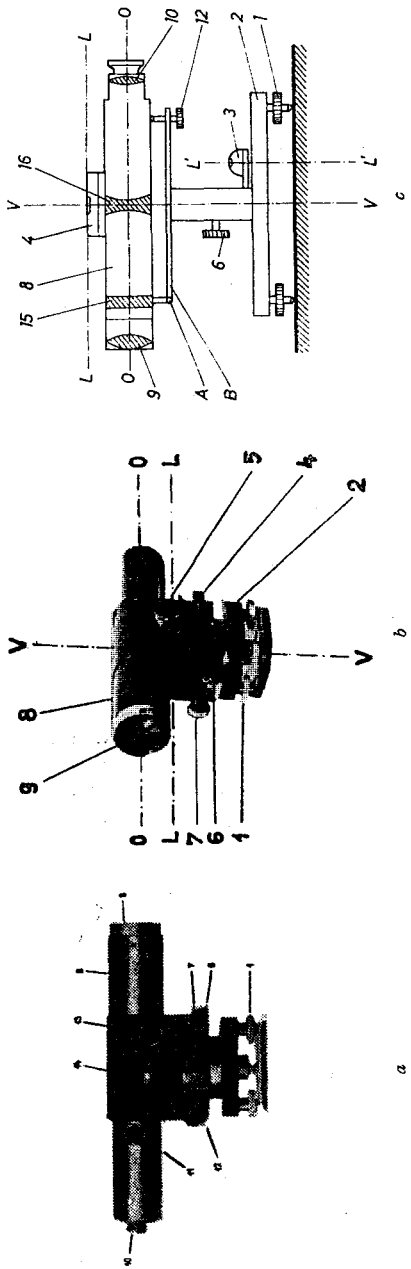


Fig. 16-1. Instrumentul de nivelment Zeiss *Ni 004*:
a, *b* — imagini ale instrumentului; *c* — schema de funcţionare.

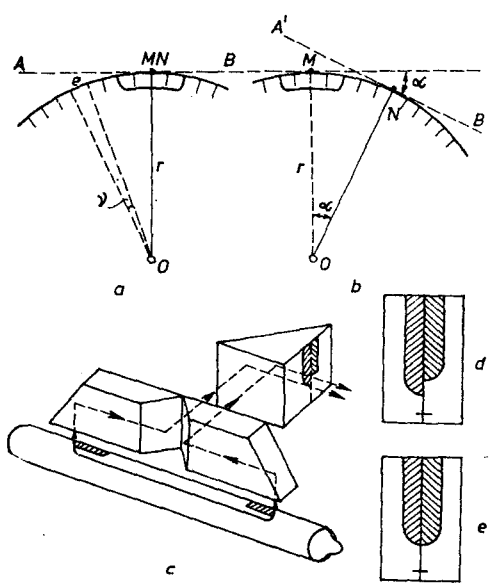
16.1.1. SISTEMUL DE AXE ALE INSTRUMENTULUI DE NIVELMENT

Sistemul de axe al instrumentului de nivelment poate fi urmărit în figura 16-1, *c*, în care s-au păstrat notaţiile din figura 16-1, *a*, *b*, precum şi în figura 16-3.

● *Axa principală* notată *VV* este axa tubului care uneşte partea inferioară cu partea superioară a instrumentului. Acest ax ocupă o poziţie practic verticală în timpul măsurării diferenţelor de nivel, aducerea sa în această poziţie realizîndu-se cu nivelele de calaj. La instrumentele de tip rigid, nu este absolut necesar ca axa principală să fie adusă într-o poziţie perfect verticală, motiv pentru care nivelele de calaj *3* au o sensibilitate mică în general. Motivarea constă în faptul că luneta *8* (solidară cu nivela torică de precizie *4*) poate căpăta o mişcare în plan vertical prin intermediul şurubului de basculare *12* pînă cînd axa de vizare *OO* ocupă o poziţie orizontală.

● *Axa de vizare OO* a fost definită în 14.1.1.

● *Axa nivelei torice de precizie* notată *LL* (denumită curent şi *directricea nivelei*) este reprezentată de tangenta dusă în punctul normal al nivelei, în partea interioară a torului de sticlă. Punctul normal *N* al nivelei (fig. 16-2, *a*, *b*) este punctul situat la mijlocul său (sau la mijlocul diviziunilor, cînd acestea există). Se notează cu *M* centrul bulei (care se poate deduce din media lecturilor la capetele acesteia). Cînd *M* şi *N* coincid, axa nivelei este orizontală (fig. 16-2, *a*).



Elementele caracteristice ale unei nivele sînt: r — raza de curbură a torului, e — lungimea unei diviziuni (de obicei $e = 2$ mm) şi v'' — sensibilitatea nivelei, exprimată curent în numărul de secunde sexagesimale ale unghiului la centru pentru o diviziune a nivelei (fig. 16-2, *a*):

$$v'' = \rho'' \frac{e}{r}. \quad (16\text{-}1)$$

Prin urmare, cu cît v'' este mai mic, cu atît nivela este mai sensibilă.

Fig. 16-2. Nivelă torică:
a — axa nivelei în poziţie orizontală; *b* — axa nivelei înclinată; *c* — sistemul de prisme care transmite imaginea poziţiei bulei nivelei; *d* — imaginile capetelor bulei înainte de realizarea coincidenţei; *e* — imagine după realizarea coincidenţei.

De cele mai multe ori nivelele torice de precizie sînt *cu coincidenţă* (fig. 16-2, *c*), poziţia bulei putînd fi observată în cîmpul lunetei (fig. 16-2, *d*, *e*).

Principiul de funcţionare al unui instrument de nivelment de tip rigid poate fi enunţat în felul următor: acceptînd paralelismul dintre axele *OO* şi *LL*, prin aducerea în coincidenţă a nivelei torice de precizie, axa de vizare *OO* devine orizontală, astfel încît se pot face determinări de diferenţe de nivel.

● *Axa nivelei sferice de calaj L'-L'* este reprezentată de perpendiculara la planul tangent la bula nivelei, dus în punctul normal.

16.1.2. LUNETA INSTRUMENTULUI DE NIVELMENT

Lunetele instrumentelor de nivelment au structuri asemănătoare cu cele ale teodolitelor (v. 14.1.2).

În figura 16-1, *c* este prezentată în principiu, iar în figura 16-3 în mod concret structura unei lunete la instrumentele de nivelment: partea anterioară a obiectivului *9*, ocularul *10*, sistemul optic de focusare *16*. Părţile constructive, precum şi caracteristicile tehnice ale lunetei fiind similare cu cele prezentate în 14.1.2.1, 14.1.2.2., 14.1.2.4, se vor examina elementele noi de structură care intervin în lunetele instrumentelor de nivelment în general şi a celor de tip rigid în special.

16.1.2.1. **Placa cu feţe plane şi paralele.** Pentru a putea determina cu exactitate fracţiuni de diviziuni de pe mirele de nivelment, instrumentele au în structura lor un dispozitiv constituit dintr-un micrometru care acţionează asupra unei plăci plane şi paralele (notată cu *15* în fig. 16-1, *c*) care se interpune în calea razelor de lumină.

Principiul de funcţionare al dispozitivului este prezentat în figura 16-4. Placa cu feţe plane şi paralele este de cele mai multe ori încadrată în lunetă şi doar la unele modele mai vechi în afara acesteia.

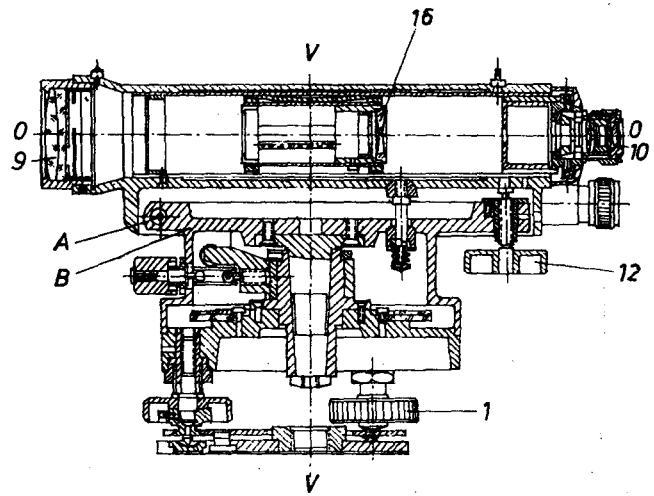


Fig. 16-3. Secţiune verticală prin nivela de tip rigid *Nitac, Otto Fennel.*

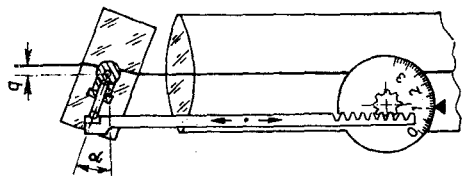


Fig. 16-4. Dispozitivul micrometric cu placă cu fețe plane și paralele (schemă de funcționare).

La majoritatea instrumentelor moderne placa cu fețe plane și paralele se află amplasată în interiorul lunetei, în fața obiectivului, astfel încît reprezentările schematice din figura 16-1, *c* și 16-4 au doar un rol didactic, demonstrativ. Prin intermediul unui tambur gradat (de obicei în 100 diviziuni) și al unei bare de transmisie, placa cu fețe plane și paralele poate fi înclinată cu diverse unghiuri α. În consecință, razele de lumină sînt deplasate paralel cu sensul de intrare, cu o cantitate q, proporțională cu unghiul α [v. relația (14-4)].

De cele mai multe ori, unei rotații complete a tamburului îi corespunde o deplasare egală cu 5 mm, ceea ce înseamnă că o diviziune întreagă pe micrometru are un echivalent de 0,05 mm pe miră. În nivelmentul de precizie se aproximează fracțiuni de ordinul $\pm$ 0,1 diviziuni de pe tambur, ceea ce ar avea ca echivalent $\pm$ 0,005 mm pe miră.

Constructorii sovietici de instrumente de nivelment din seria *NB* au introdus placa cu fețe plane și paralele *3* în interiorul obiectivului, care este astfel format din trei componente (fig. 16-5).

16.1.2.2. **Reticulul.** În completare la ceea ce s-a menționat în 14.1.2.3., trebuie arătat doar că reticulul lunetelor instrumentelor de nivelment folosite în prezent pentru determinarea precisă a diferențelor de nivel este de forma prezentată în figura 16-6, *a*. *Sistemul de gravare în pană* a reticulului permite observarea prin încadrare a unei diviziuni de pe miră. La unele nivele gravarea reticulului este realizată cu două pene, de deschideri diferite, pentru a putea fi folosite după necesități, în funcție de distanța aparat-miră. În figura 16-6, *b* se prezintă imaginea

Fig. 16-5. Obiectiv complex, cu placa cu fețe plane și paralele în interior.

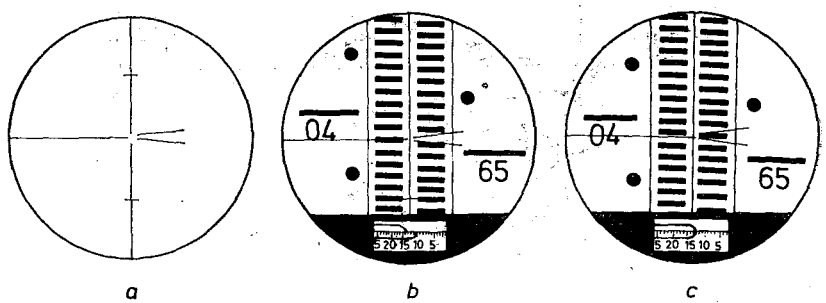


Fig. 16-6. Operațiuni pregătitoare pentru efectuarea lecturii pe miră:
a — reticulul lunetei; *b* — situația înainte de aducerea în coincidență a nivelei torice de precizie și de încadrare a unei diviziuni de pe miră; *c* — situația în care se poate face lectura pe miră *(648)*.

înainte de a se realiza încadrarea unei diviziuni de pe miră, iar în figura 16-6, *c* după încadrare. Operațiunea de încadrare se realizează prin acțiunea tamburului micrometrului *13* cu fețe plane și paralele (v. fig. 16-1).

16.1.2.3. **Șurubul de basculare (de elevație).** *Șurubul de basculare* (numit și *șurub de elevație*) care a fost notat cu *12* în figurile 16-1 și 16-3, nu poate fi considerat un element de structură a lunetelor instrumentelor de nivelment. Totuși, prezentarea șurubului de basculare în acest cadru este justificată, deoarece prin acționarea sa luneta poate fi orizontalizată cu mare precizie. Mișcarea fină de rotație în plan vertical se realizează în jurul punctului de rotație *A* al barei *B* (fig. 16-1, *b*, *c* și 16-3), care se transmite lunetei și nivelei torice de precizie. Acțiunea este urmărită în cîmpul lunetei, în figurile 16-6, *b*, *c* fiind prezentate situațiile înainte și respectiv după aducerea în coincidență a bulei nivelei torice de precizie.

16.1.3. SISTEME DE COMPENSAȚIE A ÎNCLINĂRII AXEI DE VIZARE

Tendința de dezvoltare tot mai accentuată a instrumentelor de nivelment prevăzute cu sistem de compensație a înclinării axei de vizare se va accentua, mai mult ca sigur, și în viitor. Instrumentele cu compensator sînt tot mai solicitate deoarece randamentul este evident mărit, fără a se face concesii preciziei de determinare. Fără a diminua aceste avantaje, trebuie arătat, totuși, că stabilitatea acestui tip de instrumente în timpul lucrului este mai mult afectată de trepidații (provocate de exemplu de circulația vehiculelor) sau de acțiunea vîntului, în comparație cu nivelele de tip rigid.

Principiul de funcționare a sistemului de compensație a înclinării axe de vizare poate fi urmărit în figura 16-7. Dacă axa de vizare are o poziție orizontală, atunci imaginea unui punct situat în planul orizontal care conține această axă se va forma pe firul reticular orizontal. Înclinarea axei de vizare cu un unghi oarecare α (fig. 16-7, *a*) determină formarea imaginii acestui punct în S_0 și nu în S, la o distanță a, în raport cu firul reticular orizontal:

$$a = \overline{SS}_0 = f \operatorname{tg} \alpha \approx f \alpha. \qquad (16\text{-}2)$$

Aproximația din relația (16-2) este posibilă deoarece unghiul α este mic, axa de vizare fiind aproape orizontală prin operațiunea de calaj. Pentru

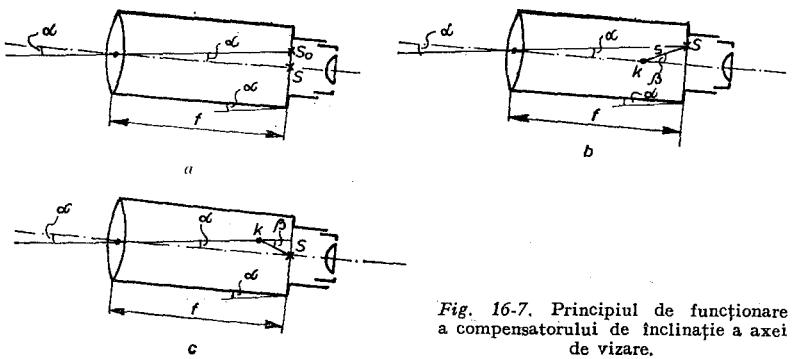


Fig. 16-7. Principiul de funcționare a compensatorului de înclinație a axei de vizare.

compensația înclinării axei de vizare există următoarele două posibilități principiale:

— deplasarea firelor reticulare din poziția S în S_0 (fig. 16-7, *b*);

— deplasarea razei de lumină astfel încît S_0 să ajungă în S (fig. 16-7, *c*).

Operațiunea se realizează prin instalarea în punctul K a unui element constructiv distinct denumit *compensator de înclinație a axei orizontalei* sau mai simplu *compensator*. Unghiul de deviație β din punctul K poate fi determinat din relația:

$$f/s = \beta/\alpha = m, \qquad (16\text{-}3)$$

unde $s = \overline{KS}$, iar m se numește *coeficient de amplificare unghiulară al compensatorului*. Poziția punctului K influențează direct asupra coeficientului m. Dacă $m = 1$, atunci $s = f$, adică punctul K coincide cu punctul principal al obiectivului. Pentru a se realiza dimensiuni constructive mici pentru sistemul de compensație, punctul K este poziționat în apropierea firelor reticulare, adică:

$$s \ll f/2 \quad \text{și deci} \quad m \gg 2. \qquad (16\text{-}4)$$

Pentru a examina modalitatea de realizare efectivă a sistemelor de compensație la unele dintre cele mai folosite nivele, în figura 16-8, *a* se prezintă principiul de funcționare a sistemului de compensație a înclinării axei de vizare la instrumentul *Zeiss Ni 007*. Este cunoscut că prisma *2*, de 100^g, deviază prin dublă reflexie raza emergentă cu 200^g. Dacă această prismă este suspendată, ca un pendul de lungime $f/2$ în raport de obiectiv, atunci sistemul funcționează după ecuațiile (16-4). În adevăr, la o înclinare α a obiectivului raza incidentă este deviată cu cantitatea x față de poziția orizontală corectă, iar raza emergentă cu cantitatea $2x$ în raport de această poziție.

Prin urmare $m = 2$ și în consecință raza de lumină orizontală, situată la nivelul axei de vizare, va trece întotdeauna prin firul reticular orizontal,

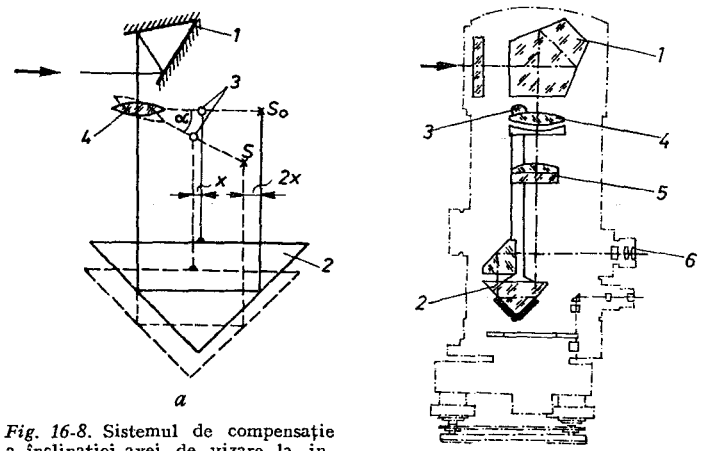


Fig. 16-8. Sistemul de compensație a înclinației axei de vizare la instrumentul *Ni 007*:

a — schema de principiu; *b* — realizarea efectivă; *1* — prismă (respectiv oglinzi) pentru preluarea imaginilor; *2* — prismă pentru devierea cu 200^g a razelor de lumină; *3* — punctul de suspensie a pendulului; *4* — obiectiv; *5* — sistemul optic de focusare; *6* — ocular.

chiar dacă obiectivul are o înclinare mică α, în raport de orizontală (determinată de o poziție neverticală a instrumentului). În figura 16-8, *b* se prezintă în detaliu sistemul de compensație realizat la instrumentul Ni 007 (la instrumentele produse de firma *Carl Zeiss Jena* cifra care însoțește denumirea exprimă eroarea medie în 0,1 mm/km — în cazul de față 0,7 mm/km).

Sistemul de compensație utilizat la nivela Ni 2 a firmei *Zeiss Oberkochen* este prezentat în figura 16-9. Principiul de funcționare este redat în figura 16-9, *a* și se bazează pe utilizarea unui patrulater articulat $ABCD$, suspendat în punctele A și B, la baza CD existînd o prismă cu reflexie totală (fig. 16-9, *b*, *c*). Dacă muchia $AB = a$ este înclinată cu un unghi α, atunci baza de reflexie $CD = c$ este înclinată cu un unghi β. La instrumentul Ni 2, $\beta = 3{,}7\ \alpha$ și deoarece la această mărime, realizată mecanic, se adaugă și mărirea optică de genul celei descrise anterior (prin intermediul altor două prisme) se reușește ca mărimea coeficientului de amplificare unghiulară să fie $m = 7{,}4$, deci mult mai mare decît la instrumentul Ni 007, unde $m = 2$.

Un alt sistem de compensație a înclinației axei de vizare este folosit la instrumentul de înaltă precizie Ni 002 produs de firma *Carl Zeiss Jena* (fig. 16-10, *a*). Sistemul este format de oglinda *3* suspendată ca un pendul, astfel încît ocupă o poziție verticală. Amplasarea sistemului compen-

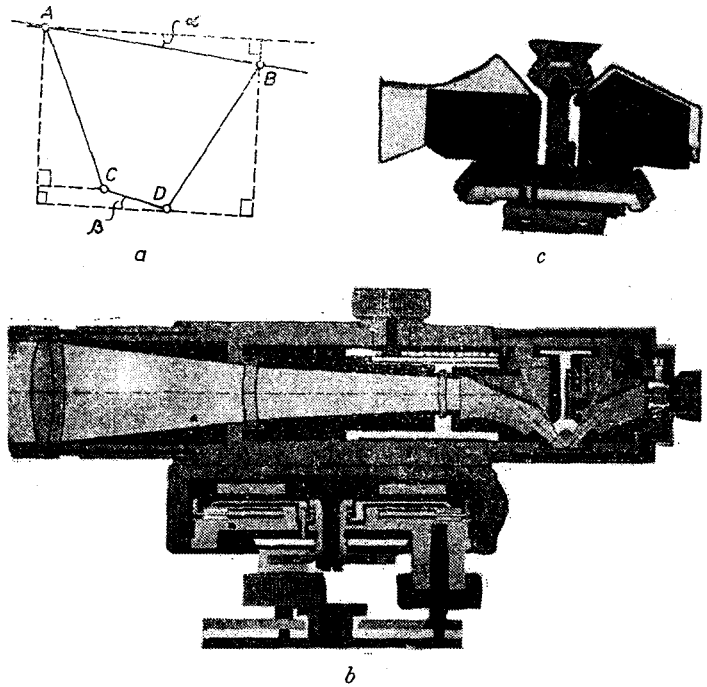
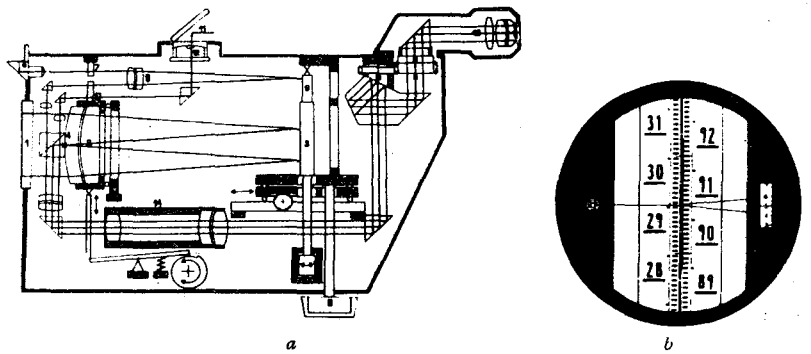


Fig. 16-9. Sistemul de compensație a înclinației axei de vizare la instrumentul *Ni 2*:

a — patrulaterul articulat; *b* — secțiune prin instrument; *c* — detaliu de construcție a compensatorului.



a b

Fig. 16-10. Instrumentul de înaltă precizie *Ni 002*:
a — secțiune prin instrument; *b* — imaginea în cîmpul ocularului (lectura pe miră: *908496*).

sator pendular este la o distanță egală cu *f*/2 în raport cu obiectivul 2, astfel că mărimea coeficientului de amplificare unghiulară este $m = 2$. Constructorii au prevăzut posibilitatea aducerii compensatorului în două poziții, prin acționarea butonului *5*. Măsurarea în cele două poziții asigură obținerea unui orizont cvasiabsolut, cu o eroare de $\pm$ 1'', practic indiferent de temperatura de lucru și înclinarea axei de vizare. În consecință ar decurge următoarele avantaje de ordin practic:

— s-ar putea măsura cu portei neegale;

— s-ar putea renunța la protecția umbrelei solare.

Totuși, pentru mai multă siguranță, în lucrările de înaltă precizie, aceste facilități nu sînt valorificate.

Sistemul optic al lunetei este constituit din obiectivul *2*, instalat în spatele plăcii de sticlă protectoare *1*, oglinda *3* care reprezintă și sistemul de focusare, reticulul *4* amplasat pe obiectiv, ocularul *13*. În acest sistem se interpun diverse prisme, precum și telesistemul *14*, care asigură ca imaginea obiectului vizat și a reticulului să se formeze în planul imagine al ocularului.

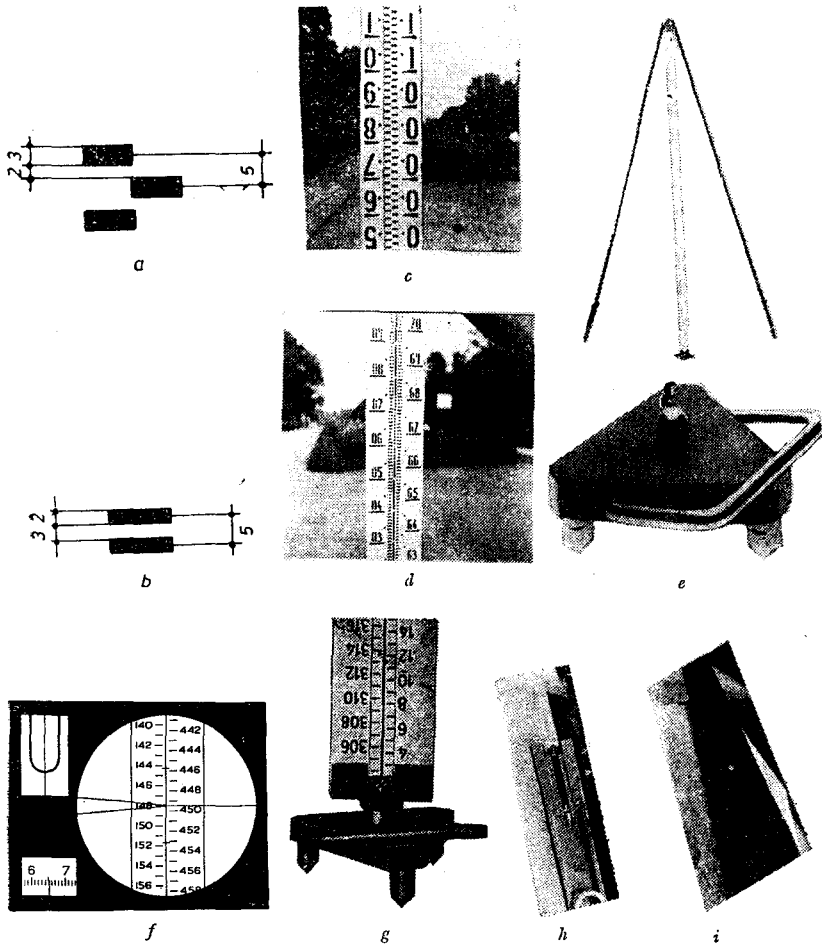
Indexul fix al micrometrului *7* este iluminat prin intermediul prismei *6*. Prin sistemul optic *8* și oglinda suplimentară *9* (solidară cu oglinda compensatorului *3*) indexul este proiectat pe scala micrometrului *10*, imaginea acestora formîndu-se, de asemenea, în planul imagine al ocularului. În mod asemănător se formează și imaginea nivelei sferice de control *12*, iluminată de oglinda *11*.

Recapitulînd, în planul imagine al reticulului se formează imaginile mirei, ale diviziunilor tamburului micrometrului optic și ale indexului fix, precum și ale nivelei sferice de control (fig. 16-10, *b*).

Ocularul instrumentului este pivotabil, astfel încît se pot efectua lecturi și din părțile laterale, ceea ce constituie un avantaj remarcabil în timpul observațiilor.

16.1.4. EFECTUAREA LECTURILOR

Mirele folosite în lucrările geodezice actuale prezintă o mare varietate atît în privința realizării propriu-zise, cît și a modalității de divizare. În figurile 16-11, *a*, *b*, se prezintă două dintre cele mai des întîlnite



a c b d e f g h i

Fig. 16-11. Mire și broaște de nivelment.

modalități de divizare. În prima situație, pe miră există un singur șir de gradații, dispuse intercalat, numerotate unitar pe toată suprafața mirei (echivalentul real este prezentat în figura 16-11, *c*), diviziunile avînd grosimi de 3 mm, iar intervalul dintre ele fiind de 2 mm. În cea de a doua situație, pe miră există două șiruri de gradații, numerotate independent (echivalentul real este prezentat în figurile 16-6, *b*, *c*, 16-10, *b* și 16-11, *d*), diviziunile avînd grosimi de 2 mm, iar intervalul dintre ele fiind de 3 mm. În ambele situații considerate, distanța dintre două diviziuni consecutive este de 5 mm. Pentru mărirea preciziei de citire pe miră numerotarea diviziunilor este dublată în raport cu realitatea și ca urmare, după efectuarea unei citiri, valoarea reală se va deduce prin împărțirea la 2. În cazul mirelor

cu dublă gradație, citirile diferă printr-o constantă, ceea ce oferă o bună posibilitate de control operativ în timpul lucrului în stație.

Acțiunea micrometrului cu placă cu fețe plane și paralele a fost prezentată în 16.1.2.1, iar efectuarea unei citiri are loc astfel:

— se realizează punerea la punct a lunetei, astfel încît imaginea mirei și a firelor reticulare să se formeze corect, în planul imagine al ocularului. În cîmpul lunetei se observă, de asemenea, imaginea nivelei torice de precizie (la instrumentele de tip rigid) sau, uneori, imaginea nivelei sferice de calaj și chiar a lecturii pe micrometru (la instrumentele *Zeiss* Ni-002, figura 16-10, *b* sau *Wild* N 3, figura 16-11, *f*);

— la instrumentele cu nivelă torică de precizie se aduc în coincidență imaginile capetelor bulei (la nivelele cu compensator operațiunea nu mai este necesară);

— prin acționarea tamburului micrometrului se realizează încadrarea unei diviziuni de pe miră în reticul (cînd reticulul este format din două pene se va utiliza pana cu deschidere mai mare pentru portei mici);

— lectura este formată din două grupuri de cifre: 3 cifre se „culeg" de pe miră (2 cifre se citesc direct, iar a treia provine din numărarea diviziunilor) și 3 cifre se „culeg" de pe tambur (1 cifră se citește direct, următoarea rezultă din numărarea diviziunilor, iar ultima din aproximarea fracțiunii de pe diviziunea considerată). Revenind la exemplul de citire prezentat în figura 16-10, *b* rezultă: de pe miră —908, iar de pe tambur 496, astfel că lectura considerată va fi 908496. Această lectură este înregistrată în carnet, urmînd ca în finalul operațiunilor de teren lecturile înregistrate să se împartă la 2, rezultînd în exemplul nostru 454 248, care este echivalentul real al lecturii considerate.

Analog se efectuează lectura și la instrumentul Wild N 3 (fig. 16-11, *f*) obținîndu-se 148 653.

16.2. INSTRUMENTE ȘI DISPOZITIVE AUXILIARE

16.2.1. MIRE DE NIVELMENT

În lucrările de nivelment geometric care se efectuează în rețelele geodezice se folosesc, aproape fără excepție, *mire cu bandă de invar* denumite uzual *mire de invar*. În lucrările de mică precizie, instrucțiunile admit și utilizarea mirelor de lemn (cunoscute de la *cursul de topografie*).

Așa cum s-a mai menționat, există mire de invar cu o singură gradație (fig. 16-11, *a*, *c*) și respectiv cu gradații duble, decalate între ele cu o anumită constantă (fig. 16-10, *b* și 16-11, *b*, *d*, *f*).

În lucrările geodezice se folosesc în mod curent mire de invar de 3 m și mai rar mire de 1,75 m sau de alte dimensiuni.

Pentru păstrarea constanței lungimii benzii de invar, aceasta este supusă unei tensiuni constante, printr-un dispozitiv încorporat în talpa mirei (fig. 16-11, *h*). La etalonarea mirelor de invar, care se efectuează în laboratoare specializate și autorizate, înainte și după terminarea campaniei de teren, se verifică tensionarea benzii de invar aducîndu-se corecturile necesare. Concomitent, se stabilește cu precizia de ordinul $\pm$ 0,001 mm lungimea mirei în dreptul fiecărei diviziuni.

Mirele de invar sînt dotate cu nivele sferice (fig. 16-11, *i*), ceea ce permite aducerea lor în poziție corectă de lucru. Periodic și desigur cu prilejul etalonării mirelor, nivelele sferice sînt verificate și reglate corespunzător. Sensibilitatea nivelei sferice este cuprinsă între 5′ și 20′.

16.2.2. SUPORT DE MIRĂ, BROAȘTE DE NIVELMENT

În lucrările de nivelment de precizie mirele sînt susținute în poziție verticală cu ajutorul unor suporți de miră de forma celui prezentat în figura 16-11, *e*.

În poziție de lucru mirele sînt așezate pe broaște de nivelment (fig. 16-11, *c*, *d*, *e*, *g*) și, uneori, pe țăruși de lemn sau metalici în zone mai puțin stabile. De semnalat că *întotdeauna* mira se va instala pe un obiect de formă semisferică, întîlnit atît la reperele și mărcile de nivelment (prezentate în 13.4), precum și la broaștele de nivelment sau la țărușii folosiți.

16.3. CLASIFICAREA INSTRUMENTELOR ACTUALE DE NIVELMENT GEOMETRIC (NIVELELOR)

Instrumentele actuale de nivelment geometric, folosite în rețelele geodezice, pot fi clasificate, în principal, din două puncte de vedere.

● *Clasificare în funcție de modalitatea de orizontalizare a axei de vizare*:

— instrumente de nivelment cu nivelă torică de precizie, solidară cu luneta, prevăzute cu șurub de basculare. Axa de vizare este orizontalizată prin acționarea șurubului de basculare (de elevație) în funcție de indicațiile nivelei torice de precizie. Acest instrumente sînt denumite uzual *nivele de tip rigid*;

— instrumente cu sistem de compensație a înclinării axei de vizare, denumite uzual *nivele cu compensator* sau *nivele automate*.

● *Clasificare în funcție de precizia de citire pe miră*. Caracteristicile instrumentale care determină în cea mai mare măsură precizia de citire pe miră sînt:

— sensibilitatea nivelei torice de precizie, notată υ'' (pentru o diviziune de 2 mm pe nivelă) și corespunzător sensibilitatea sistemului de compensație;

— puterea de mărire a lunetei M.

Din punctul de vedere al preciziei de citire pe miră se pot distinge:

— *instrumente de precizie*, utilizate în rețelele de nivelment geometric de stat de ordinele III, IV și în alte rețele de nivelment similare. Aceste instrumente sînt caracterizate prin: $\upsilon'' < 30''$ și $M > 25$ X. O selecție a unor instrumente de acest tip se prezintă în tabelul 16-1 și figura 16-12;

— *instrumente de mare precizie*, utilizate în rețelele de nivelment geometric de stat de ordinele I, II și în alte rețele de nivelment similare. Această categorie de instrumente este caracterizată prin: $\upsilon'' < 10''$ și $M > 40$ X. O selecție a unor instrumente de acest tip se prezintă în tabelul 16-2 și figura 16-13.

Tabelul 16-1

Denumirea instrumentului	Firma producătoare	Luneta				Nivele		Masa [kg]	Înălțimea [mm]	Eroarea medie [± mm/km]	Observații
		Puterea de mărire	Diametrul obiectivului [mm]	Lungimea [mm]	Distanța minimă de vizare [m]	Sensibilitatea nivelei torice ["]	Sensibilitatea nivelei de calaj ["]				
GK 23	*Kern*	30	45	170	1,8	18	6	1,5	110	2	
N 2	*Wild*	30	40	196	1,6	20	8	2,2	137	3	
NiB 11	*MOM*	28	40	160	1,2	20	6	2,2	137	3	
Ni 030	*Zeiss Jena*	25	35	195	1,8	30	8	1,8	120	3	
GK 2 A	*Kern*	32,5	45	200	2,2	—	10	3,5	190	0,7	Compensator — pendul cu oglindă
Ni B 3	*MOM*	28 32	45	272	3,0	—	8	2,3	130	2	Compensator — sistem Porro
Ni 2	*Opton Oberkochen*	32	40	270	3,3	—	10	2,1	130	0,7	Compensator — prismă cu patrulater articulat
NA 2	*Wild*	32 40	45	246	1,6	—	8	2,4	138	0,7	Compensator — pendul cu prismă
Ni 007	*Zeiss Jena*	31,5	40	—	2,2	—	8	3,9	335	0,7	Compensator — pendul cu prismă

16.4. VERIFICAREA ȘI RECTIFICAREA INSTRUMENTELOR DE NIVELMENT GEOMETRIC

Erorile instrumentelor de nivelment au aceleași caracteristici generale cu cele ale teodolitelor (ordinul de mărime, gradul de independență, posibilități de rectificare sau, respectiv, de determinare prin calcul a influenței lor în procesul de măsurare ș.a.m.d.).

16.4.1. VERIFICAREA ȘI RECTIFICAREA INSTRUMENTELOR DE NIVELMENT DE TIP RIGID, CU ȘURUB DE BASCULARE

Verificarea și rectificarea unui instrument rigid, prevăzut cu șurub de basculare, se va face în ordinea prezentată în continuare pentru a se preîntîmpina refaceri sau chiar reluarea completă a operațiunilor.

16.4.1.1. **Perpendicularitatea dintre axa nivelei torice de precizie LL și axa principală VV.** Așa cum s-a specificat (v. 16.1.1), la instrumentele de

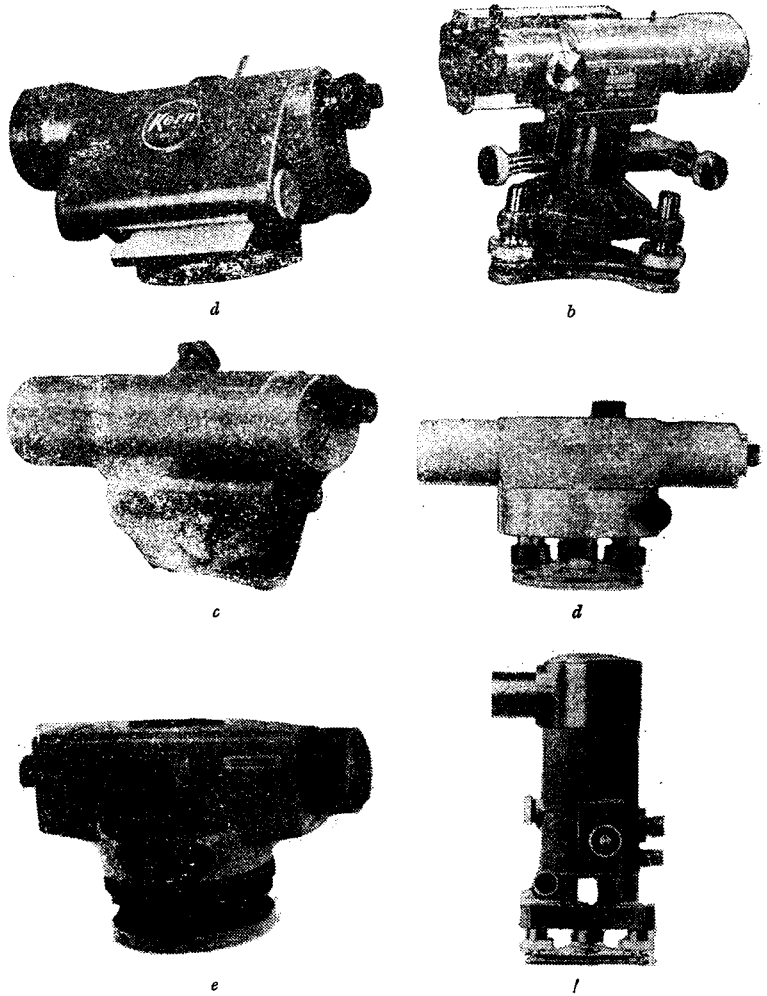


Fig. 16-12. Instrumente de nivelment de precizie (selecție):
a — Kern GK 23; b — Wild N 2; c — MOM Ni-B 3; d — OPTON Ni 2; e — Wild NA 2; f — Zeiss Ni 007.

tip rigid cu șurub de basculare nu este neapărat necesară respectarea condiției de perpendicularitate dintre axa nivelei torice de precizie LL și axa principală a instrumentului VV. Motivația constă în faptul că, admițînd că instrumentul a fost calat corespunzător cu nivela sau nivelele de calaj, *la fiecare citire* axa nivelei torice de precizie este adusă în poziție orizontală prin acționarea șurubului de basculare.

Prin urmare, nu se va face verificarea propriu-zisă a condiției $LL \perp VV$. Deoarece însă condiția de orizontalitate a axei LL se realizează curent cu

Tabelul 16-2

Denumirea instrumentului	Firma producătoare	Luneta				Nivele		Masa [kg]	Înălțimea [mm]	Eroarea medie [±mm/km]	Observații
		Puterea de mărire	Diametrul obiectivului [mm]	Lungimea [mm]	Distanța minimă de vizare [m]	Sensibilitatea nivelei torice ['']	Sensibilitatea nivelei de calaj ['']				
Ni 004	*Zeiss Jena*	44	56	375	3,0	10	4	6,2	220	0,4	
N 3	*Wild*	46	52	297	0,5	10	4	5,1	181	0,2	
NA 1	*Aerogheopribor*	42	56	400	3,0	10	4	5,8	200	0,5	
NABON	*Breithaupt*	42	50	335	2,0	8	4	6,6	220	0,2	
5190	*Filotecnica Salmoiraghi*	39	45	—	3,9	—	10	6,9	500	0,3	Compensator — pendul cu placă
Ni A 31	*MOM*	30 50	67	210	2,5	—	10	3,0	175	0,2	Compensator — pendul cu oglindă
Ni 1	*Opton Oberkochen*	40 50	50	407	1,4	—	5	5,2	180	0,2	Compensator — prismă cu patrulater articulat
Ni 002	*Zeiss Jena*	40	55	370	1,5	—	8	6,5	310	0,2	Compensator — pendul cu oglindă

șurubul de basculare, este necesară *aducerea sa într-o poziție mijlocie*, în raport cu care să se poată acționa apoi numai prin rotiri foarte mici ale șurubului de basculare. Această operațiune decurge în felul următor:

— se aduce șurubul de basculare într-o poziție medie aproximativă prin numărări de rotații complete ale acestuia;

— se realizează în continuare calajul instrumentului prin utilizarea nivelei torice de precizie (fig. 16-14). În poziția *a* nivela este adusă în coincidență prin acționarea șuruburilor de calaj *1* și *2*. În continuare, în poziția *b* coincidența se realizează din șurubul de calaj *3*;

— prin aducerea nivelei în poziția „cap la cap" (fig. 16-14, *c*), se constată o abatere față de figura 16-14, *b*, care se elimină asemănător ca în cazul rectificării nivelelor torice: o jumătate din deviere se rectifică acționînd asupra șurubului de calaj *3* și cealaltă jumătate prin acționarea șurubului de basculare. Operațiunea de la acest punct se repetă, atît cît este necesar, aducîndu-se în continuare nivela torică în cazul „cap la cap" și făcînd rectificările menționate;

— atunci cînd se constată abateri nesemnificative la operația descrisă anterior, se aduce nivela torică de precizie din nou în poziția din figura 16-14, *a* și se reface calajul pe direcția corespondentă prin acționarea în mod uniform și în sens antagonist a celor două șuruburi de calaj *1* și *2*.

Dacă operațiunea a fost corect efectuată, pentru orice poziție a lunetei în turul de orizont nivela torică este în coincidență, iar șurubul de basculare

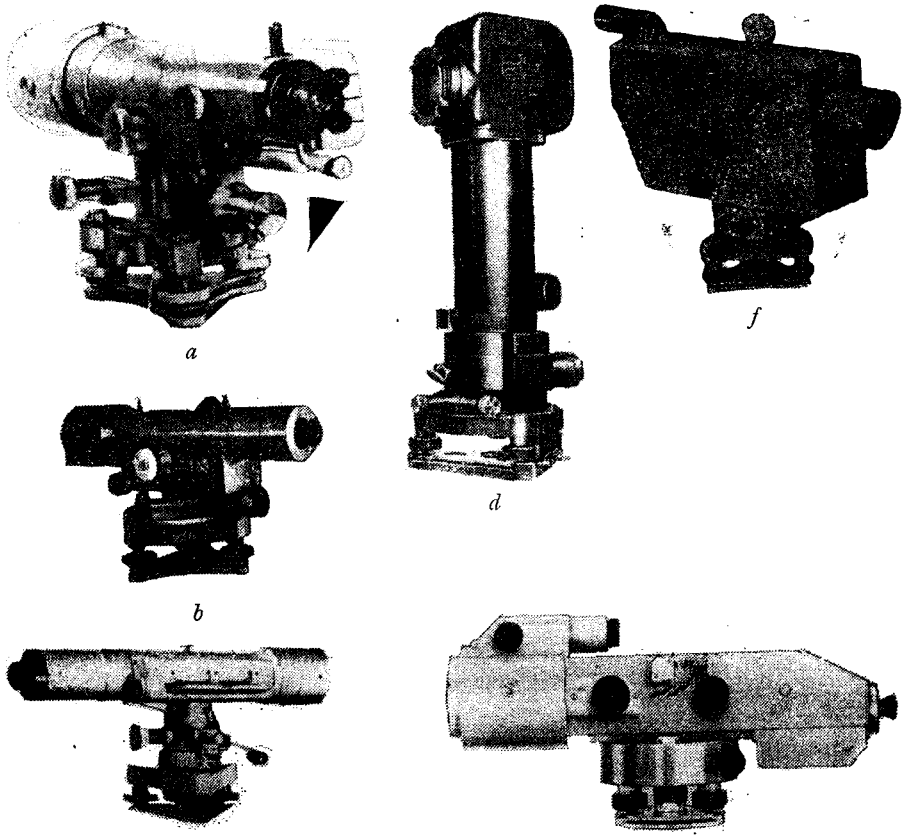


Fig. 16-13. Instrumente de nivelment de înaltă precizie (selecție):
a — Wild N 3; b — Breithaupt NABON; c — Aerogheopribor NA 1; d — Filotecnica Salmoiraghi 5 190; e — OPTON Ni 1; f — Zeiss Ni 002.

ocupă o poziție medie. Prin urmare, în operațiile de teren ulterioare, după calarea corectă a instrumentului, axa nivelei *LL* va putea fi adusă în poziție orizontală prin acționări mici ale șurubului de basculare.

16.4.1.2. **Perpendicularitatea dintre axa nivelei sferice de calaj L'L' și axa nivelei torice de precizie LL.** După realizarea calajului instrumentului cu ajutorul nivelei torice de precizie,

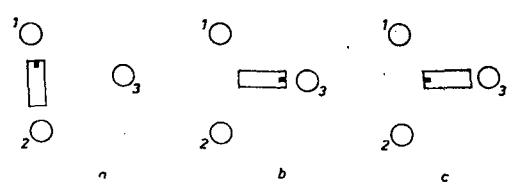


Fig. 16-14. Calajul instrumentului de nivelment de tip rigid și șurub de basculare prin folosirea nivelei torice de precizie.

descris mai înainte, nivela sferică de calaj ar trebui să ocupe o poziție corectă. În caz contrar se acționează asupra șuruburilor de rectificare ale acestei nivele.

La unele instrumente de înaltă precizie, cum este instrumentul *Zeiss Ni 004* (fig. 16-1), nu există nivelă sferică de calaj ci două nivele torice de calaj, de mică precizie, dispuse perpendicular. Prin urmare, se pune condiția paralelismului dintre axele nivelelor torice de calaj și axa nivelei torice de precizie. Verificarea și rectificarea sînt analoge cu cele menționate pentru nivela sferică de calaj.

16.4.1.3. **Orizontalitatea firului reticular.** Dacă reticulul este montat corect, firul reticular vertical trebuie să se suprapună exact peste un fir vertical cu plumb (suspendat).

Verificarea se face, de regulă, în condiții de laborator, astfel încît să nu existe influențe externe dăunătoare. Rectificarea se realizează prin rotirea corespunzătoare a reticulului.

De menționat că în cazul în care rectificarea nu este efectuată cu suficientă atenție, aceasta poate acționa nefavorabil asupra condițiilor care vor fi examinate în continuare.

16.4.1.4. **Paralelismul dintre planele verticale care trec prin axa de vizare OO și respectiv prin axa nivelei torice LL.** Respectarea condiției menționate se constată în felul următor:

— după calarea instrumentului cu ajutorul nivelei torice de precizie (v. 16.4.1.1), se vizează o mină de invar, instalată pe direcția unui șurub de calaj (de exemplu, șurubul nr. 1) instalată la o distanță de circa 15 m. Se efectuează citirea a;

— se dau 2 sau 3 rotiri complete ale unuia dintre celelalte două șuruburi de calaj (de exemplu, șurubul nr. 2). Evident, nivela torică de precizie nu mai este în coincidență, iar încadrarea diviziunii pe mină nu mai este realizată. Din șurubul de calaj nr. 3 se aduce nivela torică din nou în coincidență. În cazul în care condiția de paralelism examinată este respectată, va rezulta tot lectura inițială a. Diferența constatată reprezintă influența erorii de neparalelism dintre cele două plane verticale care trec prin axa de vizare OO și respectiv prin axa nivelei torice LL. Dacă diferența constatată este apropiată de ordinul erorilor lecturilor pe mină, atunci evident nu mai este necesară rectificarea.

Rectificarea corespondentă se poate obține prin deplasarea reticulului, în direcție paralelă cu firul orizontal, cu cantitatea necesară pentru înregistrarea citirii a (în acest fel s-a modificat poziția axei de vizare OO). Deplasarea paralelă trebuie realizată cu multă grijă pentru a nu dăuna verificării și rectificării descrise la 16.4.1.3.

În principiu, rectificarea erorii constatate se poate obține și prin acționarea șuruburilor de rectificare a nivelei torice de precizie (în acest fel s-ar modifica poziția axei nivelei LL). Această acțiune ar influența însă condiția principală care se va examina în continuare.

16.4.1.5. **Paralelismul dintre axa de vizare OO și axa nivelei LL.** Condiția $OO \parallel LL$ este denumită și *condiție principală* a instrumentelor de nivelment cu nivelă torică. În adevăr, denumirea provine din faptul că orice citire pe mină se execută *numai după* aducerea în coincidență a nivelei torice, presupunîndu-se că axa de vizare este orizontală, ceea ce este adevărat numai atunci cînd $OO \parallel LL$.

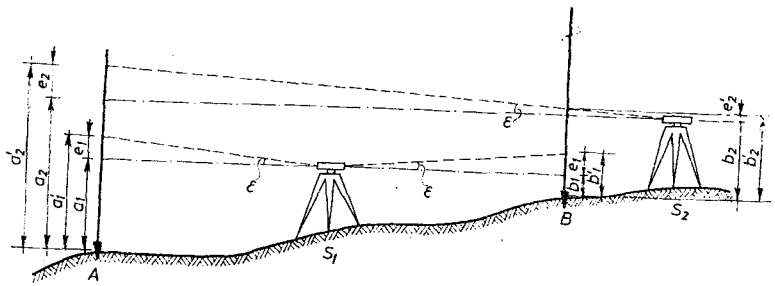


Fig. 16-15. Determinarea erorii de neparalelism dintre axa de vizare OO și axa nivelei LL.

Constatarea erorii se face prin nivelment geometric de mijloc și, respectiv, prin nivelment de capăt (fig. 16-15).

În nivelmentul geometric de mijloc, prin staționare în punctul S_1, se fac lecturile pe mină a'_1 și respectiv b'_1. Unghiul dintre axa de vizare și axa nivelei torice a fost notat cu ε. Deoarece cele două portei sînt riguros egale (de exemplu 20 m) influențele erorii menționate pe cele două mire sînt egale e_1. Rezultă prin urmare:

$$\Delta h_m = a'_1 - b'_1 = (a_1 + e_1) - (b_1 + e_1) = a_1 - b_1, \qquad (16\text{-}5)$$

adică prin nivelment de mijloc influența erorii examinate este practic eliminată.

În nivelmentul de capăt, prin staționare în punctul S_2, se fac lecturile pe mină a'_2 și respectiv b'_2, unghiul dintre cele două axe fiind, evident, tot ε. Deoarece nivelele sînt amplasate mult diferit în raport cu instrumentul (care va fi instalat în raport de punctul B la o distanță aproximativ egală cu distanța minimă de vizare, de circa 2 m) influențele erorii examinate vor fi, de asemenea, mult diferite. În exemplul considerat:

$$e'_2/e_2 \approx 2/40 = 1/20. \qquad (16\text{-}6)$$

Avînd în vedere că însăși influența e_2 este mică, se poate considera:

$$e'_2 \approx 0. \qquad (16\text{-}7)$$

În acest fel, prin determinarea prin nivelment geometric de capăt rezultă:

$$\Delta h_c = a'_2 - b'_2 \approx (a_2 + e_2) - b'_2 = \Delta h_m + e_2. \qquad (16\text{-}8)$$

Prin urmare influența erorii de neparalelism dintre axa de vizare OO și axa nivelei torice LL poate fi obținută în exemplul considerat cu relația:

$$e_2 = \Delta h_c - \Delta h_m, \qquad (16\text{-}9)$$

fiind, desigur, proporțională cu lungimea efectivă a niveleului.

Rectificarea decurge în felul următor:

— se calculează lectura corectă a_2 care ar trebui obținută pe mira din punctul A, folosind relația (16-8):

$$a_2 = \Delta h_m + b'_2; \qquad (16\text{-}10)$$

— se introduc pe tamburul micrometrului ultimele trei cifre din citirea a_2 (prin aceasta s-a stricat încadrarea diviziunii de pe mină);

— se reface încadrarea diviziunii necesare din lectura a_2 prin utilizarea şurubului de basculare (prin aceasta nivela torică de precizie nu mai este în coincidenţă);

— se reface coincidenţa nivelei torice de precizie prin acţionarea şuruburilor de rectificare ale acestei nivele.

Observaţii. 1. Fiind o condiţie extrem de importantă în funcţionarea instrumentului, operaţiunea de verificare şi rectificare se execută repetat pentru control.

2. Există şi alte procedee mai exacte de verificare şi rectificare a erorii examinate (*Deumlich* 1980, *Jordan* ş.a. 1956 ş.a.) în care nu se mai introduce aproximaţia (16-7). Deoarece în nivelmentul geometric executat în reţelele geodezice de stat se lucrează în exclusivitate cu portei egale, se consideră că metoda expusă mai înainte este suficient de precisă. Pentru situaţii întîlnite în topografia inginerească, unde pot interveni şi cazuri fortuite, de utilizare a nivelmentului cu portei inegale, verificarea şi rectificarea trebuie făcută mai exact, după alte metode.

16.4.2. VERIFICAREA INSTRUMENTELOR DE NIVELMENT CU COMPENSATOR

Instrumentele de nivelment cu compensator prezintă nu numai avantajele specifice de manipulare şi efectuare a determinărilor, ci şi în privinţa verificărilor şi rectificărilor corespondente.

● *Paralelismul dintre axa nivelei sferice de calaj L'L' şi axa principală VV*. Verificarea şi rectificarea sînt presupuse cunoscute de la *cursul de topografie*.

● *Orizontalitatea firului reticular*. Verificarea şi rectificarea sînt identice cu ceea ce s-a prezentat la 16.4.1.3.

● *Orizontalitatea axei de vizare în domeniul de acţiune al compensatorului*. *Constatarea* erorii corespondente se realizează asemănător ca la 16.4.1.5. *Rectificarea* decurge identic pentru primele două operaţiuni. Pentru încadrarea diviziunii necesare din citirea a_2, se va acţiona în mod corespunzător asupra reticulului.

Capitolul 17

METODE DE DETERMINARE A DIFERENŢELOR DE NIVEL ÎN REŢELELE GEODEZICE

Determinarea diferenţelor de nivel în reţelele geodezice se realizează prin două metode:

— metoda nivelmentului geometric şi

— metoda nivelmentului trigonometric.

17.1. NIVELMENTUL GEOMETRIC GEODEZIC

Metoda nivelmentului geometric este folosită şi în lucrările topografice, astfel încît se poate presupune cunoscută de la *cursul de topografie*. Diferenţele existente în raport cu nivelmentul geometric geodezic rezidă

din specificul şi amploarea celor două categorii de lucrări. Astfel, nivelmentul geometric executat în reţelele geodezice de stat se extinde pe linii lungi de nivelment, de ordinul zecilor sau chiar sutelor de kilometri, fiind executat, în principal, cu aparatura prezentată în cap. 16, în timp ce nivelmentul geometric topografic se execută, de regulă, pe teritorii mai mici şi, uneori, şi cu aparatură de mică precizie, în funcţie de destinaţia lucrărilor.

17.1.1. EXECUŢIA NIVELMENTULUI GEOMETRIC ÎN REŢELELE GEODEZICE DE STAT

După cum am mai menţionat, în ţara noastră nivelmentul de stat de ordinele I, II, III şi IV se execută conform cu Instrucţiunile elaborate de *Direcţia topografică militară* în anul 1965, precum şi cu cele elaborate de *Institutul de geodezie, fotogrammetrie, cartografie şi organizarea teritoriului* în anul 1976 pentru nivelmentul de ordinul zero. Unele dintre prescripţiile acestor instrucţiuni (cum ar fi, de exemplu, posibilitatea utilizării mirelor de lemn de ord. III, lungimile mari ale porteelor, toleranţele prevăzute ş.a.m.d.) apar acum, la aproape 20 de ani de la elaborare, puţin cam largi şi probabil că în viitor vor fi reconsiderate şi completate. Totuşi, se va prezenta tehnologia actuală a nivelmentului geometric geodezic cu atenţionarea asupra unor posibile modificări în viitor, la o nouă elaborare a instrucţiunilor corespondente.

● Aparatura necesară este selectată în funcţie de precizia care trebuie asigurată în cadrul fiecărui ordin, potrivit principiilor şi clasificărilor prezentate în 16.3.

● Lungimea porteelor diferă de la un ordin la altul (tabelul 17-1). Pe fiecare niveleu se lucrează cu portei cît mai egale posibil, instrucţiunile permiţînd abaterile prezentate în tabelul 17-1. La ordinul 0 şi I lungimile porteelor se măsoară cu un fir gabarit, urmărindu-se păstrarea constantă, pe cît posibil, a lungimii porteelor în cadrul tuturor niveleurilor. Desigur, sinuozitatea efectivă a traseului liniei de nivelment împiedică respectarea fără abateri a acestui deziderat.

● Operaţiunile de nivelment se efectuează sub protecţia umbrelor solare.

Tabelul 17-1

Ordinul reţelei de nivelment	Lungimea maximă a porteelor [m]	Inegalităţi admise între portei [m]	Toleranţe pentru diferenţele de nivel determinate „dus" şi „întors" [mm]
0	20 – 30	<0,5	$0{,}5\sqrt{L}$
I	50	<0,5	$3\sqrt{L}$
II	50 – 65	1	$5\sqrt{L}$
III	75 – 85	3–4	$10\sqrt{L}$
IV	100 – 125	3–4	$20\sqrt{L}$

● Modalitatea de efectuare a unei lecturi (pe mină şi pe tamburul micrometrului cu plăci plane şi paralele) a fost prezentată în 16.1.4.

● Tehnologia nivelmentului geometric geodezic permite să se obţină mai multe determinări pentru diferenţele de nivel pe fiecare *interval* (între două mărci sau repere de nivelment vecine), respectiv pentru fiecare *secţiune* (între două repere de nivelment fundamentale) şi în consecinţă pentru întreaga *linie* de nivelment:

— nivelmentul geometric de ord. IV se execută numai într-un singur sens. În fiecare staţie se fac obligatoriu două determinări: fie cu un singur orizont, pe cele două feţe ale mirei de lemn sau pe cele două şiruri de gradaţii ale mirei de invar, fie cu două orizonturi ale aparatului, atunci cînd mirele folosite au un singur şir de gradaţii. Rezultă astfel două determinări pentru intervalele şi respectiv liniile de nivelment;

— nivelmentul geometric de ordinele III şi II se execută în două sensuri: „dus" şi „întors". Tehnologia din fiecare staţie este cea menţionată la ord. IV, astfel încît rezultă patru determinări pentru intervalele, secţiunile şi liniile de nivelment corespondente. Deosebirile dintre lucrările efectuate în cadrul celor două ordine derivă din aparatura diferită folosită (instrumente de înaltă precizie pentru ord. II şi respectiv instrumente de precizie pentru ord. III), precum şi în faptul că la ord. II se lucrează numai cu mire de invar, la ord. III admiţîndu-se şi utilizarea mirelor de lemn;

— nivelmentul geometric de ordinele 0 şi I se execută simultan pe două trasee paralele (distanţate la circa 0,5 m) după tehnologia descrisă la ord. II. Prin urmare, pe fiecare interval, secţiune sau linie de nivelment vor rezulta opt determinări.

● Pentru eliminarea unor posibile erori sistematice (v. 17.1.2.4) este necesar ca citirile pe mină să se efectueze într-o anumită ordine. Astfel, pentru sensul „dus" şi în ipoteza utilizării mirelor cu două şiruri de gradaţii, ordinea de efectuare a determinărilor este următoarea:

Staţie cu număr impar:

— citirea distanţei pe mira din urmă;
— citirea pe şirul de gradaţii din stînga al mirei din urmă;
— citirea distanţei pe mira din faţă;
— citiri pe cele două şiruri de gradaţii ale mirei din faţă;
— citirea pe şirul de gradaţii din dreapta al mirei din urmă.

Staţie cu număr par:

— ordinea citirilor este analoagă cu cea prezentată în detaliu la staţia cu număr par, deosebirea constînd în faptul că determinările se încep pe mira din faţă.

La ordinele 0 şi I succesiunea determinărilor este aceeaşi pentru cele două trasee de nivelment.

Determinările pe sensul „întors" decurg într-o succesiune analoagă, cu deosebirea că operaţiunile în staţiile cu număr impar încep pe mira din faţă şi, în consecinţă, în staţiile cu număr par pe mira din urmă.

● Pentru fiecare ordin al reţelei de nivelment există *o categorie specifică de carnete de teren*, care oferă posibilităţi de control în fiecare staţie, precum şi pe fiecare interval. Pentru exemplificare se prezintă în tabelul 17-2 un model de carnet de teren pentru observaţiile din reţeaua de ord. II extras din *instrucţiunile DTM*.

Tabelul 17-2

De la reper fundamental tip II, marca tip A, D.T.M. nr. 590, biserica comuna Frasin la marca tip B, D.T.M. nr. 140, canton C.F. nr. 53 km 53+150

Data: 13.06.1960 — Început: 07,15 — Terminat: 09,00

Nr. porteei, nr. mirelor, distanţa cumulată	Condiţii de lucru		Citiri la cele trei fire				Citiri la firul nivelor				Control
			înapoi (i_p)	înainte (i_i)			Citirea 1 (scara din stînga)		Citirea 2 (scara din dreapta)		$\Delta h_{C_1} - \Delta h_{C_2}$ ($\leq 0{,}5$ mm)
							Mină	Tambur	Mină	Tambur	
1 9397 9398 (14) 80,3	temp. +20° timp noros vînt slab imag. clare	S	(1) 0989	(5) 2577		i_p	(4) 138	04	(10) 138	05	(18) +3 +3
		M	(2) 1380	(6) 2979		i_i	(8) 297	99	(9) 297	97	
		J	(3) 1791	(7) 3381		$i_p - i_i = \Delta h$	(16) −1,59	95	(17) −1,59	92	
		2 D	(11) 80,2	(12) 80,4		Δh_m	(19) −1,59935				
		control	(15) −1,599	(13) −2/−2							
2 9398 9397 180,2	temp. +20° timp noros vînt slab imag. clare	S	1527	2610		i_p	202	64	202	63	−2 +1
		M	2026	3111		i_i	311	10	311	11	
		J	2525	3611		$i_i - i_i = \Delta h$	−1,08	46	−1,08	48	
		2 D	99,8	100,1		Δh_m	−1,08470				
		control	− 1,085	−3/−5							

(20) = Σ(4) = 34068; (21) = Σ(10) = 34068 $2\ \Delta h = \frac{(26)+(27)}{2} = 268405$

(22) = Σ(8) = 60909; (23) = Σ(9) = 60908

(24) = (20) − (22) = −26841; (25) = (21) − (23) = −26840 $\Delta h = 1{,}342025$

(26) = Σ(16) = −26841; (27) = Σ(17) = −26840 $L = \Sigma\,[(13)+(15)] = 0{,}36$ km

Cifrele din paranteze indică ordinea de înscriere și de efectuare a calculelor în carnet, semnificația acestora fiind următoarea:

— citiri la cele trei fire pentru determinarea distanței: (*1*), (*2*), (*3*) — — la mira din urmă și respectiv (*6*), (*7*), (*8*) — la mira din față;

— citiri complete (cu firul nivelor pe miră și respectiv pe tambur): (*4*) — la mira din urmă, (*5*), (*9*) — la mira din față și (*10*) — din nou la mira din urmă;

— determinarea lungimilor porteelor (*11*), (*12*), inegalitatea acestora (*13*) și lungimea niveleului (*14*);

— calculul diferenței de nivel între cele două mire: aproximativ (*15*) = = (*6*) — (*2*) și apoi precis (*16*) = (*8*) — (*4*) și respectiv (*17*) = (*9*) — (*10*), nepotrivirea dintre aceste diferențe (*18*) = (*16*) — (*17*), precum și valoarea medie a diferenței de nivel (*19*) = 1/2 [(*16*) + (*17*)].

În tabelul 17-2 s-au trecut determinările din două stații de nivelment. Desigur, un interval de nivelment are mult mai multe stații. Totuși, pentru continuitatea exemplificării, se prezintă în tabelul 17-2 modalitatea de efectuare a calculelor pe întregul interval luînd în considerație numai cele două stații de nivelment. După cum se observă prin acest calcul se realizează un control pe întregul interval: (*24*) = (*26*) și respectiv (*27*) = = (*25*), după care se deduce diferența de nivel Δh și distanța D cumulată pe întregul interval exprimată în kilometri.

● La măsurătorile din rețelele de ordinele 0, I și II se determină și temperatura aerului, la înălțimea axei de vizare, pentru a se putea calcula corecțiile datorate dilatării benzii de invar în timpul lucrului.

● Lucrările executate trebuie să se încadreze în anumite toleranțe referitoare la intervalele, apoi la secțiunile și respectiv la liniile de nivelment (tabelul 17-1). Aceste toleranțe se referă la nepotrivirile rezultate între determinarea diferențelor de nivel pentru sensul „dus" și respectiv „întors". La ordinele 0 și I se calculează aceste nepotriviri separat și pentru cele două trasee de nivelment.

O b s e r v a ț i e. Precauții deosebite intervin în tehnologia de transmitere a nivelmentului de ordinele 0, I și II peste obstacole late de 100 — 1 500 m. Prin consens între titularii cursurilor de specialitate din cadrul secției de geodezie, această problematică este abordată de mai mulți ani în cadrul *cursului de topografie inginerească*.

17.1.2. SURSE DE ERORI SISTEMATICE ÎN NIVELMENTUL GEOMETRIC GEODEZIC

Sursele de erori sistematice în nivelmentul geometric geodezic sînt următoarele:

— erori reziduale ale aparaturii folosite;

— influența factorilor atmosferici;

— erori personale, ale operatorului.

Este cunoscut că metodele clasice de prelucrare a observațiilor geodezice pornesc de la principiul că aceste observații nu sînt afectate de erori sistematice. De aceea fie prin metodele de lucru, fie prin corecții speciale care se aplică observațiilor, înainte de a fi introduse în prelucrare, se reușește într-o măsură cît mai bună să se elimine influența erorilor sistematice.

17.1.2.1. **Eroarea datorată influenței refracției atmosferice și curburii Pămîntului.** Se notează cu a' și b' citirile pe mira din urmă și respectiv pe mira din față la o determinare de nivelment geometric, în care porteele

au lungimile l_1 și respectiv l_2 (fig. 17-1).

Datorită influenței refracției atmosferice (15.1.1.) rezultă abaterile e_1 și respectiv e_2 pe cele două mire, în comparație cu poziția perfect orizontală a axei de vizare. Prin urmare diferența de nivel măsurată va fi eronată în raport de valoarea corectă:

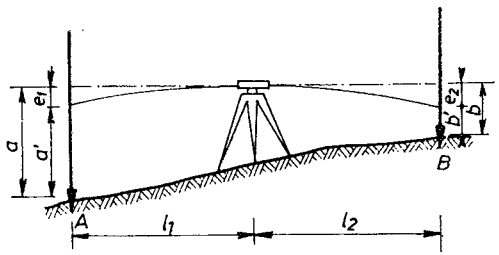


Fig. 17-1. Influența refracției atmosferice în lucrările de nivelment geometric.

$$\Delta h^e = a' - b' = (a - e_1) - (b - e_2) = \Delta h + (e_2 - e_1). \qquad (17\text{-}1)$$

Pentru distanțele care intervin în nivelmentul geometric erorile e_1 și e_2 sînt foarte mici (zecimi sau sutimi de milimetru), dar nu trebuie omis faptul că și precizia solicitată este de asemenea mare. Așa cum se va demonstra în 17.2.1.2, formula aproximativă cu care se pot calcula cantitățile e este:

$$e \approx \frac{1-k}{2R} l^2, \qquad (17\text{-}2)$$

unde: k este coeficientul de refracție, l — lungimea vizei, iar R — raza medie a Pămîntului $\approx$ 6 378 km. Pentru determinarea ordinului de mărime se presupune că pentru viza pe miră din A: $k = 0{,}13$ și $l = 50$ m, iar pe mira din B aceleași condiții atmosferice, $k = 0{,}13$, însă $l = 52$ m. Va rezulta $e_2 - e_1 = 0{,}014$ mm. Dacă în punctul B se modifică și condițiile atmosferice, de exemplu $k = 0{,}14$, rezultă $e_2 - e_1 = 0{,}012$ mm. Condițiile atmosferice se pot modifica în terenuri care au însoriri diferite (de exemplu la trecere într-o zonă împădurită), la trecerea vizei peste soluri umede etc.

Prin urmare, eroarea examinată se poate elimina numai prin respectarea riguroasă a condițiilor:

$$l_1 = l_2; \qquad k_1 = k_2, \qquad (17\text{-}3)$$

ceea ce nu poate fi realizat întotdeauna.

Influența refracției atmosferice în lucrările de nivelment geometric a fost studiată de mulți cercetători, fiind elaborate diferite procedee de lucru în teren și formule de calcul ale unor corecții specifice, dintre care cele elaborate de *T. J. Kukkamäki* (1938) sînt cele mai cunoscute. Formula corecției datorată refracției atmosferice ar fi:

$$c_r = -10^{-5} \gamma \sum \left(\frac{D}{50}\right)^2 \Delta t \, \Delta H, \qquad (17\text{-}4)$$

în care: γ este un coeficient care se poate extrage din tabelele *Kukkamäki* în funcție de luna, ziua, ora și temperatura la care s-au executat lucrările de nivelment, precum și în funcție de latitudinea punctului de stație;

D — lungimea vizei, în m;

$\Delta t = t_2 - t_1$ — diferența de temperatură la înălțimile de 50 cm și respectiv 250 cm față de sol, în °C;

ΔH — diferența de nivel măsurată, în unități de miră (0,5 m).

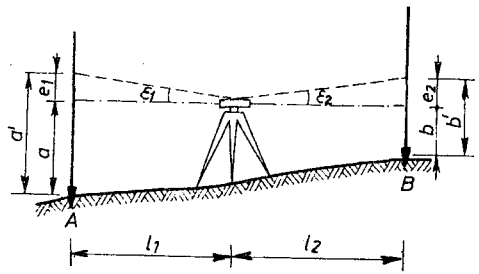


Fig. 17-2. Influența erorii de neparalelism dintre axa de vizare și axa nivelei torice de precizie.

Aplicarea corecției (17-4) în lucrările de producție nu a găsit încă o unitate de vedere.

17.1.2.2. **Eroarea reziduală de înclinare a axei de vizare în raport de axa nivelei torice de precizie.** În determinarea reprezentată în figura 17-2 s-a presupus că axa de vizare este înclinată diferit în raport cu axa nivelei torice de precizie, atunci cînd se vizează mira din A (ε_1) și respectiv din B (ε_2). De asemenea s-au presupus portei inegale.

În aceste condiții diferența de nivel determinată va fi:

$$\Delta h^e = a' - b' = (a + e_1) - (b + e_2) = \Delta h + (e_1 - e_2) = \\ = \Delta h + (l_1 \mathrm{tg}\varepsilon_1 - l_2 \mathrm{tg}\varepsilon_2). \qquad (17\text{-}5)$$

Se observă că $\Delta h^e = \Delta h$ numai în cazul în care condițiile:

$$l_1 = l_2; \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon, \qquad (17\text{-}6)$$

sînt respectate riguros. Condiția $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ este îndeplinită atunci cînd s-a făcut verificarea și rectificarea descrisă la 16.4.2.3 și nivela se aduce în coincidență de fiecare dată cu aceeași exactitate. În asemenea situație eroarea remanentă ε este generată numai de sensibilitatea nivelei torice, avînd un caracter întîmplător. Asemănător se poate raționa și în cazul instrumentelor de nivelment cu compensator. În condițiile acestea, pentru un interval de nivelment ecuația (17-5) devine:

$$\sum \Delta h^e = \sum \Delta h + \mathrm{tg}\,\varepsilon \sum (l_1 - l_2). \qquad (17\text{-}7)$$

Din relația (17-7) se observă că eroarea examinată se elimină în primul rînd în cazul executării nivelmentului cu portei egale, dar și atunci cînd suma inegalităților dintre portei tinde către zero pentru un interval de nivelment considerat. Aceasta este motivația pentru care suma diferențelor dintre lungimile porteelor este evidențiată distinct în carnetele de teren.

17.1.2.3. **Eroarea provocată de panta mare pe niveleu.** În niveleele cu pantă mare (fig. 17-3), viza este situată în raport cu solul la înălțimi diferite. Ca urmare, fenomenul de refracție acționează, de asemenea, în mod diferit, rezultînd abaterile e_1 și e_2 ($e_2 > e_1$) în raport de poziția orizontală a axei de vizare.

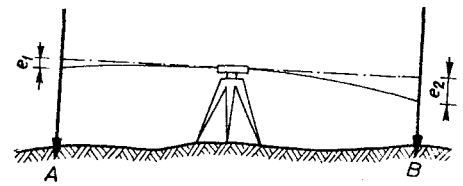


Fig. 17-3. Influența erorii provocată de panta mare pe niveleu.

Se observă cu ușurință că eroarea menționată nu se poate elimina prin nivelment geometric de mijloc. Preîntîmpinarea apariției erorii este posibilă chiar de la proiectare, prin evitarea amplasării traseelor de nivelment în terenuri cu pantă excesiv de mare. Aceasta este una din

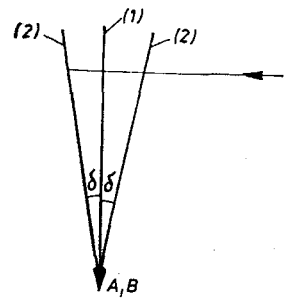


Fig. 17-4. Influența erorii de neverticalitate a mirei.

cauzele pentru care liniile de nivelment se proiectează în lungul căilor ferate sau al drumurilor principale. În situațiile în care în mod obligat traseul de nivelment are porțiuni cu pantă mare, se va avea grijă ca lungimile nivelcelor să fie mai reduse decît cele utilizate în mod obișnuit. În acest fel viza va avea o anumită depărtare de sol, care preîntîmpină apariția erorii menționate. Astfel, în nivelmentul de ord. 0 și I vizele nu pot avea apropieri față de sol mai mici de 0,8 m.

17.1.2.4. **Eroarea determinată de eventualele tasări ale instrumentului pe timpul efectuării observațiilor.** Datorită unor eventuale tasări ale instrumentului pe timpul efectuării observațiilor în stație, apar unele erori care pot fi eliminate prin succesiunea observațiilor, de forma descrisă în 17.1.1., care poate fi sintetizată sub forma: „înapoi-înainte-înainte-înapoi" și respectiv „înainte-înapoi-înapoi-înainte" pentru stații cu număr impar și respectiv par. Demonstrația este cunoscută de la *cursul de topografie*.

17.1.2.5. **Eroarea determinată de eventualele tasări ale mirei pe timpul transportului instrumentului într-o nouă stație.** În intervalul de timp necesar deplasării instrumentului între două stații, mira care rămîne în vechea poziție se poate tasa, împreună cu broasca de nivelment pe care este așezată. Eroarea se poate elimina prin executarea nivelmentului în sensurile „dus" și respectiv „întors" însă în ipoteza unor trasee uniforme din punctul de vedere al tasării. Demonstrația este cunoscută, de asemenea, de la *cursul de topografie*.

17.1.2.6. **Eroarea datorată neverticalității mirei.** Una dintre condițiile esențiale ale execuției corecte a nivelmentului geometric constă în necesitatea verticalității mirelor pe timpul observațiilor. În cazul unei înclinări a mirei δ (fig. 17-4), va rezulta o lectură a^e care este întotdeauna mai mare decît lectura a corectă:

$$\Delta a = a^e - a = a^e (1 - \cos\delta) = 2a^e \sin^2 \frac{\delta}{2} \approx a^e \frac{\delta^2}{2}. \qquad (17\text{-}8)$$

Prin urmare, influența erorii examinate depinde de sensibilitatea nivelei sferice δ a mirei (v. 16.2.1), precum și de mărimea lecturii. Rezultă recomandarea evitării lecturilor pe capătul superior al mirei.

17.1.2.7. **Eroarea de zero a mirei.** În timpul utilizării mirelor apar inevitabil mici modificări la talpa acesteia, provocate de coroziune, frecări etc., ceea ce conduce la modificarea poziției punctului zero al mirei. Eroarea se elimină prin efectuarea unui număr par de stații pe fiecare interval de nivelment. Recomandarea de utilitate practică este ca pe reperul de început și pe cel final, al unui interval de nivelment, să se instaleze aceeași mină.

Demonstrația este imediată, fiind cunoscută de la *cursul de topografie*.

17.1.2.8. **Eroarea datorată atracției Lunii și Soarelui.** Atracția Lunii și Soarelui se materializează pe un niveleu oarecare prin mărimea c_a cu care se modifică citirile a și b pe cele două mire (fig 17-5) datorită schim-

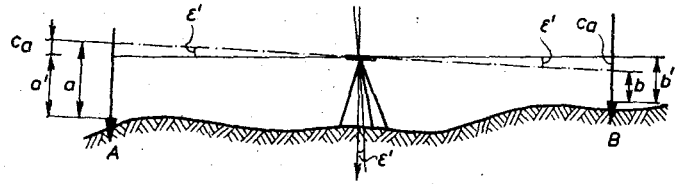


Fig. 17-5. Influența atracției Lunii și Soarelui în nivelmentul geometric de înaltă precizie.

bării direcției verticalei, respectiv a planului orizontal, în funcție de poziția celor doi aștri:

$$\Delta H = a - b = (a' + c_a) - (b' - c_a) = a' - b' + 2c_a, \qquad (17\text{-}9)$$

unde a', b' sînt citirile efective pe mire, iar a, b valorile corespondente corecte. Aceste influențe sînt foarte mici (valori maxime de ordinul $\pm$ 0,04 mm/km) însă posedă un caracter sistematic.

Formula de calcul a corecției datorită atracției Lunii și Soarelui pentru un niveleu este (*Helmert* 1962, *Ghițău* ș.a. 1973):

$$c_a = c_\odot + c_\leftmoon = S\,[k_\odot \sin 2z_\odot \cdot \cos(A_\odot - A) + k_\leftmoon \sin 2z_\leftmoon \cdot \cos(A_\leftmoon - A)], \qquad (17\text{-}10)$$

în care: $c_\odot$, $c_\leftmoon$ sînt componentele corecției pentru Soare și respectiv pentru Lună;

S — lungimea niveleului;

$z_\odot$, $z_\leftmoon$ — distanța zenitală a Soarelui, respectiv a Lunii;

$A_\odot$, $A_\leftmoon$, A — azimutul Soarelui, al Lunii și respectiv al liniei de nivelment;

$k_\odot$, $k_\leftmoon$ — coeficienți ale căror valori, pentru 1 km de linie de nivelment sînt:

$$k_\odot \approx 0{,}0265; \quad k_\leftmoon \approx 0{,}0571. \qquad (17\text{-}11)$$

17.1.2.9. **Eroarea datorată influenței temperaturii asupra mirelor în timpul măsurării.** Eroarea menționată se elimină prin aplicarea ulterioară a unei corecții. Aceasta din urmă se deduce din relația dintre lungimea benzii de invar la temperatura de etalonare t_e și lungimea corespondentă la temperatura de lucru t:

$$c_t = \alpha\,(t - t_e)\,\Delta H, \qquad (17\text{-}12)$$

în care α reprezintă coeficientul de dilatație al invarului ($\alpha \approx 4 \cdot 10^{-7}/1°C$).

17.1.2.10. **Eroarea de etalonare a mirelor.** Dacă se notează cu l_d lungimea mirei pînă la diviziunea d determinată la etalonare și cu l'_d lungimea efectivă, considerată la efectuarea observațiilor în teren, corecția c_e^d se determină cu relația:

$$c_e^d = l_d - l'_d. \qquad (17\text{-}13)$$

Această corecție trebuie aplicată tuturor lecturilor a și b care au în componența lor diviziunea d (ca citire directă pe mină).

17.1.2.11. **Corecția de reducere la sistemul de altitudini normale.** Necesitatea și formula de calcul al acestei corecții au fost prezentate în paragraful 4.4. Corecția nu este de natură instrumentală și nici tehnologică, ci depinde de sistemul de altitudini folosit oficial în țara noastră.

17.1.3. ERORI ÎNTÎMPLĂTOARE ÎN NIVELMENTUL GEOMETRIC

Tehnologia lucrărilor de nivelment, precum și corecțiile care se determină prin calcul și se aplică ulterior, determină micșorarea într-un grad înaintat a erorilor sistematice. Totuși, cu toate aceste măsuri de precauție, există remanențe ale erorilor examinate în 17.1.2, care au însă un caracter întîmplător de manifestare.

Abordînd problematica erorilor întîmplătoare, trebuie accentuat că acestea afectează în mod aleator orice acțiune elementară din multitudinea operațiunilor de teren, precum și rezultatele parțiale (de exemplu determinarea unei diferențe de nivel într-o stație de nivelment sau pe un întreg interval), și, ca urmare, rezultatul final în ansamblu (în cazul de față — diferența de nivel pe întreaga linie de nivelment). Influența acestor erori nu poate fi prevăzută cu exactitate și în consecință nici eliminată, așa cum s-ar putea proceda, în linii mari, cu erorile cu caracter sistematic. Din aceste considerente notațiile referitoare la erorile întîmplătoare sînt cele de natură teoretică, menționate în 9.1, deoarece nu se are în vedere o *anumită acțiune* sau o *anumită eroare*, ci un ansamblu de acțiuni și un ansamblu de erori, urmărind ca noțiunile cu care se operează să posede un caracter de generalitate, și nu neapărat de estimare cantitativă.

În nivelmentul geometric cea mai reprezentativă eroare întîmplătoare poate fi considerată eroarea de citire pe mină, care are o multitudine de factori generatori, derivați din metodologia de execuție. Dintre aceștia, cei mai semnificativi sînt următorii:

— eroarea σ_1 datorată punctării mai mult sau mai puțin precise pe mină, dependentă în primul rînd de puterea de mărire M a lunetei, dar și de factori subiectivi (cum ar fi oboseala operatorului) și chiar obiectivi (de exemplu condițiile efective de vizibilitate la un moment exact definit);

— eroarea σ_2 datorată înclinării axei de vizare, dependentă în primul rînd de sensibilitatea nivelei torice de precizie, de lungimea porteii, dar și de alți factori;

— alte erori σ_3 care pot interveni în momentul efectuării citirii (de exemplu verticalitatea efectivă a mirei).

Prin urmare, varianța unei citiri pe mină σ_c^2 ar putea fi exprimată sub forma:

$$\sigma_c^2 \approx \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \qquad (17\text{-}14)$$

iar pentru un niveleu cu portei egale:

$$\sigma_n^2 = 2\sigma_c^2. \qquad (17\text{-}15)$$

Pe un interval de nivelment propagarea erorilor întîmplătoare va depinde de numărul niveleelor, notat n_n:

$$\sigma_i^2 = 2n_n\,\sigma_n^2, \qquad (17\text{-}16)$$

sau în ipoteza niveleelor de aceeași lungime l_n:

$$l_i = n_n \cdot l_n; \qquad \sigma_i^2 = \text{const}\ l_i\,\sigma_n^2. \qquad (17\text{-}17)$$

17.1.4. DETERMINAREA PONDERILOR ŞI TOLERANŢELOR ÎN REŢELELE DE NIVELMENT GEOMETRIC

Nivelmentul geometric este constituit dintr-o succesiune extrem de mare de operaţiuni elementare. În decursul timpurilor au fost emise numeroase teorii pentru estimarea preciziei fiecărei categorii de operaţiuni, precum şi pentru ansamblul acestora. De obicei aceste estimări sînt făcute *înainte de prelucrarea observaţiilor în reţea*, pentru a se putea constata încă din timpul campaniei de teren, dacă precizia realizată se înscrie în toleranţele impuse de destinaţia lucrării. De aceea formulele trebuie să fie simple, uşor de aplicat, estimarea avînd desigur un caracter preliminar.

17.1.4.1. **Ponderea determinării diferenţei de nivel pe o linie de nivelment, în ipoteza observaţiilor independente.** Propagarea erorilor întîmplătoare pe intervalele unei linii de nivelment este reflectată, în principal, de influenţele reprezentate de relaţia (17-17).

Astfel pentru linia de nivelment din figura 17-6, pentru care diferenţa de nivel este constituită din suma diferenţelor de nivel pe fiecare interval:

$$\Delta h = \delta h_1 + \delta h_2 + \dots , \tag{17-18}$$

se poate exprima varianţa întregului rezultat ca suma varianţelor pe intervalele individuale:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \sum \sigma^2_i . \tag{17-19}$$

Acceptînd că varianţele intervalelor de nivelment sînt formate din mai multe varianţe ale unei lungimi unitare l_0 (de obicei $l_0 = 1$ km şi atunci σ^2_0 este varianţa pe un kilometru de nivelment sau varianţa unităţii de pondere, iar l_i devine lungimea intervalului exprimată în kilometri):

$$\sigma^2_i = \sigma^2_0 \, l_i , \tag{17-20}$$

astfel că:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \sigma^2_0 \sum l_i = \sigma^2_0 \, L , \tag{17-21}$$

sau:

$$\sigma_{\Delta h} = \sigma_0 \sqrt{L} , \tag{17-22}$$

unde L este lungimea liniei de nivelment exprimată în kilometri.

Din relaţiile (9-17) şi (17-20) rezultă o posibilitate de exprimare a ponderii întregii determinări a diferenţei de nivel pe linia de nivelment:

$$p = \frac{1}{L} , \tag{17-23}$$

care este frecvent utilizată în prezent.

Observaţii. **1.** Deoarece în prelucrările reţelelor geodezice este de dorit ca ponderile p_i să oscileze în jurul valorii cifrei 1, se poate folosi şi o altă constantă (10; 100 — după necesităţi) la determinarea ponderii liniei de nivelment considerate.

$$p = \frac{c}{L} . \tag{17-24}$$

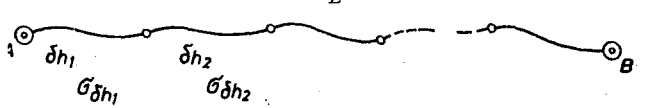


Fig. 17-6. Propagarea erorilor întîmplătoare în lungul liniilor de nivelment geometric.

2. În lucrările mai vechi de nivelment, în perioadele cînd erorile de etalonare ale mirelor erau remarcabil de mari şi se manifestau ca erori întîmplătoare σ_m, în locul relaţiei (17-21) s-a folosit formula:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \sigma^2_0 \, L + \sigma^2_m \, [\delta h^2], \tag{17-25}$$

astfel încît ponderea liniei de nivelment avea expresia:

$$p = \frac{c}{L + q^2 \, [\delta h^2]} , \tag{17-26}$$

unde:

$$q = \sigma_m / \sigma_0 . \tag{17-27}$$

Pentru q au fost obţinute valori foarte diferite, cuprinse între 0,22 şi 0,79 (*Wolf* 1968).

În prezent relaţia (17-26) nu are aplicabilitate deoarece erorile de etalonare ale mirelor se cunosc mult mai precis, pentru fiecare diviziune în parte. Eventual, pentru zone muntoase şi lucrări precise unde s-ar ţine seama şi de modificările survenite între etalonări, relaţia (17-26) ar putea fi reconsiderată.

17.1.4.2. **Posibilităţi de estimare a preciziei interioare în lucrările de nivelment geometric.** Aşa cum s-a menţionat în 9.2.4, înainte de prelucrarea în reţea, *precizia interioară* poate fi estimată prin calculul abaterii standard empirice s'_0. Reamintim că abaterea standard empirică s_0, calculată în cadrul prelucrării în reţea cu una din formulele (9-44), (9-52), (9-82) sau (9-90) după caz, reflectă *precizia exterioară*. Ambele mărimi sînt estimatori ai abaterii standard (teoretică) a unităţii de pondere:

$$E(s'^2_0) = E(s^2_0) = \sigma^2_0 . \tag{17-28}$$

Literatura de specialitate (*Lallemand* 1912, *Vignal* 1936, *Jordan* 1956 ş.a.) oferă o multitudine de posibilităţi pentru determinarea preciziei interioare în lucrările de nivelment geometric, dintre care se prezintă în continuare cele reprezentative.

De menţionat că unele dintre aceste expresii, multiplicate cu factori constanţi cuprinşi între 2 şi 3, au devenit formule de determinarea toleranţelor în lucrările de nivelment din unele ţări.

● Abaterile standard empirice s'_{0_j} calculate din diferenţele Δ_j (exprimate în mm) dintre determinările „dus" şi „întors" pe intervalele de nivelment ($j = i$) sau pe liniile de nivelment ($j = L$), respectiv din neînchiderile în poligoanele de nivelment ($j = P$):

$$s'^2_{0_j} = \frac{1}{4\, n_j} \sum \frac{\Delta^2_j}{l_j} ; \tag{17-29}$$

$$j = i, \; L, \; P.$$

în care n_j este numărul de intervale, respectiv de linii sau poligoane de nivelment, iar l_j — lungimea intervalului sau a liniei de nivelment (pentru care $l_L = L$), respectiv perimetrul poligonului de nivelment, exprimate în km.

În acest fel relaţia (17-29) oferă *3 categorii distincte* de abateri standard empirice, care pot fi determinate în diverse stadii de realizare a reţelei de nivelment: cînd sînt cunoscute determinări pe diverse intervale, apoi pentru anumite linii şi în sfîrşit pentru întreaga reţea de nivelment.

● Abaterea standard empirică după *Lallemand*, pentru întreaga rețea de nivelment, numită la timpul respectiv eroarea medie întîmplătoare:

$$s'^2_{OLL} = \frac{1}{4}\left(\frac{\Sigma \Delta L^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma L^2}{\Sigma L}\sum \frac{\Delta L^2}{\Delta L}\right) = \eta_L^2. \qquad (17\text{-}30)$$

● Eroarea medie sistematică după *Lallemand*:

$$\tau_L^2 = \frac{1}{4\Sigma L}\sum \frac{\Delta^2 L}{L}, \qquad (17\text{-}31)$$

care se poate aplica și în cazul unei rețele incomplet constituite, adică pentru un grup de linii de nivelment.

Observație. În multe lucrări clasice consacrate nivelmentului geometric, erorile sistematice au fost notate cu σ. Pentru a nu se confunda cu notația folosită în manual pentru abaterea standard teoretică, în relațiile (17-31) și (17-32) erorile sistematice au fost notat cu τ.

● Eroarea medie sistematică determinată din neînchiderile în poligoanele de nivelment:

$$\tau_P^2 = \frac{1}{\Sigma L}\left(\frac{1}{2}\sum \Delta_P^2 - \eta_L^2 \sum L\right). \qquad (17\text{-}32)$$

Observații. 1. În așa-numitele „noi formule" elaborate de *AIG* în *Oslo* în anul 1948, la numitorul formulelor (17-29) — (17-32) se află cifra 9 în locul cifrei 4, deoarece au fost considerate erorile probabile și nu erorile medii.

2. Peste o anumită limită, care de regulă este situată la 20...30 km, acțiunea erorilor sistematice devine întîmplătoare, astfel încît în cadrul rețelelor naționale de ord. I sau în rețelele internaționale calculul acestora nu este absolut necesar.

17.1.4.3. **Procedeul Grafarend-Vaníček de determinare a corelațiilor în lucrările de nivelment geometric geodezic.** Determinarea corelațiilor în lucrările de nivelment geometric geodezic este tratată în mai multe lucrări de specialitate, dintre care cele elaborate de *Lucht* (1972) și *Grafarend-Vaníček* (1980) pot fi considerate ca reprezentative. În continuare se prezintă principiile și algoritmul de calcul în cadrul procedeului *Grafarend-Vaníček*. fără expunerea demonstrațiilor extrem de voluminoase care pot fi urmărite în lucrarea originală.

În ambele lucrări menționate mai înainte se demonstrează teoretic și se exemplifică și pe lucrări practice efective că ipoteza independenței statistice a determinărilor diferențelor de nivel δh_i pe intervalele liniei de nivelment din figura 17-6 nu este satisfăcută.

Rezultă că ecuația (17-22) nu este strict riguroasă și ca urmare expresiile ponderilor (17-23) și (17-24), care se folosesc aproape în exclusivitate în prelucrările actuale, pot fi considerate aproximative.

Pentru a determina legea de propagare a erorilor întîmplătoare în celălalt caz extrem , al determinărilor *total dependente*, se scrie relația (17-18) și sub forma:

$$\Delta h = \sum_i \delta h_i = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{h}, \qquad (17\text{-}33)$$

unde:

$$\mathbf{e} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Vmatrix}; \qquad \delta\mathbf{h} = \begin{Vmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta h_{n_i} \end{Vmatrix} \qquad (17\text{-}34)$$

Aplicînd teorema covarianței, prezentată în manual prin relațiile (9-45) și (9-46) rezultă:

$$\sigma^2_{\Delta_h} = \mathbf{e}^T \mathbf{C}_{\delta h}\, \mathbf{e}, \qquad (17\text{-}35)$$

unde $\mathbf{C}_{\delta h}$ reprezintă matricea de covarianță a diferențelor de nivel măsurate pe intervalele liniei de nivelment.

În *caz de independență*, matricea $\mathbf{C}_{\delta h}$ nu are termeni dreptunghiulari, astfel că relația (17-35) se transformă în relația (17-19), care apare deci ca un caz particular.

În *caz de dependență totală* și în ipoteza intervalelor de lungimi egale:

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_{n_i} = l_0 = 1, \qquad (17\text{-}36)$$

rezultă variațe egale pentru toate intervalele liniei de nivelment considerate:

$$\sigma^2_{\delta_h} = \sigma_0^2. \qquad (17\text{-}37)$$

În consecință, covariațele σ_{ij} pot avea fie valoarea $+\sigma_0^2$, fie valoarea $-\sigma_0^2$, corespunzător unei dependențe pozitive și respectiv negative. Ultima ipoteză nu are sens și ca urmare nu va fi folosită. În aceste condiții, matricea de covarianță a diferențelor de nivel măsurate, total dependente este

$$\mathbf{C}_{\delta h} = \sigma_0^2 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (17\text{-}38)$$

astfel încît:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \sigma_0^2 \sum_1^{n_i} \cdot \sum_1^{n_i} 1 = \sigma_0^2\, n_i^2. \qquad (17\text{-}39)$$

Din ipoteza (17-36) rezultă $n_i = L/l_i = L$, astfel că relația (17-39) se poate scrie sub forma:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \sigma_0^2\, L^2, \qquad (17\text{-}40)$$

unde L este lungimea liniei de nivelment considerate. După cum este cunoscut, ecuația (17-40) este specifică propagării erorilor sistematice.

Se poate demonstra că în orice caz de dependență statistică parțială (ceea ce corespunde situațiilor efective), varianța se află cuprinsă între limitele date de relațiile (17-21) și respectiv (17-40):

$$\sigma_0^2\, L \leqslant \sigma^2_{\Delta h} \leqslant \sigma_0^2\, L^2; \quad L \geqslant 1. \qquad (17\text{-}41)$$

Concluzia (17-41) conduce la afirmația că legea de propagare a erorilor (întîmplătoare și chiar unele sistematice) în cazul observațiilor *parțial de-*

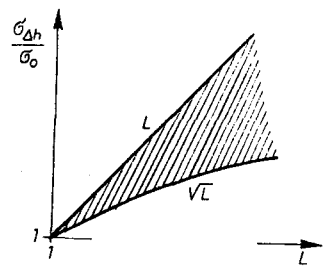


Fig. 17-7. Familia curbelor de propagare a erorilor în rețelele de nivelment geometric.

pendente, trebuie să fie descrisă de o curbă monotonă, care aparține spațiului haşurat din figura 17-7.

În acest spațiu *se află o infinitate de familii de curbe cu un singur parametru care ar putea fi alese ca funcții de covariață*. Suplimentar, *Grafarend* și *Vaníček* prezintă încă cinci condiții pe care trebuie să le satisfacă o astfel de familie de curbe, oprindu-se la două modele care sînt examinate amănunțit în lucrarea citată.

Unul dintre aceste modele, care se apropie, de fapt, și de cel preferat de *Lucht* (1972) are următoarea formulare:

$$\operatorname{cov}(\lambda;\ |l-l'|) = \lambda^{|l-l'|};\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{17-42}$$

unde λ este parametrul unic al modelului. În (17-42) s-au avut în vedere două intervale de lungimi l și l', dintr-o linie de nivelment de lungime L. Autorii procedeului descris atrag atenția asupra faptului că modelul de covariață trebuie *să se adapteze cît mai corespunzător* tehnologiei lucrărilor de nivelment, sperînd că modelele prezentate ca propuneri satisfac această cerință primordială. Dar, în principiu, problema rămîne deschisă, putînd fi elaborate și alte modele de covariață.

Succesiunea operațiunilor de determinare a matricei de covariață este apoi următoarea:

● Pentru o anumită regiune, în funcție de caracteristicile semnificative de climă, morfologie ș.a., se presupune cunoscută o valoare medie pentru raportul $\sigma_{\Delta h}/\sigma_0$, care se va încadra însă în limitele date de relația (17-41). În rezolvările practice se poate apela, de exemplu, și la formulele prezentate în 17.1.4.2 pentru determinarea acestui raport.

● În funcție de $ln\ (\sigma_{\Delta h}/\sigma_0)$ și lungimea L se deduce valoarea parametrului λ din tabelul 17-3.

● Variațele din matricea de varianță — covariață $\mathbf{C}_{\delta h}$:

$$\mathbf{C}_{\delta h} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n_i} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \sigma_{n_i1} & \sigma_{n_i2} & \cdots & \sigma_{n_in_i} \end{Vmatrix}, \tag{17-43}$$

Tabelul 17—3

L \ λ	,030	,100	,300	,500	,600	,700	,800	,900	,950	,970	,990	,995
1,0	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00
3,0	,66	,72	,83	,92	,96	,99	1,03	1,05	1,06	1,09	1,10	1,10
10,0	1,30	1,38	1,54	1,71	1,81	1,91	2,03	2,16	2,23	2,26	2,29	2,30
30,0	1,86	1,94	2,12	2,31	2,43	2,57	2,75	3,01	3,18	3,27	3,35	3,38
100,0	2,46	2,55	2,73	2,93	3,06	3,21	3,41	3,74	4,04	4,21	4,45	4,53
300,0	3,01	3,10	3,29	3,49	3,61	3,77	3,98	4,32	4,66	4,89	5,31	5,48
1 000,0	3,62	3,70	3,89	4,09	4,22	4,37	4,58	4,94	5,28	5,53	6,05	6,34
3 000,0	4,07	4,25	4,44	4,64	4,77	4,92	5,14	5,49	5,84	6,10	6,63	6,96
10 000,0	4,77	4,85	5,04	5,24	5,37	5,52	5,74	6,09	6,44	6,70	7,25	7,59

se deduc cu relația:

$$\sigma_i^2 = (\sigma_0 L^\alpha)^2, \tag{17-44}$$

unde $ln\ L^\alpha$ se obține din același tabel 17-3, în funcție de L și λ cunoscute. În cazul liniilor de nivelment:

$$L^\alpha = \sigma_{\Delta h}/\sigma_0, \tag{17-45}$$

iar în cazul intervalelor de nivelment, analog:

$$l^\alpha = \sigma_{\delta h}/\sigma_0. \tag{17-46}$$

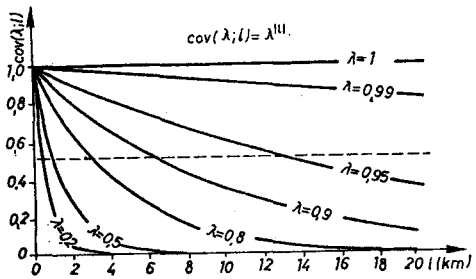


Fig. 17-8. Familia funcțiilor de covariață.

● Covariațele sînt determinate cu relația:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i\,\sigma_j \operatorname{cov}(\lambda;\ |l_i - l_j|), \tag{17-47}$$

unde $\operatorname{cov}(\lambda;\ |l_i - l_j|)$ se determină de pe diagrama din figura 17-8, iar σ_i și σ_j au fost determinați.

● După determinarea completă a matricei de covariață $\mathbf{C}_{\delta h}$ sau $\mathbf{C}_{\Delta h}$, după necesități, se poate calcula matricea cofactorilor $\mathbf{Q}$ corespondentă cu relația cunoscută (9-10) și în continuare matricea ponderilor $\mathbf{P}$ cu relația (9-13).

17.2. NIVELMENTUL TRIGONOMETRIC GEODEZIC

Altitudinile punctelor rețelelor geodezice planimetrice se determină, de regulă, prin metoda nivelmentului trigonometric. Metoda este folosită și în cazul rețelelor geodezice tridimensionale, precum și în geodezia fizică, pentru determinarea deviațiilor verticalei sau a ondulațiilor geoidului. Această mare diversitate de domenii în care își găsește aplicabilitatea nivelmentul trigonometric *se bazează însă de fiecare dată, pe anumite ipoteze*, care se referă fie la mediul înconjurător, fie la necesitatea existenței unei anumite categorii de date sau măsurători foarte precise (care eventual să fie considerate cu ponderi infinit de mari), urmînd ca din prelucrarea acestora să se determine celelalte elemente care intervin în lucrare.

17.2.1. FORMULE UZUALE PENTRU DETERMINAREA DIFERENȚEI DE NIVEL PRIN NIVELMENT TRIGONOMETRIC

La *cursul de topografie* s-a demonstrat formula de determinare a diferenței de nivel $\Delta H_{12} = H_2 - H_1$ prin nivelment trigonometric în cazul distanțelor mici (de ordinul zecilor sau cel mult al cîtorva sute de metri):

$$\Delta H_{12} = D \operatorname{ctg} \zeta_1^0 + I_1 - S_2, \tag{17-48}$$

unde:

H_1, H_2 sînt cotele punctelor P_1 și P_2;
D — distanța în plan orizontal între punctele considerate;
ζ_1^0 — unghiul zenital măsurat în punctul P_1;
I_1, S_2 — înălțimea instrumentului (în punctul de stație P_1), respectiv a semnalului vizat (în punctul P_2).

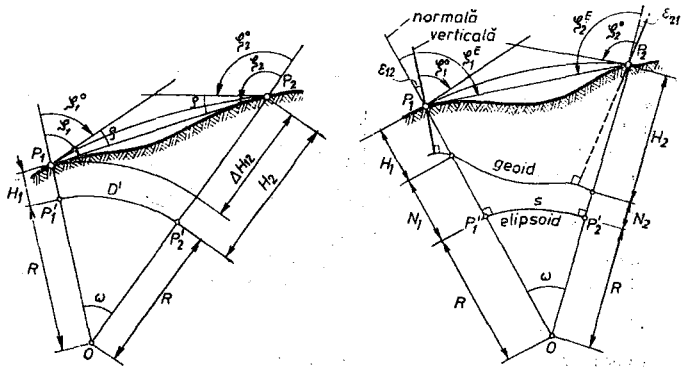


Fig. 17-9. Nivelmentul trigonometric geodezic.

Pe măsură ce distanța D crește, formula (17-48) devine inaplicabilă, deoarece trebuie să se țină seama de sfericitatea Pămîntului, precum și de refracția terestră verticală.

17.2.1.1. **Nivelmentul trigonometric geodezic reciproc și simultan.** Formula de calcul este dedusă în următoarele ipoteze inițiale:

— se măsoară simultan unghiurile zenitale ζ_1^0 și ζ_2^0 în punctele P_1 și P_2 (fig. 17-9, *a*);

— sînt neglijate ondulațiile geoidului (și ca urmare elipsoidul sau sfera medie *Gauss* de rază R devine suprafață de referință), precum și deviațiile verticalei (și ca urmare verticala locului poate fi înlocuită de normala la elipsoid sau la sfera medie);

— este cunoscută distanța dintre punctele P_1 și P_2 (eventual dintr-o prelucrare separată a observațiilor geodezice în rețeaua planimetrică din care fac parte punctele). Așa cum este reprezentată în figura 7-9,*a*, distanța D' este considerată redusă la nivelul mării (geoidului);

— se cunosc altitudinile aproximative ale celor două puncte notate H_1^0 și respectiv H_2^0 (eventual de pe o hartă).

Pentru început se va considera că observațiile se execută la sol $I_1 = S_1 = I_2 = S_2 = 0$, urmînd ca să se introducă în formulele finale corecția respectivă și din acest punct de vedere.

Din figura 17-9 se poate scrie:

$$\frac{R + H_1}{R + H_2} = \frac{\sin \zeta_2}{\sin \zeta_1},$$

care se poate transforma în:

$$\frac{-\Delta H_{12}}{2R + H_1 + H_2} = \frac{\sin \zeta_2 - \sin \zeta_1}{\sin \zeta_2 + \sin \zeta_1} = \operatorname{tg} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}. \quad (17\text{-}49)$$

În ipoteza (15-5) și împreună cu relația (15-10), formula (17-49) devine:

$$\Delta H_{12} = 2R\left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\zeta_2^0 - \zeta_1^0}{2}, \quad (17\text{-}50)$$

unde:

$$H_m^0 = \frac{H_1^0 + H_2^0}{2}. \quad (17\text{-}51)$$

Deoarece ω este un unghi mic (în triangulație ω nu depășește 2^c) se poate considera $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \approx \frac{\omega}{2}$, astfel că se obține următoarea formulă:

$$\Delta H_{12} = D' \left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{tg} \frac{\zeta_2^0 - \zeta_1^0}{2}. \quad (17\text{-}52)$$

Observații. 1. Termenul corectiv $\left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right)$ aduce o contribuție semnificativă numai pentru zone muntoase, atunci cînd:

$$H_m^0 \geq 1\,000 \text{ m}. \quad (17\text{-}53)$$

2. Formula (17-52) aplicată în cazul *observațiilor zenitale reciproce* trebuie completată cu contribuțiile neglijate pînă acum, după cum urmează:

$(I_1 - S_2)$ pentru punctul P_1 (se determină ΔH_{12});

$(I_2 - S_1)$ pentru punctul P_2 (se determină $\Delta H_{21} = -\Delta H_{12}$), astfel încît formula întrebuințată în nivelmentul trigonometric geodezic reciproc este:

$$H_{12} = D' \left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{tg} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{2}. \quad (17\text{-}54)$$

17.2.1.2. **Nivelmentul trigonometric unilateral (într-un singur sens).** În majoritatea situațiilor, în practică nu se poate realiza nivelment trigonometric reciproc și simultan, observațiile zenitale în cele două puncte considerate executîndu-se în zile diferite și prin urmare în condiții atmosferice diferite. De aceea se presupune că s-a măsurat doar unghiul zenital ζ_1^0 în punctul P_1. Din figura 17-9,*a* se obține în ipoteza (15-5):

$$\zeta_2^0 = 180° - (\zeta_1^0 + 2\rho - \omega), \quad (17\text{-}55)$$

astfel încît formula de calcul va fi [și prin considerarea relației (15-9)]:

$$\Delta H_{12} = D' \left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{ctg} \left(\zeta_1^0 - \frac{1-k}{2}\omega\right) + I_1 - S_2. \quad (17\text{-}56)$$

Dacă se dezvoltă în serie ultima paranteză:

$$\operatorname{ctg} \left(\zeta_1^0 - \frac{1-k}{2}\omega\right) \approx \operatorname{ctg} \zeta_1^0 + \frac{1-k}{2} \frac{\omega}{\sin^2 \zeta_1^0},$$

se obține formula de calcul în nivelmentul trigonometric unilateral (într-un singur sens):

$$\Delta H_{12} = D' \left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{ctg} \zeta_1^0 + \frac{1-k}{2R \sin^2 \zeta_1^0} \cdot D'^2 + I_1 - S_2. \quad (17\text{-}57)$$

Observație. Din păcate, multe instituții folosesc o altă formulă, în care se mai introduce o aproximație și anume $\zeta_1^0 \approx 100^g$, ceea ce evident nu corespunde realității, rezultînd formula:

$$\Delta H_{12} = D' \left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{ctg} \zeta_1^0 + \frac{1-k}{2R} D'^2 + I_1 - S_2. \quad (17\text{-}58)$$

17.2.2. POSIBILITĂȚI DE CALCUL APROXIMATIV AL COEFICIENTULUI DE REFRACȚIE k

● În cazul în care se cunoaște ΔH_{12} (din determinări precise, prin nivelment geometric de precizie), precum și distanța D', se poate calcula cu ajutorul observațiilor zenitale unilaterale coeficientul de refracție k (singura necunoscută în relația de mai sus). Media unor multiple determinări din acest fel poate fi folosită în calcule pentru alte observații din zona respectivă.

Această metodă oferă rezultate mai puțin precise decît cele obținute prin aplicarea formulei (15-11).

● Deoarece în 15.1.1 s-a presupus că observațiile zenitale reciproce și simultane sînt executate de la sol ($I_1 = S_1 = I_2 = S_2 = 0$), formula care se obține în cazul executării observațiilor de pe semnale înalte (*Lőrinczi* 1959) este:

$$(k - 1) = R/D' \left\{ \pi - (\zeta_1^0 + \zeta_2^0)_{radiani} + \frac{I_1 + I_2}{D'} - \frac{S_1 + S_2}{D'} \right\}. \quad (17\text{-}59)$$

Pentru semnalele geodezice înalte construite în țara noastră $S - I \approx 5$ m, astfel încît contribuția ultimilor doi membri din relația (17-59) nu este deosebit de mare.

● O altă formulă pentru determinarea coeficientului de refracție k (*Rusu* ș.a. 1964) se bazează pe utilizarea diferențelor de nivel calculate cu relația (17-57), însă pe baza unor determinări din ambele puncte:

$$\begin{aligned} \Delta H_{12} &= H_2 - H_1 = D' \operatorname{ctg} \zeta_1^0 + \frac{1-k}{2R} D'^2 + I_1 - S_2; \\ \Delta H_{21} &= -\Delta H_{12} = D' \operatorname{ctg} \zeta_2^0 + \frac{1-k}{2R} D'^2 + I_2 - S_1. \end{aligned} \quad (17\text{-}60)$$

După adunarea celor două relații se obține:

$$(k - 1) = \frac{R}{D'} (\operatorname{ctg} \zeta_1^0 + \operatorname{ctg} \zeta_2^0) + \frac{R}{D'^2} (I_1 + I_2 - S_1 - S_2). \quad (17\text{-}61)$$

17.2.3. ESTIMAREA APROXIMATIVĂ A PONDERILOR OBSERVAȚIILOR ZENITALE GEODEZICE

Observațiile zenitale sînt afectate într-o măsură considerabilă de efectul refracției atmosferice verticale și în consecință rezultatele obținute prin folosirea lor, în nivelmentul trigonometric geodezic, nu pot fi considerate ca foarte exacte. De regulă, precizia acceptată este de ordinul $\pm$ 0,1 m sau chiar și mai mică.

Din acest motiv, în nivelmentul trigonometric geodezic se pot accepta și estimări aproximative ale ponderilor observațiilor zenitale efectuate în rețelele geodezice.

Pentru situațiile frecvent întîlnite în lucrările geodezice, se poate exprima aproximativ varianța empirică a diferenței de nivel determinată cu relația (17-57) în funcție de varianțele empirice ale elementelor componente, ***prin neglijarea corelații'or*** existente între acestea:

$$s'^2_{\Delta h} = a_1 s'^2_\zeta + a_2 s'^2_k + a_3 s'^2_{D'} + s'^2_I + s'^2_S, \quad (17\text{-}62)$$

unde:

$$a_1 = \left(\frac{D'}{\rho^{cc}}\right)^2 \left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \zeta_1^0}; \; a_2 \approx \frac{D'^4}{4R^2}; \; a_3 \approx \operatorname{ctg}^2 \zeta_1^0. \quad (17\text{-}63)$$

Ponderea s-ar determina, în această ipoteză, cu relația:

$$p = \frac{c}{s'^2_{\Delta h}}. \quad (17\text{-}64)$$

Avînd în vedere contribuția relativ mică pe care o aduc ultimii doi termeni, în mod deosebit atunci cînd înălțimile I și S se măsoară cu multă atenție, la calculul ponderilor ar fi suficient să se utilizeze numai primii doi termeni din relația (17-62):

$$\frac{c}{p} = s'^2_{\Delta h} \approx a_1 s'^2_\zeta + a_2 s'^2_k. \quad (17\text{-}65)$$

În practică, de cele mai multe ori se aproximează și mai mult, folosindu-se formula:

$$p = \frac{c}{D^2}, \quad (17\text{-}66)$$

în care se include doar influența parțială, dar principală, a coeficientului a_1. În asemenea caz distanța D este exprimată în km, iar constanta c este astfel aleasă încît ponderile să oscileze în jurul valorii 1.

Pentru exemplificare se prezintă în tabelul 17-4 diverse rezultate obținute cu formulele prezentate, prin considerarea următoarelor date inițiale:

$$s'_D = \pm 0{,}10 \text{ m}; \quad \zeta_1^0 = 60^g; \quad s'_\zeta = \pm 5^{cc}; \quad H_m^0 = 1200 \text{ m};$$
$$s'_k = \pm 0{,}05; \quad s'_I = s'_S = \pm 0{,}02 \text{ m}.$$

Pentru primele două distanțe s-a considerat $c = 0{,}01$, iar pentru ultimele $c = 1$. Din tabelul 17-4 se observă că pentru distanțe mici ($D < 3$ km) aproximația din relația (17-65) modifică substanțial rezultatele, dar pe măsură ce distanțele cresc, aproximația poate fi acceptată. Motivația constă în faptul că pentru distanțe mai mari de 5 km influența erorii de determinare a coeficientului k predomină în formulele de calcul, astfel încît neglijarea erorii în distanță nu mai are practic nici o importanță.

Din tabelul 17-4 se observă că nivelmentul trigonometric geodezic poate fi folosit cu rezultate satisfăcătoare doar pentru distanțe pînă la 6 km. Din acest motiv, proiectul determinării cotelor rețelelor de triangulație este diferit de proiectul determinării lor planimetrice, urmărindu-se ca lungimea vizelor, pentru observații zenitale, să oscileze în jurul limitelor mai sus menționate. Peste aceste limite contribuția dată de eroarea cu care se cunoaște coeficientul de refracție k este deosebit de mare, deoarece aceasta se propagă direct proporțional cu D^2.

Asupra determinării ponderilor în nivelmentul trigonometric geodezic se va reveni cu completări în 20.4.2.1.2. și 23.3.1 [a se vedea relația (20-38)].

Tabelul 17-4

Distanța D (km) / $s'_{\Delta h}$ (m); p	1	3	6	20
Cu relațiile (17-62) și (17-64)	0,079; 1,6	0,092; 1,2	0,176; 0,3	1,59; 0,4
Cu relațiile (17-65) și (17-66)	0,012; 0,01	0,050; 3,9	0,158; 0,4	1,59; 0,4

17.2.4. EFECTUAREA OBSERVAȚIILOR ZENITALE

Planul observațiilor zenitale este relativ mai simplu decît cel al observațiilor azimutale. Măsurările zenitale se execută cu aceleași aparate cu care se execută și observațiile azimutale, pe grupe de cîte 2—4 direcții. Fiecare direcție este determinată cu cîte trei măsurări complete, în ambele poziții ale lunetei și anume: fie la toate cele trei fire zenitale, fie de trei ori la firul unic zenital în funcție de forma reticulului teodolitului utilizat.

Media aritmetică ζ_m^0 a valorilor ζ_i^0, rezultate din cele n măsurări (în general $n = 3$), reprezintă valoarea compensată în stație a unghiului zenital măsurat:

$$\zeta_m^0 = \frac{[\zeta_i^0]}{n}. \qquad (17\text{-}67)$$

Erorile medii ale unui unghi zenital măsurat s_{ζ^0} și respectiv ale unghiului zenital mediu $s_{\zeta_m^0}$ se determină cu relațiile cunoscute:

$$s_{\zeta^0} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}; \qquad s_{\zeta_m^0} = \sqrt{\frac{[vv]}{n\,(n-1)}}, \qquad (17\text{-}68)$$

unde:

$$v_i = \zeta_m^0 - \zeta_i^0. \qquad (17\text{-}69)$$

În tabelul 17-5 se prezintă un model de carnet de teren utilizat în producție la noi în țară.

17.2.5. DETERMINAREA ALTITUDINILOR ELIPSOIDICE ȘI A DEVIAȚIILOR VERTICALEI

Un aspect extrem de complex al utilizării metodei nivelmentului trigonometric este constituit de posibilitatea determinării simultane a altitudinilor elipsoidice și a deviațiilor verticalei (fig. 17-9, *b*).

La începutul 17.2.1 au fost punctate ipotezele în care se deduc formulele de calcul în nivelmentul trigonometric geodezic. Problematica la care ne referim renunță, aproape în totalitate, la aceste ipoteze, urmărind să abordeze mult mai conform cu realitatea desfășurarea lucrărilor de nivelment trigonometric. Modificările de principiu care se vor consemna în continuare pot fi constatate și prin compararea figurii 17-9, *b* cu figura 17-9,*a*:

● Fiind necesară determinarea unor altitudini, este necesar să se revină la unul din sistemele abordate în cap. 4 din manual, în care pot fi aduse diferențele de nivel măsurate, prin aplicarea unor reduceri specifice sistemului. Pentru a evita unele suprapuneri de notații, se vor face referiri la sistemul de altitudini ortometrice, deși sistemul de altitudini oficializat la noi în țară este cel normal. Deosebirile sînt însă, în contextul de față, numai de natură pur formală (de notații), calea de rezolvare fiind în principiu identică. Prin relația (4-37) s-a stabilit legătura dintre altitudinile ortometrice, notate mai simplu aici cu H, altitudinile elipsoidice H^E și ondulațiile geoidului:

$$H = H^E + N. \qquad (4\text{-}37)$$

În acest fel se ridică una dintre ipoteze și anume cea referitoare la suprafața de referință.

Tabelul 17—5

Denumirea punctului: *Dealul Viei*

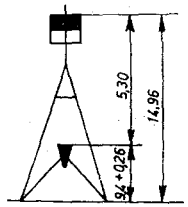
Ordinul punctului: IV. Trapezul L-34-93

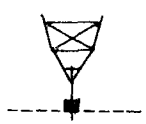
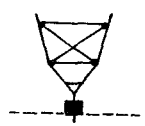
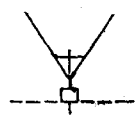
Data: 2.09.1960. Instrument Wild T2 seria 034

Început: 11^{45} Terminat: 12^{05}

Starea timpului: senin, vînt din est

Vizibilitatea: bună



Punctul vizat (schiță, direcție azimutală)	Lecturi: cerc dreapta g	c	cc	M^{cc}	cerc stînga g	c	cc	M^{cc}	Unghiul zenital g	c	cc
CÎNTĂRI	98	99	35	35	300	36	02	00	99	31	67
$0^g\,00^c\,00^{cc}$			36			35	99				
	99	31	21	23	300	67	73	73			75
			24				74				
	99	62	96	97	300	99	60	59	Media 99	31	69
			98				58				70
ARSURI	99	89	27	25	299	47	71	72	100	20	77
$58^g\,91^c\,90^{cc}$			24				73				
	100	21	10	08	299	79	46	44			82
			07				42				
	100	52	84	86	300	11	24	22	Media 100	20	82 / 82
			88				21				80
ARBORI	98	44	24	26	300	92	61	60	98	75	83
$115^g\,26^c\,00^{cc}$			28				59				
	98	76	20	23	301	24	46	48			87
			25				49				
	99	08	00	01	301	56	21	23	Media 98	75	89
			02				25				86

● Unghiul zenital raportat la normala la elipsoid ζ^E diferă de cel măsurat în teren:

$$\zeta_1^E = \zeta_1^0 + \varepsilon_1 + \rho_1. \tag{17-70}$$

Cu ε_1 s-a notat, ca în cap. 5, proiecția unghiului de deviație a verticalei pe direcția punctelor $P_1 P_2$, al cărei azimut geodezic este A_{12}. Revenind la relația (5-45) se poate scrie:

$$\varepsilon_1 = \xi_1 \cos A_{12} + \eta_1 \sin A_{12}, \tag{5-45}$$

unde ξ_1, η_1 sînt componentele în meridian și respectiv în primul vertical ale unghiului de deviație a verticalei.

● Spre deosebire de figura 17-9, *a* unde de regulă distanța D este considerată ca redusă la nivelul mării, în figura 17-9, *b* se operează cu distanța s, redusă la elipsoid [v. relația (20-34)].

Avînd în vedere aceste modificări, relația (17-57) se transformă în:

$$(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1) = s\left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right) \operatorname{ctg}\ \zeta_1^0 + s\left(1 + \frac{H_m^0}{R}\right)\left(\frac{\varepsilon''}{\rho''}\right)\frac{1}{\sin^2 \zeta_1^0} + \\ + \frac{1-k}{2\,R \sin^2 \zeta_1^0} s^2 + I_1 - S_2. \tag{17-71}$$

În formula (17-71) intervine un număr mare de necunoscute, astfel încît deducerea lor se poate realiza doar iterativ:

— dacă se cunosc, din determinări prealabile, ondulațiile geoidului N_1 și N_2, relația (17-71) poate servi la calculul altitudinilor H și al deviației verticalei ε;

— este posibilă și varianta cealaltă, în care diferența de nivel $(H_2 - H_1)$ să fie cunoscută din măsurători anterioare de nivelment geometric și atunci obiectivul determinărilor va fi constituit de calculul ondulațiilor geoidu- N și al deviațiilor verticalei ε;

— ambele variante de calcul presupun diferite căi de rezolvare în funcție de modul în care intervine distanța s în prelucrare și anume: ca distanță măsurată și redusă pe elipsoid sau ca distanță definitivă, rezultată dintr-o prelucrare pe elipsoid;

— un alt grup de variante de prelucrare este generat de modalitatea de tratare a influenței refracției: un singur coeficient k pentru toată rețeaua sau un coeficient k pentru fiecare stație sau, în cazul extrem, pentru fiecare măsurătoare zenitală un alt coeficient;

— considerarea sau ignorarea corelațiilor evidente, existente între mărimile care intervin în această prelucrare, oferă alte noi posibilități de desfășurare a calculelor numerice.

Fiecare din această multitudine de aspecte implică multă atenție la constituirea modelului funcțional-stochastic al prelucrării. Nu trebuie ignorat nici faptul că cel puțin în unul sau în mai multe puncte din rețea, ondulațiile geoidului și deviațiile verticalei trebuie cunoscute din determinări astronomo-geodezice, astfel ca să existe și posibilități de control sau chiar de constrîngere pe elemente determinate în sisteme generale (v. cap. 5).

Capitolul 18
MĂSURAREA LUNGIMILOR ÎN REȚELELE GEODEZICE

Pentru definirea scării rețelei de triangulație, precum și pentru micșorarea erorilor longitudinale este necesar ca în rețea să se efectueze și măsurări de lungimi. Acestea pot fi: *baze geodezice*, măsurate cu firul invar, din care se deduc laturi de triangulație prin intermediul rețelelor de dezvoltare a bazelor (v. 8.2.2), precum și *laturi ale rețelei de triangulație* măsurate direct cu instrumente electronice. Descrierea ultimelor aparate și a tehnicilor specifice de măsurare formează obiectul unui alt curs din cadrul secției de geodezie (*Atudorei* 1981).

În prezent măsurările cu firul invar au un caracter extrem de limitat, doar în situații speciale, cum ar fi, de exemplu, măsurarea bazelor etalon, utilizate pentru calibrarea aparatelor electronice de măsurat distanțe. De aceea expunerea acestui instrument, a metodei de folosire și mai ales a corecțiilor specifice va fi mult mai redusă în comparație cu ediția anterioară a manualului (*Ghițău* 1972).

18.1. GENERALITĂȚI PRIVIND SISTEMUL METRIC

Lungimile folosite în rețelele de triangulație naționale sau internaționale sînt măsurate cu instrumente diferite, uneori la intervale mari de timp, astfel încît o problemă de excepțională însemnătate pentru geodezie o constituie *definirea unității de lungime*.

În decursul timpului, pentru definirea unității de lungime au fost înregistrate următoarele două tendințe:

— unitatea de lungime a fost reprezentată de o anumită mărime (etalon) aleasă convențional;

— unitatea de lungime a avut un corespondent fizic natural.

Prima unitate de lungime internațională a fost *„toise du Perou"* folosită inițial în expedițiile franceze din *Peru* și *Laponia* în anul 1735, destinate deducerii formei și dimensiunilor Pămîntului. Un *toise du Perou* era o bară de fier, în lungime echivalentă de circa 1,949 m, fiind declarat în anul 1766 ca unitate normală de lungime (la temperatura de 16,25°C). În primele decenii ale secolului al XIX-lea s-au făcut copii după etalonul francez, care au fost folosite în diverse țări pentru efectuarea măsurărilor geodezice.

La 8 mai 1790 la recomandarea cunoscutului om de stat *C.M. de Talleyrand*, Adunarea națională franceză propune introducerea unui nou sistem de măsură, care să se refere la mărimi fizice naturale, cu intenția de a putea fi realizat independent, în oricare țară. În acest context, la propunerea lui *C. Borda*, se introduce *metrul ca unitate de lungime*, fiind definit ca *„a 10 000 000-a parte din sfertul de meridian terestru"*.

Sistemul metric a intrat însă în vigoare abia la 1 ianuarie 1876, după ce în prealabil a avut loc conferința diplomatică (1875) în urma căreia s-a semnat Convenția internațională a metrului. Ia ființă *„Bureau international des poids et mesures"* (*BIPM*), cu sediul la *Sèvres*, lîngă *Paris*, sub a cărui dirijare s-a dezvoltat și perfecționat în continuare sistemul metric internațional.

Definiția metrului internațional datează din 1927, de la a VII-a conferință generală pentru măsuri și greutăți: *„Unitatea de lungime este metrul*

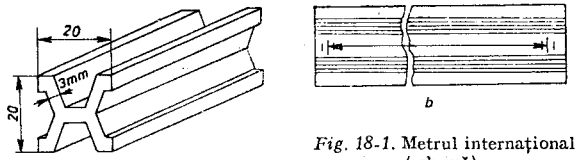


Fig. 18-1. Metrul internațional (schemă):
a — secțiune; *b* — vedere de sus.

(m); aceasta este distanța între axele celor două diviziuni medii, la 0°C, a unei bare de platină-iridium, depusă la Biroul internațional pentru măsuri și greutăți cu sediul la Breteuil (Sèvres-Paris), adoptată ca metru prototip în cadrul primei conferințe generale pentru măsuri și greutăți (1889), cînd această bară se află în poziție orizontală, la presiunea de o atmosferă, fiind așezată simetric pe role cu diametrul de minimum 1 cm, dispuse la 571 mm" (fig 18-1).

Trebuie semnalat că modificarea presiunii cu o atmosferă atrage o variație în lungimea barei de 0,48 μ, iar între poziția orizontală și verticală a barei rezultă o diferență de lungime de 0,65 μ.

Fiecare țară care a aderat la convenția metrului a primit cîte o copie după prototipul de la *Sèvres*, care servește ca prototip național de măsurare. *România* a introdus sistemul metric în 1881, primind ulterior metrul nr. 6 C, care la 0°C are o lungime de 1m ± 1,68 μ și este păstrat la *Direcția Generală de Metrologie*.

Ideea folosirii oscilațiilor razei luminoase ca un *„micrometru natural de cea mai mare perfecțiune"* aparține fizicianului francez *H. Fizeau*, fiind materializată pentru prima dată cu interferometrul *Michelson*, la sfîrșitul secolului trecut. În 1960, la cea de-a XI-a conferință pentru măsuri și greutăți, *metrul a fost definit în funcție de lungimea de undă a radiației corespunzătoare culorii portocalii din spectrul vizibil al izotopului de kripton Kr 86 între nivelele $2p_{10}$ și $5d_5$*:

$$1\text{m} = 1\,650\,763{,}73\ \lambda_{kr} \text{ pentru vacuum.} \qquad (18\text{-}1)$$

Definiția are următoarele avantaje principale: constanță în timp, posibilități de realizare în diverse laboratoare a prototipurilor sau etaloanelor. Este de semnalat însă că realizările practice, concrete, sînt însoțite de unele dificultăți.

În țara noastră s-au folosit pe larg și următoarele unități de lungime și de suprafață (*Klinger* 1958, *Lőrinczi* 1959):

stînjenul = 1,9665 m (în *Muntenia*);

stînjenul gospodăresc = 2,33 m (în *Moldova*);

stînjenul = 1,896484 m (în *Ardeal*);

prăjina = 3 stînjeni = 5,8995 m (în *Muntenia*);

prăjina = 3 stînjeni = 6,6900 m (în *Moldova*);

pogonul = 72 × 18 stînjeni (în *Muntenia*) ≈ 5 011,7875 m² ≈ 1/2 ha;

falcea = 80 × 4 stînjeni (în *Moldova*) = 14 321,9520 m²;

jugăr = 1 600 stînjeni pătrați (în *Ardeal*) ≈ 5 754, 6424 m².

18.2. MĂSURAREA BAZELOR GEODEZICE CU FIRUL INVAR

Evoluția aparatelor utilizate la măsurarea bazelor geodezice, începînd cu cele măsurate de *Tycho Brahe* și *W. Snellius*, la începutul sec. XVII, prin utilizarea unor bare de lemn așezate cap la cap și pînă la sfîrșitul secolului trecut, poate fi urmărită de cititorul interesat în lucrări mai dezvoltate (*Jordan* ș.a. 1958, *Krasovski* 1955 ș.a.), o descriere sumară fiind prezentată și în ediția anterioară a manualului (*Ghițău* 1972).

Un salt calitativ remarcabil, cu semnificații majore în dezvoltarea măsurătorilor de baze geodezice, este realizat în anul 1897 cînd *R. Benoit* și *Ch. Guillaume*, după multiple cercetări, propun utilizarea unui aliaj nou, denumit *invar*, pentru confecționarea firelor folosite la măsurarea bazelor geodezice. Invarul este un aliaj format din circa 36% nichel, 64% fier și mici adaosuri de crom, mangan, siliciu, wolfram, carbon ș.a., care creează calitățile deosebite ale acestui material: duritate ridicată, rezistență la coroziune, posibilități de laminare, coeficient de elasticitate (modulul lui *Young*) mic, ușurință în înfășurarea firelor de invar pe un tambur ș.a.

Dintre proprietățile principale ale invarului se vor menționa cele mai importante pentru scopurile geodezice:

— coeficient de dilatare termică α foarte mic, putînd coborî către $0{,}5 \cdot 10^{-6}$;

— instabilitatea invarului; un fir de invar ținut în condiții de repaus are o tendință de alungire lentă, care încetează doar după cîțiva ani. Pentru micșorarea acestui defect, materialul este supus în procesul de fabricație, unei operații speciale, denumită *etuvaj*, iar pentru eliminarea influenței sale asupra măsurătorilor geodezice, se efectuează *etalonări ale firului invar, înainte și după măsurare*, pentru a se putea cunoaște lungimea sa medie avută în timpul lucrului;

— prin modificarea bruscă a temperaturii mediului în care se află firul invar (de exemplu, prin trecerea din condițiile de laborator la condițiile de lucru), lungimea firului invar suferă la început o modificare bruscă (în sensul modificării de temperatură) și apoi o modificare lentă, de sens contrar (așa-numita *depresiune a invarului*), care durează o anumită perioadă de timp, în funcție de mărimea variației de temperatură, proprietățile chimice ale firului folosit ș.a. De aceea, ca regulă generală, este necesar ca, înainte de utilizare, firul invar să fie ținut cîtva timp (1—1,5 ore) în aer liber, la temperatura mediului ambiant. De asemenea, trebuie evitate variațiile bruște de temperatură, care produc fenomenul semnalat;

— este de menționat, în sfîrșit, că la șocuri mari, invarul prezintă ten dințe de contractare și ca urmare trebuie transportat și manipulat cu deosebită grijă.

Un neajuns important al firelor și benzilor de invar constă în faptul că micile îndoituri nu pot fi îndreptate, iar orice ruptură conduce la scoaterea din uz a instrumentului, neputîndu-se opera reparații.

18.2.1. DESCRIEREA TRUSEI FIRULUI INVAR

În țara noastră s-au folosit fire invar fabricate de firmele *Carpentier* (*Franța*), *Aerogheopribor* (*U.R.S.S.*), *Askania* (*R.F.G.*) ș.a., ale căror piese componente principale sînt prezentate în continuare.

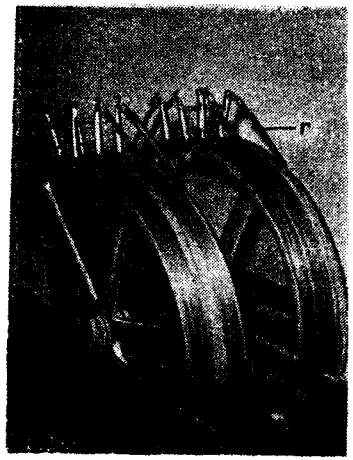


Fig. 18-2. Fire invar din trusa Aerogheopribor; *r* — rigletă.

18.2.1.1. **Firele şi panglica de invar.** O trusă completă este formată din:

— 4—6 fire invar de 24 m şi 1 fir invar de 8 m, înfăşurate două cîte două pe tambure de aluminiu, aşezate în cutii speciale (fig. 18-2);

— 1 panglică de invar de 4 m.

Firele invar (fig. 18-2) au diametrul de 1,65 mm şi greutatea specifică de 17,32 g/m. Pe lungimea firelor invar nu sînt practicate gradaţii, măsurarea lungimilor efectuîndu-se prin intermediul rigletelor *r*, situate la ambele capete ale firului. Rigletele (fig. 18-3) sînt divizate milimetric, pe o lungime de 8 cm, în acelaşi sens, astfel încît cu firele de invar se pot măsura *portei* în lungime de aproximativ 24 $\pm$ 0,08 m (respectiv 8 $\pm$ 0,08 m).

Panglicile de invar de 4 m lungime au, în general, 6 mm lăţime şi 0,5 mm grosime. Pe lungimea panglicii sînt practicate gradaţii pentru fiecare decimetru, încadrate cu gradaţii milimetrice, iar la capetele panglicii se află porţiuni de 8 cm gradate milimetric.

Cu o trusă completă se pot măsura, prin urmare, distanţe oarecare. Totuşi, pentru o mai bună organizare a măsurării, precum şi pentru evitarea unor surse de greşeli şi erori, lungimea bazelor geodezice reprezintă, aproape întotdeauna, multipli întregi de 24 $\pm$ 0,08 m, eliminîndu-se astfel necesitatea utilizării firului invar de 8 m şi a panglicii de invar de 4 m.

18.2.1.2. **Trepiede tensoare.** În timpul lucrului, firul invar este supus unei tensiuni P = 10 N, realizată prin intermediul a două trepiede tensoare situate la capetele porteii. La trepiedele tensoare ale firmei *Carpentier* (figura 18-4, *a*), centrarea scripetelui *1* pe care culisează firul de tensiune în direcţia aliniamentului bazei, este realizată prin manevrarea corespunzătoare a picioarelor trepiedului tensor. Firma *Aerogheopribor* a prevăzut în acest scop un dispozitiv auxiliar *2* care uşurează această operaţiune (figura 18-4, *b*).

18.2.1.3. **Trepiede port-reper.** Capetele fiecărei portei sînt materializate prin repere, susţinute de trepiede speciale (fig. 18-5, *a*). La măsurarea bazelor geodezice se folosesc 30—40 trepiede port-reper. Pe reper este trasată o diviziune foarte fină, în raport cu care se efectuează măsurarea distanţei.

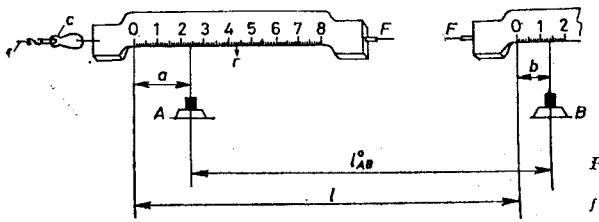
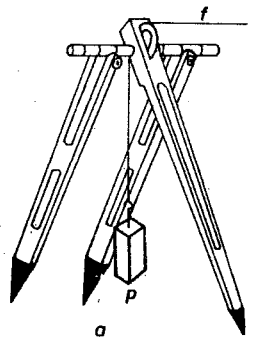
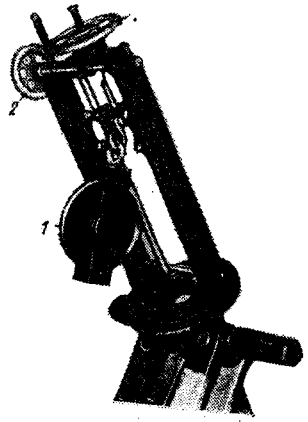


Fig. 18-3. Rigletele firului invar:
f — fir de tensiune; *c* — carabină; *r* — rigletă; *F* — firul invar.



a



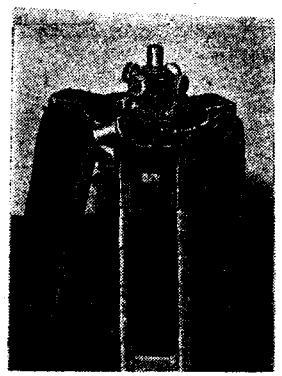
b

Fig. 18-4. Trepiede tensoare:
1 — scripete; *2* — dispozitive pentru centrare; *f* — fir de tensiune.

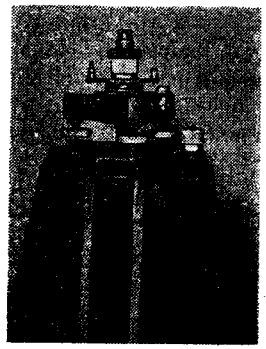
Reperul este protejat de un căpăcel, existînd şi posibilitatea orizontalizării sale pe timpul lucrului. La capetele bazei, precum şi în punctele de întrerupere a măsurării, se amplasează trepiede port-repere cu posibilitatea de centrare optică (cu ajutorul lotaparatelor, aşa cum se arată în figura 18-5, *b*).

18.2.1.4. **Accesorii.** La măsurarea bazei se folosesc următoarele accesorii principale:

— teodolit pentru realizarea aliniamentului bazei;
— fir gabarit, de oţel, în lungime de 24 m, folosit la pichetajul bazei;
— diverse scule necesare pentru pichetaj;
— termometru pentru înregistrarea temperaturii în timpul măsurării;
— instrument de nivelment de precizie şi mirete speciale, necesare determinării diferenţelor de nivel între reperele de la capetele porteelor.



a



b

Fig. 18-5. Trepiede port-reper.

18.2.2. EFECTUAREA MĂSURĂRII CU FIRUL INVAR

Măsurarea bazelor geodezice cu firul invar este o operație relativ simplă, însă trebuie efectuată cu foarte mare exactitate, pentru a se putea realiza o precizie de măsurare ridicată, reflectată prin erori relative mai mici decît $1 \cdot 10^{-6}$.

18.2.2.1. **Operații pregătitoare.** Întregul traseu al bazei trebuie amenajat corespunzător pentru a se asigura condiții optime de lucru, prin curățirea terenului pe o fîșie de minimum 3 m în ambele părți ale axului, efectuîndu-se defrișările necesare, nivelări de teren, construirea unor podețe peste cursuri mici de ape sau pentru evitarea pantelor mai mari ca 1/20.

La capetele bazei și în eventualele puncte de frîntură se amplasează borne și semnale geodezice. Punctele în care se întrerupe măsurarea bazei după o zi de lucru se materializează, de asemenea, cu borne, pentru a se asigura certitudinea necesară la reînceperea lucrului. Distanța măsurată, dus-întors, într-o zi normală de lucru se numește *secțiune* sau *segment*.

Pichetajul de detaliu al bazei se realizează cu teodolitul și firul gabarit, amplasîndu-se țăruși care delimitează capetele porteelor. Pe acești țăruși se centrează apoi trepiedele port-reper (cîte 10—20 odată, pentru a se asigura un flux de lucru continuu).

Pichetajul bazei trebuie realizat cu o precizie deosebită, abaterile de la aliniament admisibile fiind de 1,5 cm pentru o portee de 24 m.

18.2.2.2. **Măsurarea propriu-zisă.** O bază geodezică din triangulația de ordin superior se măsoară de obicei cu 6 fire invar, în sensurile dus-întors, după o schemă de lucru care poate fi urmărită principial în tabelul 18-1. Măsurările dus și respectiv, întors, ale unei secțiuni se execută în aceeași zi, dimineața și, respectiv, după-amiaza.

Pentru fiecare portee și, ca urmare, pentru fiecare secțiune a bazei geodezice, rezultă astfel patru măsurători independente. Poziția unui fir în timpul măsurării este redată schematic în figura 18-6.

Tabelul 18—1

Numărul secțiunii	Numărul firului	
	Dus	Întors
I	1; 2	3; 4
II	5; 6	1; 2
III	3; 4	5; 6

Grupa care execută măsurarea propriu-zisă este compusă din:

— 1 inginer care coordonează lucrările, înregistrează lecturile *a* și *b* (fig. 18-3) efectuate pe cele două riglete (în urmă și respectiv înainte), înregistrează temperatura de măsurare;

— 2 tehnicieni care efectuează lecturile *a* și *b* la cele două riglete;

— 2 muncitori la trepiedele tensoare;

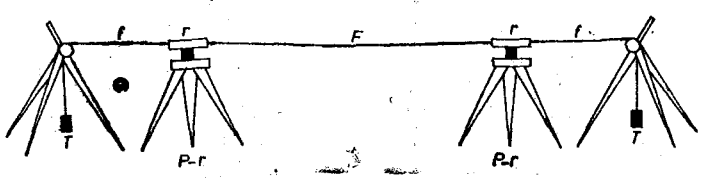


Fig. 18-6. **Firul invar în poziție de lucru (schemă):**
F — firul invar; *r* — riglete; *f* — fire de tensiune; *T* — trepiede tensoare; *P-r* — trepiede port-reper.

— 4 muncitori care susțin cele două fire de invar în lucru, dispuse în ambele părți ale axului bazei;

— 1—2 muncitori pentru operațiile anexe, care pot interveni la măsurare, în funcție de natura bazei măsurate.

Pe riglete se citesc: centimetrul, milimetrul și zecimea de milimetru. Se fac cinci asemenea perechi de citiri *a* și *b*, prin culisarea lină a firului invar, așteptîndu-se de fiecare dată ca acesta să ocupe o poziție stabilă. În cazul în care ecartul maxim al celor cinci diferențe (*b*—*a*) nu depășește 0,2 mm, poate fi considerată încheiată măsurarea porteii.

Urmează aducerea în poziție de lucru a celuilalt fir, la care operațiunile decurg în sistemul descris, după care se trece la măsurarea următoarei portei.

Rezultatele măsurării se înregistrează în formulare (tabelul 18-2).

Tabelul 18-2

Data: 1 august 1961
Început: ora 8^{30}
Terminat: ora 18^{40}
Secțiunea I
Operatori: POPESCU A., RADU P.

Numărul porteii	Dus $t = +25{,}1°$						Întors $t = +22{,}7°$					
	Firul 624			Firul 625			Firul 120			Firul 121		
	a	b	b—a	a	b	b—a	a	b	b—a	a	b	b—a
1—2	14,5	30,6	16,1	8,2	24,0	15,8	12,2	22,4	10,2	16,0	26,0	10,0
	20,2	38,3	16,1	16,2	32,0	15,8	16,4	26,6	10,2	18,5	28,6	10,1
	40,7	56,7	16,0	23,0	38,9	15,9	20,5	30,7	10,2	27,3	37,4	10,1
	50,1	66,3	16,2	35,5	51,4	15,9	35,7	45,8	10,1	32,5	42,6	10,1
	50,9	67,1	16,2	40,6	65,5	15,9	50,6	60,8	10,2	39,0	49,1	10,1
			+16,1			+15,9			+10,2			+10,1

18.2.2.3. **Nivelmentul bazei.** Pentru reducerea la orizont a distanțelor măsurate se execută nivelmentul bazei cu instrumente de nivelment de precizie și mirete speciale (de circa 0,5 m lungime) sau rigle gradate milimetric care să permită determinarea diferențelor de nivel între reperele trepiedelor port-reper cu precizie de cel puțin $\pm$ 0,5 mm.

18.2.3. CORECȚIILE FIRULUI INVAR

18.2.3.1. **Lungimea normală a firului invar.** Prin *lungime normală* a firului invar se înțelege lungimea coardei $l = AB$, cînd diferența de nivel între extremitățile A și B ale firului este zero (fig. 18-7).

Forma de echilibru a unui fir elastic, perfect flexibil, cu greutatea proprie p, supus unei tensiuni axiale P, aplicate în mod egal la extremitățile sale, este *curba lănțișor* a cărei ecuație este:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \qquad (18\text{-}2)$$

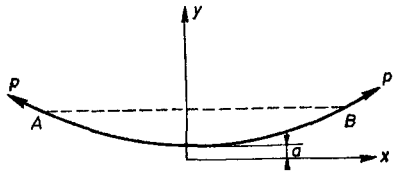


Fig. 18-7. Lungimea normală a firului invar.

Pentru firul invar $a = P/p$, unde $P = 10$ daN și $p = 17{,}32$ g/m, astfel încît se obține expresia lungimii normale a firului invar:

$$l = s_0 + \frac{s_0 P}{\sigma E} - \frac{s_0^3 p^2}{24 P^2}, \qquad (18\text{-}3)$$

unde: $\sigma = 2{,}138$ mm² (suprafața secțiunii firului invar); $E = 16\,000$ N/cm² (modulul de elasticitate al invarului); l — lungimea normală a firului invar (determinată la etalonare); s_0 — lungimea liberă a firului invar. Se poate demonstra că:

$$(s - s_0)/s_0 = P/\sigma E, \qquad (18\text{-}4)$$

astfel încît pentru firele invar aflate în uz curent ($s_0 \approx 24$ m), cele două corecții din (18-3) au următoarele valori:

$$\frac{s_0 P}{\sigma E} = 7{,}016 \text{ mm}, \qquad \frac{s_0^3 p^2}{24 P^2} = 1{,}731 \text{ mm}. \qquad (18\text{-}5)$$

18.2.3.2. **Corecția datorată asimetriei lănțișorului.** Condițiile reale de lucru din teren nu permit aproape niciodată măsurarea unei lungimi în care să nu existe diferențe de nivel între reperele aflate la extremitățile unei portei. Ca urmare, firul invar nu mai ocupă o poziție simetrică în raport de axa y și trebuie ca la formula (18-3) să se aplice o corecție suplimentară q, a cărei expresie este:

$$q = \frac{p^2 h^2 s_0}{24 P^2}. \qquad (18\text{-}6)$$

Neglijarea acestei corecții, chiar în condițiile unor diferențe de nivel destul de mari pentru o portee (2,40 m), introduce erori mici (17μ), adică erori relative de ordinul $1 : 10^6$.

18.2.3.3. **Corecții datorate variației tensiunii în firul invar.** O anumită variație ΔP în tensiunea nominală, existentă la un moment dat în firul invar, în comparație cu tensiunea folosită la etalonare determină o variație corespunzătoare a lungimii firului și,ca urmare, și a lungimii coardei calculată cu formula (18-3).

Dintre cauzele care determină variații ale tensiunii P în firul invar se pot menționa:

— deteriorări ale firelor originale care susțin greutățile la etalonare și înlocuirea lor cu fire care au altă greutate;

— utilizarea unor greutăți deteriorate sau murdare;

— funcționarea incorectă a scripeților trepiedelor tensoare, manifestată prin apariția unor forțe de frecare diferite față de cele existente la etalonare.

Corecția aferentă are expresia:

$$(\Delta l_P)_{mm} = 1{,}04\ \Delta P \text{ daN}. \qquad (18\text{-}7)$$

O altă cauză care provoacă variații în tensiunea P existentă în firul invar o constituie variația gravității în punctul de lucru g_t, în raport cu valoarea sa în punctul de etalonare g_1. Corecția corespondentă utilizează valorile normale γ (v. 2.2.3) în locul valorilor efective g, fiind:

$$(\Delta l_g)_{mm} = 7{,}01 \frac{\Delta\gamma}{\gamma_1}. \qquad (18\text{-}8)$$

18.2.3.4. **Corecții de reducere la orizont.** Datorită existenței unei diferențe de nivel h între reperele A și B de la capetele unei portei, firul invar va ocupa o poziție înclinată l^0_{AB}. Lungimea l'_{AB} redusă la orizont va fi calculată cu:

$$l'_{AB} = l^0_{AB} - \frac{h^2}{2l} - \frac{h^4}{8l^3}. \qquad (18\text{-}9)$$

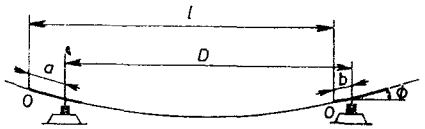


Fig. 18-8. Înclinarea rigletelor în timpul măsurării cu firul invar.

Datorită poziției ocupate de firul invar în timpul lucrului, rigletele capătă o anumită înclinare (fig. 18—8). Corecția corespondentă are un aspect complicat:

$$\Delta lr = -(b-a)\frac{p^2 s_0^2}{8P^2} + (b-a)\frac{p^2 h^2}{4P^2} + (a+b)\frac{p^3 s_0^3 h}{16 P^3}, \qquad (18\text{-}10)$$

fiind însă de menționat că această corecție ia, în mod obișnuit, valori foarte mici, astfel încît ultimii termeni din relația (18-10) sînt, în general, neglijați.

Poziția de lucru, înclinată, a firului invar, determină și apariția unei asimetrii în curba lănțișor, rezultînd corecția q dată de formula (18-6).

18.2.3.5. **Corecția datorată dilatării termice.** Lungimea unui fir invar, și, ca urmare, și lungimea coardei sînt funcții de temperatura t la care se află firul: $l_t = f(t)$, care poate fi determinată cu formula:

$$l_t = l_0[1 + \alpha(t - t_0) + \beta(t - t_0)^2], \qquad (18\text{-}11)$$

unde l_0 este lungimea coardei la temperatura de etalonare t_0, iar α și β — — coeficienții de dilatare termică, indicați de obicei în certificatul de livrare al firului.

18.2.4. CALCULUL LUNGIMII BAZEI

În figura 18-3 s-a exemplificat modalitatea de determinare a lungimii unei portei, l^0_{AB} între reperele A și B, necorectată cu corecțiile expuse mai înainte.

Lungimea unei baze geodezice se calculează pe secțiuni, corespunzător tehnicii de măsurare, rezultînd în general, așa cum s-a menționat, patru măsurători independente pentru fiecare secțiune.

Deoarece fiecare portee se reduce la orizont prin aplicarea corecției (18-9), lungimea S a unei secțiuni, obținută prin simpla însumare a acestor lungimi va rezulta ca fiind redusă la o suprafață de nivel mediu, în raport de altitudinile reperelor situate la capetele secțiunii. Prin urmare, *lungimea unei secțiuni* S^j_i formată din k portei, redusă la orizont, se va calcula cu următoarea formulă:

$$S^j_i = k l^j_0 + \sum_{i=1}^{k}(b-a)^j_i + l^j_0\alpha\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_0)^j_i + l^j_0\beta\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_0)^{j\,2}_i - \frac{1}{2l_0}\sum_{i=1}^{k}h^{j\,2}_i - \frac{1}{8l_0^3}\sum_{i=1}^{k}h^{j\,4}_i + 7{,}01k\frac{\Delta\gamma}{\gamma_1} + \sum_{i=1}^{k}q^j_i + \sum_{i=1}^{k}r^j_i. \qquad (18\text{-}12)$$

$$j = 1,2,3,4$$

Media aritmetică a celor patru valori calculate cu relația (18-12):

$$S_i = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{41} S_i^j, \qquad (18\text{-}13)$$

va reprezenta lungimea cea mai probabilă a secțiunii S_i. Lungimea bazei (constituită din f secțiuni), redusă la orizont, la cota medie a capetelor sale, se va calcula cu:

$$B = S_1 + S_2 + \ldots + S_f. \qquad (18\text{-}14)$$

Notînd cu v diferențele dintre măsurătorile individuale și mediile corespondente pe fiecare secțiune: $v_i^j = S_i^j - S_i$; $(i = 1, 2 \ldots f)$, eroarea medie de măsurare a bazei s_B' se va determina cu:

$$s_B' = \pm\sqrt{\frac{[vv]_1}{n_1(n_1-1)} + \ldots + \frac{[vv]}{n_f(n_f-1)}}. \qquad (18\text{-}15)$$

În formula (18—15) cu $n_1, n_2, \ldots n_f$ s-a notat numărul de măsurări independente efectuat pentru fiecare secțiune (de obicei $n_1 = n_2 = \ldots = n_f = 4$). O bază geodezică este caracterizată curent prin eroarea sa relativă $s_B'/B \leqslant 1/10^6$.

18.2.5. DESPRE ETALONAREA FIRELOR INVAR

Se cunosc două categorii de metode de etalonare a firelor invar: *metode de laborator* și *metode de teren*.

Laboratoarele în care se execută etalonarea firelor invar sînt utilate cu aparatură de înaltă precizie, care permit determinări cu erori minime, în special din punctul de vedere al păstrării unității de lungime pentru o anumită țară sau pentru un grup de țări. Etalonarea de laborator se poate face utilizînd procedeul mecanic sau procedeul optic (folosirea fenomenului de interferență a luminii).

Descrierea amănunțită a unei asemenea aparaturi depășește cadrul lucrării de față. Etalonările de laborator (prin care se determină l_0, α și β) se efectuează în condiții optime de temperatură și umiditate, reglabile după dorință. Aceasta ridică precizia determinărilor, îndepărtîndu-le însă de condițiile reale din teren și de precizia care se poate realiza în aceste condiții.

Din acest motiv, precum și în scopul micșorării costului lucrărilor de etalonare, în fiecare țară sînt folosite și metode de etalonare în teren, în raport cu o bază de control. Lungimea bazei de control b se determină prin măsurări multiple, cu mai multe fire invar (etalonate în laborator), astfel încît este asigurată într-o mare măsură condiția păstrării unității de lungime pentru întregul teritoriu al țării și posibilitatea de racordare cu țările vecine din acest punct de vedere.

Etalonarea firului invar pe baza de control trebuie făcută înainte și după măsurarea lungimii bazei geodezice.

Cu acest prilej se calculează un coeficient de etalonare $\nu = b/b'$, unde b este lungimea cunoscută a bazei-etalon, iar b' — lungimea bazei-etalon determinată cu firul invar supus etalonării. Cu acest coeficient trebuie multiplicate lungimile determinate cu firul respectiv în alte lucrări.

La noi în țară baza etalon a fost realizată de către *Direcția topografică militară*, fiind în lungime de aproximativ 10 km. Baza se află amplasată în județul *Prahova*, între orașul *Mizil* și comuna *Loloiasca*. Fiind măsurată

Tabelul 18-3

Denumirea aparatului	Firma producătoare	Sursa de unde purtătoare: Frecvența purtătoare [MHz]	Sursa de lumină	Frecvența de modulație [MHz]	Modulatorul	Diametrul antenei [cm]	Procedeul de măsurare a fazei	Domeniul de măsurare [km]	Masa [kg]	Dimensiuni [cm]	Eroarea medie
Electrotape DM 20	*Cubic Corp., SUA*	*Klystron* 10,0...10,5	7,5	33	analogic	0,05...50	11,5	38×36×29	±(10 mm +3·10⁻⁶D)
MRA 5	*Tellurometer Anglia*	Oscilator *Gunn* 10...10,5	75		digital	0,1 ...50	12/6	31×35×16 31×35×30	±(10 mm +3·10⁻⁶D)
CA 1000	*Tellurometer Anglia*	Oscilator *Gunn* 10,1...10,45	25		analogic digital	0,05...30	1,6	31×15× 8	±(15 mm +5·10⁻⁶D)
Luż	*URSS*	Klystron 8,6...8,9	10	38	analogic	0,2 ...40	14/9,5	40×40×20 28×24×20	±(30 mm +3·10⁻⁶D)
Distomat DI 50	*Wild Elveția*	Klystron 10,2...10,5	15	36	digital	0,1 ...50	8/14,8	44×25×20 47×24×24	±(20 mm +5·10⁻⁶D)

Tabelul 18-4

Denumirea aparatului	Firma producătoare	Sursa de lumină	Frecvența de modulație [MHz]	Modulatorul	Procedeul de măsurare a fazei	Domeniul de măsurare: Ziua [km]	Noaptea [km]	Masa [kg]	Dimensiuni [cm]	Eroarea medie
Geodimeter 600	*AGA Suedia*	Laser He-Ne 1 — mW	30	Celulă *Kerr*	analogic	40	40	15	22×36×53	±(10 mm +1·10⁻⁶D)
Range-master II	*Laser Systems SUA*	Laser He-Ne 10 — mW	15	Cristal *KDP*	digital	60	60	18	29×29×66	±(5 mm +1·10⁻⁶D)
Quarz	*URSS*	Laser He-Ne 1 — mW	30	Celulă *Kerr*	analogic	30	50	25	45×34×28	±(10 mm +2·10⁻⁶D)
Geodolite 3 G	*Spectra Physics SUA*	Laser He-Ne 10 — mW	49		digital	60	80	48	86×51×40	±(1·20⁻⁶D)
EOK 2000	*Carl Zeiss Jena RDG*	Diodă Ga-As	30		analogic	2,5	2,5	12	30×35×29	±1 cm
Mekometer ME 3000	*Kern Elveția*	Lampă cu xenon	500	Cristal *KDP*	digital	3	3	18,7	46×16×22	±(0,2 mm+1...2·10⁻⁶D)

cu fire invar, cu precizie deosebit de ridicată, baza servește la etalonarea tuturor aparatelor electronice de măsurare a distanțelor existente în dotarea instituțiilor din țara noastră.

Este de remarcat faptul că această bază-etalon a fost segmentată în mai multe secțiuni (delimitate prin pilaștri de beton armat), ceea ce permite verificarea diversă a aparaturii ce se etalonează, prin măsurarea unor lungimi diferite.

18.3. MĂSURAREA LUNGIMILOR CU APARATE ELECTRONICE

În ultimele decenii măsurarea distanțelor geodezice se realizează, aproape în exclusivitate, prin utilizarea aparaturii electronice. Dezvoltarea care a fost înregistrată în acest domeniu a condus la modificări de structură în concepția de realizare a rețelelor geodezice, la mărirea preciziei de determinare a poziției punctelor geodezice, precum și la mărirea randamentului lucrărilor în general.

Multitudinea aspectelor teoretice și practice pe care le implică cunoașterea principiilor de funcționare și de utilizare pentru scopuri geodezice a aparaturii electronice de măsurat distanțe constituie obiectul unui curs de profil de sine stătător în cadrul planului de învățămînt al secției de geodezie: *măsurători geodezice prin unde* (*Atudorei* 1981, *Deumlich* 1979, *Zetsche* 1979 ș.a.).

Pentru a oferi cititorului o imagine completă asupra modalității de măsurare a lungimilor în rețelele geodezice, în tabelele 18-3 și 18-4 se prezintă o selecție a aparaturii electronice utilizată în prezent, avînd drept criteriu de clasificare *mijlocul purtător al informației de măsurare*:

— aparate cu microunde (tabelul 18-3);
— aparate electrooptice (tabelul 18-4).

Selecția s-a oprit în mod special asupra aparatelor de măsurat distanțe folosite în rețelele geodezice de stat. În tabelul 18-4 sînt prezentate totuși și unele aparate care se folosesc în rețelele geodezice din localități sau cu destinație specială: rețele geodezice pentru urmărirea comportării construcțiilor hidroenergetice, rețele geodezice în poligoane geodinamice pentru urmărirea deplasărilor recente ale scoarței terestre ș.a. Informațiile furnizate în cele două tabele vor fi utile la prelucrarea rețelelor geodezice, în care intervin și laturi măsurate (v. 24.2.).

Capitolul 19
APARATE ȘI METODE PENTRU MĂSURĂTORI GRAVIMETRICE

19.1. OBIECTUL DETERMINĂRILOR GRAVIMETRICE

Mărimile care formează obiectul determinărilor gravimetrice sînt:

— accelerația gravității g;
— variații ale accelerației gravității Δg;
— derivate de ord. 2 ale geopotențialului $W_{yy} - W_{xx}$, W_{xy}, W_{yz}, W_{xz}.

Așa cum s-a menționat în capitolele 2 și 3, accelerația gravității prezintă variații locale și temporale, care depind de o multitudine de factori, dintre care cei mai importanți sînt următorii:

● *Forma Pămîntului*. Considerîndu-se valorile normale ale accelerației gravității, calculate cu formula (2-84):

$$\gamma_{0^\circ} = 978\,032{,}7 \text{ mgal}; \qquad \gamma_{90^\circ} = 983\,218{,}66 \text{ mgal}, \tag{19-1}$$

se înregistrează o variație între ecuator și pol de +5 185,96 mgal.

● *Distribuția și densitatea maselor în interiorul Pămîntului*. Variațiile de gravitate generate de acești factori se pot constata prin măsurători gravimetrice efectuate pe apă și apoi, în apropiere, pe uscat, respectiv pe o vale și pe dealul apropiat etc. Diferențele dintre valorile măsurate și reduse la suprafața geoidului, notate g (v. cap. 3) și valorile normale γ ale accelerației gravității nu sînt constante, diferențele maxime $g-\gamma$ putînd atinge valori de ordinul ± 200 mgal.

● *Influențele diverse exercitate de corpurile cerești*. Variațiile temporale, înregistrate în puncte staționare, datorate în mod deosebit *Lunii* și *Soarelui*, sînt mai mici de $\pm 0{,}3$ mgal.

● *Gradientul vertical al gravității*. Variația gravității în funcție de cota H este de aproximativ 0,3 mgal/m [v. relația (2-97)].

● *Modificări în potențialul gravității*. Acestea sînt datorate circuitului apei în atmosferă, mișcărilor maselor în interiorul Pămîntului, deplasărilor polului mecanic ș.a., influența lor ajungînd pentru un punct dat, la mărimi de ordinul a $\pm 0{,}01$ mgal pentru un deceniu.

După cum se vede, variațiile gravității sînt caracterizate prin ordine de mărime cu totul diferite și, ca atare, aparatele și metodele de măsurare trebuie să asigure o precizie corespunzătoare acestor variații, în funcție de scopul urmărit.

În prezent determinările gravimetrice au atins parametri foarte înalți de precizie:

— *măsurătorile în puncte staționare*, în condiții deosebite de lucru în laborator, destinate etalonărilor sau determinărilor mareelor terestre au precizia cuprinsă între $\pm 0{,}001$ mgal și $\pm 0{,}005$ mgal;

— *măsurătorile de teren* sînt caracterizate, în general, de erori cuprinse între $\pm 0{,}01$ mgal și $\pm 0{,}05$ mgal. În unele publicații se comunică și pentru astfel de lucrări obținerea unei precizii foarte înalte, de circa $\pm 0{,}003$ mgal, realizată cu aparate perfecționate.

Determinările accelerației gravității în puncte staționare (puncte de bază), efectuate independent, se numesc *determinări absolute*, iar determinările de variații ale accelerației gravității, în raport de un punct de bază se numesc *determinări relative*. Măsurătorile de gravitate se bazează în prezent, pe utilizarea fenomenelor de oscilație, de cădere liberă a corpurilor și de modificare a echilibrului unui sistem deformabil, existînd următoarea clasificare uzuală:

Metoda dinamică, în care măsurarea gravității se realizează prin urmărirea în timp a unor corpuri în mișcare. Aparatul clasic pentru acest grup de metode este *pendulul*. După măsurarea perioadei de oscilație și a altor parametri necesari, se calculează valoarea gravității în punctul de observație.

În ultimele două decenii au fost perfecționate și metode de determinări absolute ale accelerației gravității, bazate pe legea mișcării rectilinii uniform accelerate în căderea liberă a corpurilor.

Metoda statică, folosită la evaluarea variației gravității din punct în punct sau în timp, pentru un același punct, constă din examinarea stării de echilibru a unui sistem deformabil, asupra căruia acționează simultan gravitatea (ca forță independentă sau într-un cuplu de forțe) și un factor antagonist de natură elastică (forță sau cuplu de forțe). Instrumentul tipic pentru această metodă este *gravimetrul static*.

Determinarea unor derivate de ord. 2 ale potențialului se bazează, în principiu, pe utilizarea unei metode statice, care constă din urmărirea stării de echilibru a unei pîrghii suspendată de un fir de torsiune. Acțiunea este reprezentată de un cuplu gravitațional (în care intervin derivatele de ord. 2 ale potențialului), iar reacțiunea de cuplul de torsiune al firului de suspensie. Presupunînd constant coeficientul de torsiune al firului, sau cunoscînd legea sa de variație, modificarea stării de echilibru dintr-un punct în altul este datorată, în primul rînd, variațiilor derivatelor de ord. 2 ale potențialului. Acestea au dimensiunile unui gradient, de exemplu:

$$W_{xx} = \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = \text{gradient orizontal, în direcția } x, \text{ al gravității.}$$

Gradientul vertical al gravității W_{zz} nu este măsurabil, putînd fi determinat doar indirect. Unitatea de măsură pentru aceste derivate de ord. 2 este reprezentată de variația de 0,1 mgal pe distanța de 1 km:

$$\frac{0{,}1 \text{ mgal}}{1 \text{ km}} = 0{,}1 \frac{10^{-3} \text{ cm s}^{-2}}{10^{5} \text{ cm}} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2} = 1\text{E}, \qquad (19\text{-}2)$$

fiind numită *E ö t v ö s*, în onoarea savantului maghiar care a realizat aparatul pentru măsurarea acestei mărimi, numit *balanță de torsiune*.

19.2. DETERMINĂRI ABSOLUTE ALE ACCELERAȚIEI GRAVITĂȚII

19.2.1. DETERMINĂRI ABSOLUTE BAZATE PE MĂSURAREA PERIOADEI DE OSCILAȚIE

19.2.1.1. **Pendulul matematic.** *Pendulul matematic* este reprezentat de un punct material suspendat într-un punct fix (prin intermediul unui fir inextensibil, de masă neglijabilă) care execută o mișcare de oscilație în planul vertical al punctului de suspensie, exclusiv sub influența gravității (figura 19-1).

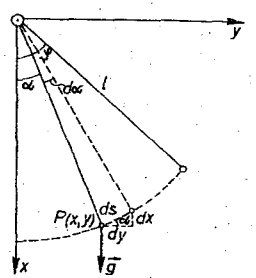


Fig. 19-1. Pendulul matematic.

Conținutul acestui capitol fiind relativ independent, în raport cu celelalte capitole, se vor folosi notații care în restul manualului au o altă semnificație, deoarece noțiunile respective nu sînt utilizate simultan. Astfel, se vor folosi ca notații principale:

m — masa pendulului;

φ — amplitudinea, respectiv unghiul care caracterizează poziția extremă a pendulului;

α — elongația, respectiv unghiul care caracterizează poziția curentă, la un moment dat a pendulului;

T — perioada completă a oscilației, respectiv timpul necesar pendulului pentru a trece dintr-o poziție extremă ($-\varphi$) în cealaltă ($+\varphi$) și înapoi;

l — lungimea pendulului.

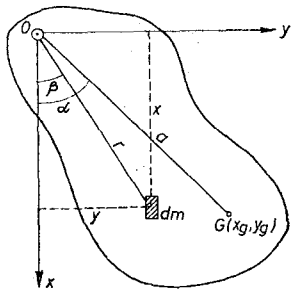


Fig. 19-2. Pendulul fizic.

Se poate demonstra (*Jordan* ș.a. 1967, *Ghițău* 1974 ș.a.) că perioada T a pendulului matematic poate fi exprimată în cadrul amplitudinilor φ mici, cu formula:

$$T = T_0\left(1 + \frac{\varphi^2}{16} + \frac{9}{1\,024}\varphi^4 + \frac{25}{16\,384}\varphi^6 + \ldots\right), \qquad (19\text{-}3)$$

unde φ trebuie exprimat în radiani, iar T_0 — perioada completă pentru amplitudini infinit mici ($\varphi \to 0$):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (19\text{-}4)$$

19.2.1.2. **Pendulul fizic.** Pendulul matematic este imposibil de realizat practic, avînd în definiția sa ipoteze simplificatoare, care nu au echivalent în realitate.

Pendulul fizic este reprezentat de un corp material, nedeformabil, care oscilează în vid, în jurul unei axe fixe, orizontale, sub influența gravității. Condiția de oscilație a pendulului fizic este ca axa de suspensie să nu treacă prin centrul de greutate G (x_G, y_G) al corpului, ci să fie situată deasupra lui (fig. 19-2).

Se notează cu L_r *lungimea redusă* a pendulului fizic:

$$L_r = \frac{a^2 + k^2}{a}, \qquad (19\text{-}5)$$

unde k este o valoare medie pentru distanța r dintre un punct curent al elementului de masă dM și centrul de greutate G. Păstrînd și ipoteza amplitudinilor mici, se poate demonstra că perioada pendulului fizic se exprimă analog cu (19-4):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + k^2}{ag}}. \qquad (19\text{-}6)$$

Determinarea constantelor a și k este dificilă și puțin precisă, astfel încît expresiile de calcul al accelerației gravității care le conțin nu asigură precizia necesară.

Perioada T_0 se poate determina cu mai multă exactitate, astfel încît în ipoteza cunoașterii lungimii reduse L_r, prima relație din (19-6) oferă *posibilitatea principială* pentru determinarea accelerației gravității:

$$g = \frac{4\pi^2 L_r}{T_0^2}. \qquad (19\text{-}7)$$

Dificultățile de ordin practic rezidă, în special, în determinarea cu o precizie convenabilă (v.19.2.1.5.) a lungimii reduse. Pentru rezolvarea

acestei probleme se presupune că *în același punct* se efectuează simultan și în condiții identice determinări gravimetrice cu un pendul cu lungimea redusă L_r' cunoscută. Măsurînd, cu precizia necesară (v.19.2.1.4.), cele două perioade T_0 și T_0' se poate calcula, în ipoteza g = constant, lungimea redusă a primului pendul:

$$L_r = \frac{T_0^2}{T_0'^2} L_r'. \tag{19-8}$$

19.2.1.3. **Pendulul reversibil.** *Pendulul reversibil* este un pendul care are două axe paralele de suspensie, respectiv de oscilație, care sînt interșanjabile.

Perioada T a pendulului reversibil se determină cu relația:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 2\pi \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}}, \tag{19-9}$$

fiind dedusă în următoarele ipoteze, realizabile constructiv:

— perioadele T_1 și T_2 corespondente celor două poziții de oscilație, sînt mici, astfel încît $(T_1 - T_2) \approx 0$;

— centrele de oscilație sînt dispuse asimetric în raport de centrul de greutate, astfel încît diferența dintre distanțele corespondente a_1 și a_2 este mare.

După măsurarea perioadelor T_1 și T_2, accelerația gravității g se poate calcula, cu relația anterioară, dacă se cunoaște distanța $(a_1 + a_2)$. Această distanță se poate determina mult mai exact decît distanțele individuale a_1 și a_2, în raport de centrul de greutate, a cărui poziție este mult mai greu de stabilit.

19.2.1.4. **Despre determinarea perioadei de oscilație.** Cu pendulele gravimetrice se determină accelerația gravității g cu precizia de aproximativ $\pm 0{,}1$ mgal. Realizarea acestei precizii este posibilă atunci cînd elementele componente care intervin în relația de determinare (19-7)sînt cunoscute cu o precizie corespunzătoare. Pentru a stabili ordinul de mărime a erorilor admisibile în cunoașterea lungimii reduse și respectiv a perioadei pendulului, se *consideră* relația (19-7) ca funcție de mărimi independente și se obține:

$$s_g'^2 = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 s_{L_r}'^2 + \left(\frac{8\pi^2 L^2}{T^3}\right)^2 \cdot s_T'^2,$$

adică:

$$\frac{s_g'}{g} = \sqrt{\left(\frac{s_{L_r}'^2}{L_r}\right)^2 + 4\left(\frac{s_T'}{T}\right)^2}. \tag{19-10}$$

Presupunînd lungimea redusă a pendulului $L_r \approx 1$ m, perioada de oscilație $T \approx 1$ s și acceptînd eroarea relativă $s_g'/g = \pm 10^{-7}$, rezultă, pe baza influențelor egale:

$$s_{L_r}'/L_r \approx \pm 0{,}7 \cdot 10^{-7}; \qquad s_T'/T \approx \pm 0{,}35 \cdot 10^{-7}. \tag{19-11}$$

Rezultă că precizia de determinare a elementelor necesare trebuie să fie:

— lungimea redusă $s_{L_r}' = \pm 0{,}07\ \mu$;

— perioada de oscilație $s_T' = \pm 0{,}35 \cdot 10^{-7}$s, (19-12)

pentru ca gravitatea g să fie determinată cu precizia de $\pm 0{,}1$ mgal.

Perioada de oscilație se determină în prezent prin *metoda înregistrărilor continue*. Fără a descrie detaliile tehnice de realizare concretă a aparatelor folosite se prezintă sumar doar principiul de funcționare. Fiecare trecere la verticală a pendulului poate fi înregistrată pe o hîrtie fotosensibilă, concomitent cu înregistrări ale semnalelor orare emise de posturi de radio specializate. Există diferite procedee tehnice de împărțire a intervalului de timp dintre două semnale orare într-un număr de 25, 50 sau 100 de diviziuni, care sînt de asemeni imprimate pe hîrtia sensibilă, ceea ce creează posibilitatea determinării foarte precise a diferenței de timp dintre trecerile pendulului la verticală și înregistrările date de semnalele orare.

Semnalele orare sînt transmise în prezent cu o precizie deosebită (erori relative de ordinul 10^{-10} sau mai mici) astfel încît după 2—3 ore de observații se poate conta pe o determinare a accelerației gravității cu precizia de $\pm 0{,}1$ mgal.

19.2.1.5. **Determinarea perioadei reduse.** Perioada dedusă nemijlocit din observații se numește *perioadă observată*. Datorită condițiilor concrete de determinare, această perioadă trebuie corectată, ținîndu-se seamă de influențele tuturor factorilor perturbatori. După aplicarea corecțiilor (numite curent *reduceri*) corespondente se obține *perioada redusă*, care se folosește în calculul accelerației gravității g.

Deoarece studiul amănunțit, cu demonstrații riguroase, al acestor corecții ar presupune o atenție și un spațiu care depășesc destinația manualului, în continuare se vor prezenta semnificațiile acestora, formulele de evaluare sau metodele de lucru utilizate pentru micșorarea influenței erorilor corespondente.

● *Reducerea datorită variației lungimii reduse*. Pendulul real este suspendat printr-un „cuțit" (fig. 19-3, *a*), care în exploatare capătă forma unei suprafețe cilindrice, ce se rostogolește pe un plan (fig. 19-3, *b*). Datorită uzurii, treptat, suprafața pe care se sprijină cuțitul capătă forma unui „uluc" în care intră „cilindrul" menționat. Corecția aferentă este:

$$c_L = -\,T\,\frac{\Delta L_r}{2L_r}, \tag{19-13}$$

unde ΔL_r, urmează să se determine foarte exact, prin măsurători la un comparator.

● *Reducerea la amplitudini infinit mici* (v. relația 19-3):

$$c_\varphi = -\,\frac{\varphi^2}{16}\,T. \tag{19-14}$$

● *Reducerea la suport rigid*. Antrenarea suportului în timpul oscilațiilor produce un efect echivalent cu o mărire a lungimii reduse a pendulului. Acest lucru poate fi demonstrat riguros sau înțeles intuitiv urmărind figu-

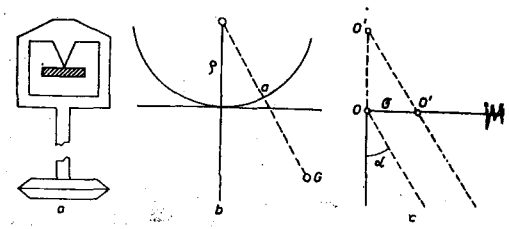


Fig. 19-3. Cilindritatea cuțitului pendulului și antrenarea suportului pe timpul oscilațiilor.

ra 19-3, *c*. În cazul în care prin trecerea de la o elongație zero la elongația α, axa de suspensie se deplasează din O în O' (cu cantitatea σ), pendulul pare a fi efectuat o oscilație cu o lungime redusă mărită. Se poate aplica o corecție corespondentă, însă efectul antrenării suportului este anihilat aproape complet prin utilizarea unor aparate bipendulare sau tetrapendulare, toate pendulele respective avînd aceeași configurație, masă și amplitudine. Pendulele sînt dispuse diametral opus, două cîte două, pe un același suport, fiind lansate să oscileze în același timp însă în sensuri opuse (au o diferență de fază de 180°).

● *Reducerea de temperatură*. Temperatura efectivă de lucru t conduce la modificarea lungimii reduse L_r în raport cu cea determinată la temperatura de etalonare, cu o cantitate δL_r, care poate fi determinată cu o relație similară cu (18-11). În consecință se determină o reducere de forma (19-13).

● *Reducerea de vid*. Chiar în situația în care oscilațiile au loc în recipiente în care s-a realizat vid înaintat, există următoarele influențe, mai mult sau mai puțin pronunțate:

— *efectul static* al masei aerului dislocuit de pendul, ceea ce conduce la mărirea lungimii reduse;

— *efectul dinamic*, determinat de antrenarea aerului din recipient în timpul oscilației.

Reducerea de vid are aspectul:

$$c_v = -k\,d, \tag{19-15}$$

unde k este o constantă determinată experimental, iar d — densitatea aerului existent în recipientul în care este instalat pendulul.

● *Alte corecții*. La determinările absolute ale accelerației gravității, unde se cere o precizie deosebit de ridicată, se mai au în vedere și alte corecții, *mai importante* fiind:

— corecțiile datorate deformării în timp a pendulului (alungiri, încovoieri, deformații interioare în funcție de material);

— corecțiile datorită cîmpului magnetic terestru.

Observație. Măsurătorile gravimetrice cu aparate pendulare sînt caracteristice, în primul rînd, pentru determinări de laborator, pe perioade îndelungate de timp și doar într-o mică măsură pentru determinări în teren. Măsurătorile absolute ale accelerației gravității au fost făcute în punctele fundamentale naționale și internaționale, despre care s-a tratat în 8.1.4.

19.2.2. DETERMINĂRI ABSOLUTE BAZATE PE CĂDEREA LIBERĂ, RESPECTIV PE LANSAREA VERTICALĂ, ÎN VID A CORPURILOR

Deși accelerația gravității este legată nemijlocit de căderea liberă a corpurilor, determinări cu precizie ridicată prin utilizarea acestui fenomen s-au realizat relativ recent, după ce s-au înregistrat progresele necesare în tehnica de măsurare a intervalelor de timp foarte mici.

19.2.2.1. **Căderea liberă în vid.** Deoarece punctul inițial, de unde începe căderea liberă, nu poate fi determinat suficient de precis, atît ca poziție, cît și ca reper în timp, fenomenul este urmărit pentru minimum trei poziții

x_1, x_2, x_3, unde se determină cu mare exactitate timpii t_1, t_2, t_3 (fig. 19-4, *a*).

Nivelul x_1 nu trebuie să se afle în imediata apropiere a poziției inițiale, deoarece pentru viteze mici rezultatele nu sînt concludente.

Este cunoscută ecuația mișcării în cădere liberă în vid:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}. \tag{19-16}$$

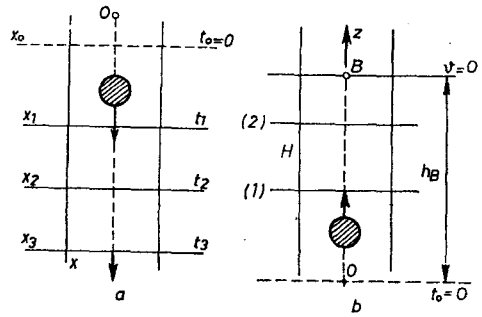


Fig. 19-4. Căderea liberă și lansarea pe verticală, în vid, a corpurilor.

Deoarece în ecuație intervin trei necunoscute x_0, v_0, g, pentru o rezolvare matematică sînt necesare trei determinări. Din acestea rezultă:

$$x_2 - x_1 = v_0 (t_2 - t_1) + \frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2);$$

$$x_3 - x_2 = v_0 (t_3 - t_2) + \frac{g}{2}(t_3^2 - t_2^2),$$

iar după eliminarea necunoscutei v_0, se obține valoarea accelerației gravității în funcție de elementele cunoscute:

$$g = \frac{2[(x_3 - x_2)(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)(t_3 - t_2)]}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}. \tag{19-20}$$

Deoarece în expresia de calcul intervin numai *diferențe* de timp și spațiu, erorile de determinare sînt micșorate. În practică se efectuează un număr n de determinări, prelucrarea rezultatelor realizîndu-se prin metoda celor mai mici pătrate.

Procedeul de determinare efectiv este realizat în vid înaintat, pe înălțimi de numai cîțiva metri, cînd măsurătorile au loc în laborator. În ultimii ani au fost construite aparate, care funcționează pe principiul enunțat, utilizate în determinări de teren și, ca urmare, au înălțimi de ordinul unui metru. Precizia anunțată este extrem de ridicată $s'_g = \pm\ 0{,}001$ mgal (*Groten* 1980). Se înregistrează fie trecerile în dreptul nivelelor stabilite, fie se filmează întreaga cădere, cu o cameră care asigură precizia necesară de determinare. Pentru a examina această precizie se consideră cazul tipic al căderii libere în vid a corpurilor, cînd condițiile inițiale sînt altele și anume: la $t_0 = 0$ se înregistrează $v_0 = 0$, $x_0 = 0$, adică măsurarea timpului începe din momentul căderii libere. Sub aceste condiții rezultă din (19-16):

$$g = \frac{2x}{t^2}. \tag{19-21}$$

Procedînd analog ca în 19.2.1.4., se obține:

$$\frac{s'_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{s'_x}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{s'_t}{t}\right)^2}, \tag{19-22}$$

astfel încît în ipoteza influenţelor egale şi a unei erori relative $s'_g/g = \pm 0{,}35 \cdot 10^{-9}$ rezultă:

$$\frac{s'_x}{x} = \pm 0{,}7 \cdot 10^{-9}; \quad \frac{s'_t}{t} = \pm 0{,}35 \cdot 10^{-9}. \tag{19-23}$$

Presupunînd, analog ca şi pînă acum, $t \approx 1$ s şi $x \approx 1$ m, rezultă precizia necesară în acest gen de determinări:

$$s'_x = \pm 0{,}0007 \ \mu; \quad s'_t = \pm 0{,}35 \cdot 10^{-9}\text{s}. \tag{19-24}$$

19.2.2.2. **Lansarea pe verticală în vid.** Determinările absolute bazate pe lansarea în vid a unei mase m (fig. 19-4, *b*) pot fi efectuate prin determinarea următoarelor elemente:

H — distanţa între două nivele de observare (*1*) şi (*2*);

Δt_1 — intervalul de timp între trecerea prin dreptul nivelului (*1*) de observare, la lansare şi apoi la coborîre;

Δt_2 — definiţie analoagă cu Δt_1, pentru nivelul (*2*) de observare, prin utilizarea formulei (*Jordan* 1967, *Ghiţău* 1974 ş.a.):

$$g = \frac{8\,H}{(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2}. \tag{19-25}$$

Determinările absolute prin cele două metode examinate mai sus se corectează, asemănător ca în cazul determinărilor cu pendulul:

— *reduceri datorită viscozităţii, frecării şi antrenării aerului* care se manifestă mult mai pregnant la metodele examinate aici decît în fenomenele oscilatorii. Aceste efecte sînt mai mari în căderea liberă şi mai mici în cazul lansării pe verticală, unde, datorită simetriei fenomenelor de ascensiune şi de coborîre, erorile pozitive şi negative se echilibrează reciproc într-o mare măsură;

— *reduceri datorită influenţelor seismice*, care se determină cu greutate şi insuficientă precizie;

— *reduceri datorită gradientului vertical al acceleraţiei gravităţii*, de aproximativ 0,3 mgal/m.

19.3. DETERMINĂRI RELATIVE ALE ACCELERAŢIEI GRAVITĂŢII

Variaţiile acceleraţiei gravităţii sînt determinate cu ajutorul pendulelor şi gravimetrelor.

19.3.1. DETERMINĂRI RELATIVE CU APARATE PENDULARE

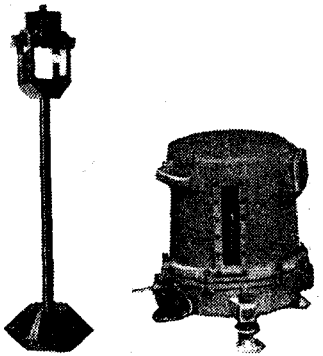
În punctele P_1 (iniţial), unde acceleraţia gravităţii g_1 este cunoscută şi în punctul P_2, unde urmează să se determine g_2 se măsoară perioadele T_1 şi T_2 cu un pendul. Relaţia (19-6) pentru aceste două situaţii fiind:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g_1}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g_2}},$$

se obţine mărimea căutată:

$$g_2 = g_1 \frac{T_1^2}{T_2^2}. \tag{19-26}$$

În relaţia (19-26) nu intervine lungimea redusă L_r, ceea ce determină simplificări remarcabile în comparaţie cu măsurătorile absolute. Astfel, nu mai sînt necesare reducerile datorate variaţiei lungimii pendulului, precum şi a altor deformaţii ş.a., Influenţa antrenării stativului este practic eliminată deoarece aparatele folosite în determinările relative sînt construite întotdeauna cu perechi de pendule antifazice. Forma pendulelor este cea prezentată în figura 19-5, *a*. Dotarea completă necesară în teren se prezintă în figura 19-5, *b*, pentru un aparat tetrapendular de tip Askania, folosit şi în ţara noastră.



a *b*

Fig. 19-5. Aparat tetrapendular *Askania* pentru determinări relative.

Materialele din care sînt confecţionate pendulele (invar sau cuarţ) au un coeficient de dilatare mic, astfel încît în exploatare se asigură o deosebită constanţă în timp a parametrilor funcţionali ai pendulelor în comparaţie cu gravimetrele. Totuşi, pendulele se întrebuinţează extrem de puţin în comparaţie cu gravimetrele (după *A. Graf* doar în proporţie de 1%) pentru asemenea scopuri. Această situaţie este condiţionată în principal de următorii factori:

— precizia de determinare mult mai ridicată a gravimetrelor (cu un ordin de mărime);

— timpul necesar unei determinări cu gravimetrul este de circa 3—4 minute, sau mai mic. O determinare completă cu pendulul, într-un punct, nu poate fi efectuată în mai puţin de 8 ore, la care mai trebuie adăugate determinările unor parametri auxiliari, exploatarea înregistrărilor ş.a., ceea ce face ca şi operatori experimentaţi să nu poată efectua săptămînal decît 2—3 determinări complete.

19.3.2. PRINCIPIILE DE CONSTRUCŢIE A GRAVIMETRELOR

Gravimetrele moderne sînt *gravimetre mecanice*, al căror sistem de funcţionare se bazează pe posibilitatea de constatare a unor modificări în starea de echilibru a unui sistem deformabil (resorturi, sisteme de resorturi sau sisteme de torsiune), în funcţie de variaţiile acceleraţiei gravităţii.

Variaţia deformării sistemului elastic (deci implicit variaţia acceleraţiei gravităţii) este pusă în evidenţă de un sistem indicator. Exigenţele de determinare cu un gravimetru sînt reflectate de erori de măsurare de ordinul a $\pm 0{,}01$ mgal sau şi mai mici (erori relative mai mici de $1 \cdot 10^{-8}$). Această precizie de măsurare deosebită este însoţită de alte calităţi remarcabile: construcţie robustă, greutate mică, uşurinţă de manipulare chiar în puncte greu accesibile şi în condiţii dificile de exploatare.

Una dintre *clasificările uzuale* ale gravimetrelor este următoarea:

— *gravimetre neastatizate*, care conţin sisteme deformabile a căror variaţie de la poziţia de echilibru este direct proporţională cu variaţia gravităţii;

— *gravimetre astatizate*, care sînt astfel realizate încît să conţină un element suplimentar (denumit *labilizator*) care intervine la modificarea stării de echilibru, adăugînd acţiunea sa la acţiunea gravităţii.

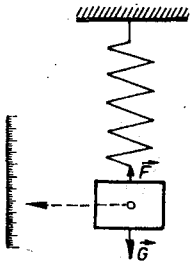


Fig. 19-6. Sistem neastatizat.

19.3.2.1. **Sisteme neastatizate.** Cel mai simplu sistem neastatizat (fig. 19-6) este reprezentat de o masă suspendată de un resort, caracterizat prin constanța sa de elasticitate S. Masa activă a sistemului deformabil, formată din masa suspendată și dintr-o parte din masa resortului va fi notată cu m.

Într-un punct în care accelerația gravității este g vor acționa, în sistemul prezentat, următoarele forțe:

— acțiunea, reprezentată de greutatea sistemului: $G = mg$;

— reacțiunea, reprezentată de forța elastică a resortului, proporțională cu deformarea sa x : $F = Sx$.

Condiția de echilibru, într-un punct dat, va fi prin urmare:

$$mg = Sx. \tag{19-27}$$

Deformarea x trebuie înțeleasă ca o diferență între lungimea resortului l după ce se atîrnă masa m și lungimea l_0 înainte de această operațiune:

$$x = l - l_0. \tag{19-28}$$

Deoarece m și S sînt valori constante se obține:

$$m\Delta g = S\Delta x. \tag{19-29}$$

Sensibilitatea sistemului neastatizat σ_n va fi:

$$\sigma_n = \frac{\Delta x}{\Delta g} = \frac{x}{g} = \frac{m}{S}. \tag{19-30}$$

Din relația anterioară rezultă modalitatea de funcționare a unui gravimetru construit pe sistemul descris:

$$\Delta g = \frac{g_1}{x_1}\Delta x, \tag{19-31}$$

unde $\Delta x = x_2 - x_1$, valoare determinată pe o riglă gradată odată cu trecerea din punctul P_1 în punctul P_2.

Pentru a se obține precizia de determinare $s'_g/g = \pm 1 \cdot 10^{-8}$ este necesar ca eroarea în determinarea citirilor x să nu depășească valoarea:

$$s'_x = \pm x \cdot 10^{-8}. \tag{19-32}$$

Din motive constructive valorile maxime x ce se pot citi pe riglă sînt de ordinul a 10—20 cm. Rezultă că s'_x trebuie să fie de ordinul a $\pm 10^{-3}\mu$, ceea ce este extrem de greu, în condiții de teren, deși în sistemul de măsurare intervin *amplificări exterioare* sistemului deformabil (optice sau mecanice). De regulă măsurarea deplasărilor este înlocuită cu anularea lor, adică sistemul este adus în poziția inițială, măsurîndu-se mărimea acestei acțiuni. Apoi, pe baza unei legi de dependență cunoscute, se determină deplasarea căutată și în final diferența de gravitate.

19.3.2.2. **Sisteme astatizate.** Pe lîngă amplificări exterioare există și posibilități de mărire a sensibilității gravimetrelor pe *cale interioară*, prin așa-numitul *proces de astatizare*, în care intervine un element care are rolul de a accentua deformarea. Din multitudinea de sisteme astatizate cunoscute se va examina sistemul *Golițîn* (fig. 19-7), folosit la construcția multor gravimetre.

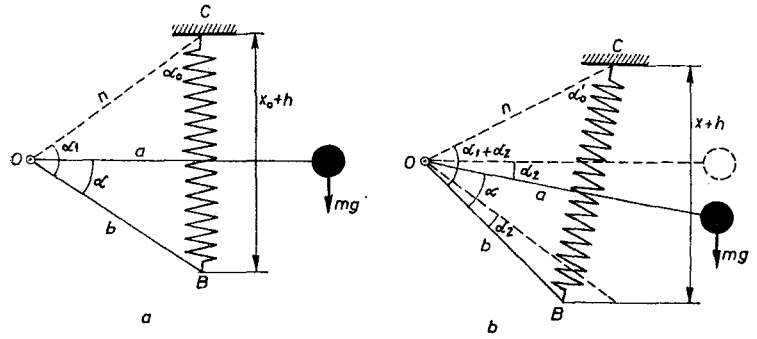


Fig. 19-7. Sistemul astatizat cu deformare de rotație *Golițîn*.

Se menționează aici încă un *criteriu de clasificare uzuală a gravimetrelor* și anume:

— gravimetre cu deformare de translație;

— gravimetre cu deformare de rotație.

Astfel se poate defini complet sistemul Golițîn, ca un sistem astatizat cu deformare de rotație. În plus, mai trebuie menționat faptul că este folosit *pendulul orizontal*, spre deosebire de pendulele verticale întîlnite pînă acum.

În figura 19-7, *a* se arată sistemul în poziția zero, iar în figura 19-7, *b* după ce a primit o mișcare de rotație în jurul axei care trece prin 0. Cu *a* s-a notat bara de suspensie a pendulului orizontal, iar cu *b* o bară rigidă legată de *a*, formînd între ele unghiul α. Punctul B trebuie să se afle sub orizontala care trece prin O.

În poziția zero, condiția de echilibru este dată de ecuația de momente, scrisă pentru punctul O, considerînd cele două forțe:

— acțiunea, reprezentată de mg;

— forța elastică $S \cdot x_0$, în care x_0 este cursa activă a resortului:

$$mga = Sx_0\, n \sin \alpha_0. \tag{19-33}$$

În figura 19-7, h reprezintă lungimea inactivă (nesupusă unei sarcini) a resortului, astfel încît se poate scrie:

$$\frac{b}{\sin \alpha_0} = \frac{h + x_0}{\sin \alpha_1},$$

obținîndu-se din relația anterioară:

$$mga = Sx_0 n \frac{b \sin \alpha_1}{h + x_0}. \tag{19-34}$$

În urma unei rotații cu α_2 a brațului a (fig. 19-7, *b*) rezultă:

$$mga \cos\alpha_2 = Sxn \sin\alpha'_0, \tag{19-35}$$

unde x reprezintă cursa activă a resortului în această poziție. De asemenea se poate scrie:

$$\frac{b}{\sin \alpha'_0} = \frac{h + x}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)},$$

adică:

$$m\,g\,a\,\cos\,\alpha_2 = S\,n\,b\,x\frac{\sin\,(\alpha_1+\alpha_2)}{h+x}. \qquad (19\text{-}36)$$

În cazul în care lungimea inactivă a resortului este foarte mică ($h \approx 0$), ceea ce la arcuri de metal se poate realiza mai bine, dar nu și la arcuri de cuarț, ultima relație are o formă mai simplă:

$$m\,g\,a\,\cos\,\alpha_2 = S\,n\,b\,\sin\,(\alpha_1+\alpha_2). \qquad (19\text{-}37)$$

Pentru a stabili formula sensibilității acestui sistem, se diferențiază relația (19-36) în raport cu variabilele g, α_1 și α_2:

$$-\,m\,g\,a\,\sin\alpha_2\,d\alpha_2 + m\,a\,\cos\alpha_2\,dg = S\,n\,b\,\cos\,(\alpha_1+\alpha_2)\,(d\alpha_1+d\alpha_2).$$

Pentru poziția $\alpha_2 = 0$ și prin trecerea la diferențe finite se obține:

$$m\,a\,\Delta g = S\,n\,b\,\cos\,\alpha_1\,\Delta\alpha_1, \qquad (19\text{-}38)$$

iar împreună cu relația (19-34), sub condiția $h = 0$, rezultă expresia sensibilității sistemului:

$$\sigma_a = \frac{\Delta\alpha}{\Delta g} = \frac{1}{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha_1. \qquad (19\text{-}39)$$

Se observă că pentru $\alpha_1 \to 90°$ se obține o astatizare completă, sensibilitatea tinzînd către valoarea maximă, ceea ce nu se dorește însă în practică, pentru a nu se micșora prea mult stabilitatea sistemului. Astatizarea completă este, în plus, greu de realizat deoarece $h \neq 0$.

Din relația (19-39) se deduce și principiul de lucru cu gravimetrele care funcționează pe baza acestui sistem. În funcție de g, α_1, valori cunoscute în punctul inițial, se determină acțiunea necesară anulării deformației $\Delta\alpha$ și prin aceasta singura necunoscută Δg din relația (19-39) devine calculabilă.

În continuare se prezintă descrieri sumare ale unor gravimetre folosite curent în rețelele gravimetrice, precum și la determinările gravimetrice geodezice.

19.3.2.3. **Gravimetrul Nörgaard.** Sistemul elastic al gravimetrului *Nörgaard* este construit aproape în întregime din cuarț, fiind format dintr-un pendul orizontal (oglinda mobilă M_1, inelele I, tija t), susținut de firul de torsiune T din cuarț (fig. 19-8, *a*). Firul este fixat pe o ramă de cuarț F, prevăzută la unul din capete cu un dispozitiv A, pentru modificarea torsiunii în firul T. A doua oglindă M_2 este susținută de un braț fixat pe rama F.

Cu ajutorul gravimetrului *Nörgaard* se determină valori relative ale gravității, care se referă la o valoare inițială g_0, modul de lucru bazîndu-se pe principiul *coincidențelor*. Printr-un sistem optic diviziunea reper a microscopului este reflectată de cele două oglinzi M_1 și M_2, în punctul curent constatîndu-se o anumită necoincidență între cele două imagini. În punctul inițial coincidența celor două imagini se realizează prin acționarea pîrghiei A, ceea ce conduce la crearea unui anumit moment de torsiune în firul T, care se menține constant în toate celelalte determinări ulterioare.

Într-un punct gravimetric oarecare P_1 condiția de echilibru a sistemului elastic va fi prin urmare (fig. 19-8, *b*):

$$m\,g_1\,\cos\,\alpha_1\,l = f\,\tau_0, \qquad (19\text{-}40)$$

unde: f este coeficientul de torsiune al firului T, iar τ_0 — unghiul de torsiune.

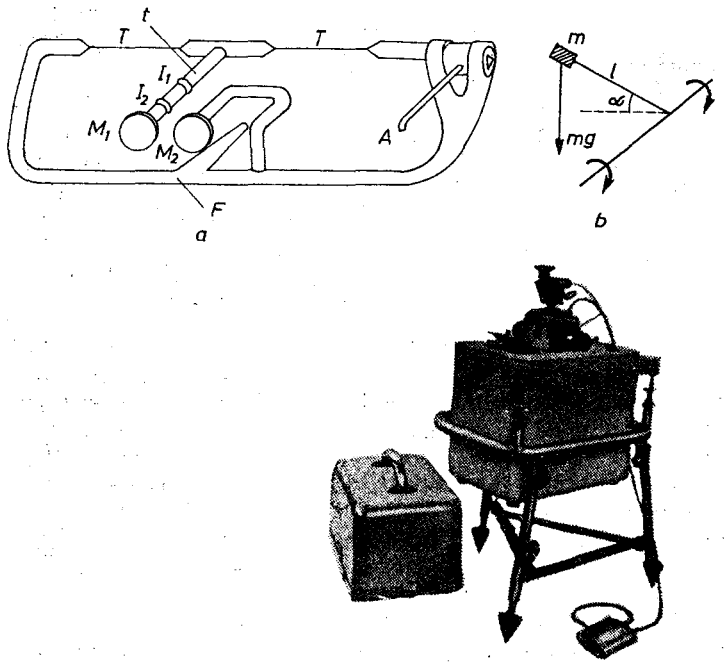


Fig. 19-8. Gravimetrul *Nörgaard.*

Pentru poziția riguros orizontală a pendulului se poate scrie:

$$m\,g_0\,l = f\,\tau_0, \qquad (19\text{-}41)$$

g_0 fiind numită valoarea de acordare a aparatului.

Într-un alt punct gravimetric P_2, datorită variației accelerației gravității se obține o modificare a momentului gravității și implicit o modificare a poziției relative a celor două oglinzi, condiția de echilibru fiind:

$$m\,g_2\,l\,\cos\,\alpha_2 = f\,\tau_0. \qquad (19\text{-}42)$$

Din relațiile (19-40) și (19-41) se obține:

$$g_0 = g_1\,\cos\,\alpha_1 = g_2\,\cos\,\alpha_2 = \ldots, \qquad (19\text{-}43)$$

de unde:

$$\Delta g = g_2 - g_1 = g_0\,\frac{\cos\,\alpha_1 - \cos\,\alpha_2}{\cos\,\alpha_1\,\cos\,\alpha_2}. \qquad (19\text{-}44)$$

Deoarece unghiurile α_1 și α_2 sînt mici, se poate scrie în continuare, după dezvoltarea în serie, în care se mențin numai termenii de ord. 1:

$$g \approx g_0\,\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2} = g_0\,\Delta\alpha\,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = g_0\,\Delta\alpha\,\alpha_m \qquad (19\text{-}45)$$

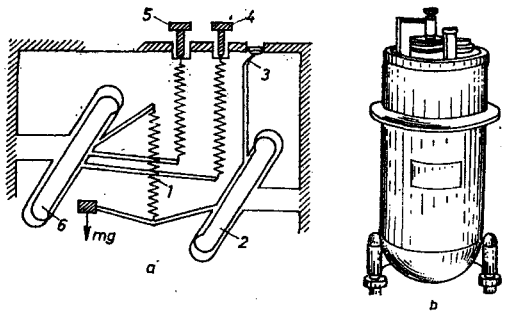


Fig. 19-9. Gravimetrul *Worden*.

De aici se poate determina sensibilitatea gravimetrului *Nörgaard*:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta g} = \frac{1}{\alpha_m g_0}. \quad (19\text{-}46)$$

Din această relație se observă caracterul neastatizat al sistemului *Nörgaard*: sensibilitatea este proporțională cu deformarea, factorul de proporționalitate fiind constant. Aparatul (fig. 19-8, *c*) este astfel construit încît întregul sistem de măsură să poată fi rotit prin acționarea unor șuruburi micrometrice pînă se realizează coincidența imaginilor diviziunii reper, transmise de oglinzile M_1 și M_2 în fiecare punct de lucru. În mod practic nu se măsoară prin urmare unghiurile α, ci se efectuează citirile $\overline{m}$ pe micrometrul sistemului. Pe baza legii de dependență dintre aceste citiri și unghiul α se poate calcula variația accelerației gravității:

$$\Delta g = C\,\overline{m}^2 + D\,\overline{m}^3 + E\,\overline{m}^4, \quad (19\text{-}47)$$

unde C, D, E sînt constante instrumentale.

19.3.2.4. **Gravimetrul Worden.** Gravimetrul *Worden* (fig. 19-9, *b*) este unul dintre instrumentele de înaltă precizie cu largă aplicabilitate în lucrările gravimetrice, fiind ușor (circa 3 kg) și de dimensiuni mici, cu sistemul deformabil format complet din cuarț. Masa pendulului, redusă la cîteva miimi de gram, este menținută în echilibru de forța elastică a resortului principal *1* (fig. 19-9, *a*). Modificarea de gravitate este transmisă printr-o tijă firelor de torsiune de la capetele cadrului *2*. Această modificare este urmărită în microscop, prin intermediul indexului *3*, care își schimbă poziția în funcție de variația survenită în mărimea gravității.

Măsurarea deformării se face prin aducerea pendulului în poziție orizontală. Acest lucru se poate realiza prin manevrarea celor două micrometre *4* și *5* care acționează indirect, prin intermediul sistemului elastic *6*, asupra pendulului. Micrometrul *5* servește pentru aducerea pendulului în poziția inițială, iar micrometrul *4* este folosit în procesul de măsurare, pentru aducerea imaginii firului *3* la intersecția firelor reticulare, ceea ce indică revenirea pendulului în poziția inițială. Printr-o transformare a citirilor de pe micrometru se obține variația Δg căutată. Precizia de măsurare oscilează în jurul valorii de $\pm$ 0,01 mgal.

19.3.2.5. **Gravimetrul La Coste-Romberg.** Gravimetrul La Coste-Romberg (fig. 19-10, *b*) face parte din clasa instrumentelor de cea mai înaltă precizie. Cu unele perfecționări s-a ajuns ca și în condiții de teren să se atingă o precizie de $\pm$ 0,003 — $\pm$ 0,005 mgal. În înregistrările continue, pentru studierea fenomenelor de maree terestre, în condiții speciale de exploatare, precizia de determinare este de ordinul a $\pm$ 0,001 mgal.

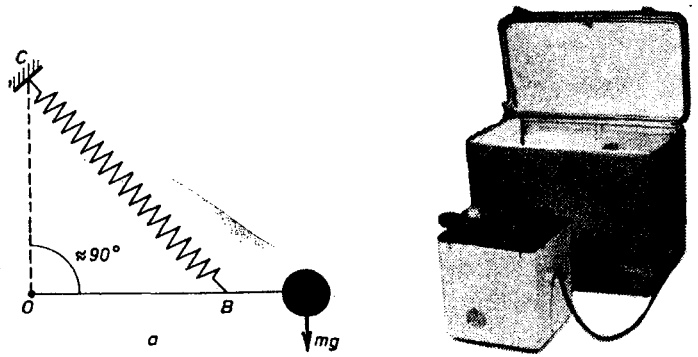


Fig. 19-10. Gravimetrul *La Coste-Romberg*.

Schema de funcționare (simplificată) a gravimetrului *La Coste-Romberg* (fig. 19-10, *a*) indică faptul că sistemul elastic este construit pe principiul *Golițin*, prezentat în 19.3.2.2.

O caracteristică remarcabilă a acestui gravimetru se referă la driftul instrumental (v.19.3.3.4) extrem de mic, de numai 0,5 mgal/lună, în comparație cu gravimetrul *Worden* de circa 0,06 mgal/oră.

19.3.3. ERORILE DETERMINĂRILOR CU GRAVIMETRUL

19.3.3.1. **Influența orizontalității gravimetrelor.** Relațiile referitoare la funcționarea sistemelor elastice ale gravimetrelor sînt deduse în ipoteza unei poziții corecte de lucru. În cazul unei erori de orizontalizare a instrumentului, cuplul ce acționează asupra sistemului deformabil se modifică, acțiunea acestei erori fiind de același gen cu deformarea propriu-zisă.

De aceea, o primă operațiune la fiecare determinare este orizontalizarea instrumentului, sau mai corect, aducerea în poziție verticală a axei sale principale.

19.3.3.2. **Influența factorilor atmosferici.** Factorii atmosferici, în mod deosebit presiunea atmosferică, determină apariția unor erori în măsurătorile gravimetrice.

Micșorarea influenței presiunii atmosferice se poate realiza, principial, prin utilizarea unor materiale cu densitate foarte mare, efectul obținut fiind, totuși, limitat. De aceea rezolvarea acestui deziderat a fost de altă natură, de exemplu la gravimetrul *Worden* prin realizarea unei etanșări perfecte a recipientului în care este introdus sistemul deformabil, sau la gravimetrul *Nörgaard* prin scufundarea sa într-un lichid, care în plus are și rol de compensator de temperatură. Ca urmare a acestor măsuri de ordin constructiv, nu este necesară aplicarea unor reduceri datorită variațiilor de presiune și de umiditate a atmosferei.

În mod analog s-a procedat, tot constructiv, pentru diminuarea influenței efectelor microseismice sau a vîntului, prin realizarea unor dispozitive de amortizare, mecanice sau electromagnetice.

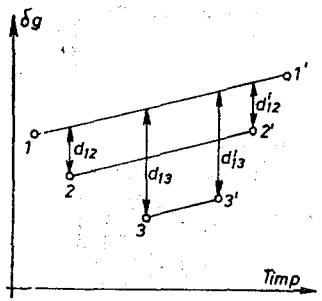


Fig. 19-11. Diagramă de drift instrumental.

19.3.3.3. **Influenţa variaţiilor de temperatură.** Variaţiile de temperatură au efect asupra sistemului elastic, chiar şi la gravimetrele foarte perfecţionate. Există formule de calcul pentru reducerile de temperatură, care însă oferă doar un indiciu asupra factorilor principali care intervin în acest fenomen. Evaluarea influenţei variaţiei temperaturii nu se realizează, în mod curent, printr-o formulă de calcul, ci pe calea unei estimări dintr-o diagramă, specifică fiecărui gravimetru. Această diagramă se întocmeşte experimental, prin înregistrarea modificărilor sistemului elastic, într-un punct fix, în funcţie de variaţiile de temperatură.

Constructiv, gravimetrele sînt astfel realizate încît să se asigure fie izolarea termică, fie termostatarea sau compensarea variaţiei de temperatură, dar sistemele prezintă imperfecţiuni, care impun aplicarea corecţiilor de temperatură, pe baza procedeului menţionat.

19.3.3.4. **Reducerea de drift.** Modificarea în timp a proprietăţilor elastice ale sistemelor deformabile (fenomenul de histereză elastică) conduce la apariţia unor erori care au semnificaţia unor deplasări ale punctului zero al gravimetrului. Acestea se numesc erori de *mers* sau de *derivă* sau de *drift instrumental*. Datorită calităţilor constructive ale gravimetrelor, aceste erori sînt, în general, mici, însă reducerea de drift se aplică în cazul majorităţii instrumentelor cunoscute.

În ţara noastră reducerea de drift se determină experimental prin următorul procedeu:

— determinările gravimetrice se efectuează pe cicluri (dus-întors) care durează 2-3 ore, interval de timp în care driftul are o variaţie liniară;

— aceste determinări în punctele staţionate *1, 2, 3* (dus) şi 1', 2', 3' (întors) se raportează (fig. 19-11), în funcţie de timp, rezultatul trebuind să fie reprezentat de drepte paralele. Neparalelismul se datoreşte imperfecţiunilor de determinare, precum şi neliniarităţii variaţiei driftului.

Eliminarea driftului instrumental se realizează prin calculul diferenţelor de gravitate δg între toate staţiile ciclului şi staţia de bază (staţia *1* în acest caz) ca şi cum toate determinările ar fi fost executate simultan. Pentru aceasta, se măsoară pe diagrama de drift segmentele d şi apoi se calculează:

$$\delta g_{12} = \frac{d_{12} + d'_{12}}{2}; \qquad \delta g_{13} = \frac{d_{13} + d'_{13}}{2}. \tag{19-48}$$

19.4. DETERMINAREA GRADIENTULUI ORIZONTAL ŞI A MĂRIMILOR DE CURBURĂ ALE GRAVITĂŢII

Gradientul orizontal şi mărimile de curbură ale gravităţii, deosebit de utile în studiul local al suprafeţelor de nivel (v.2.1.2) se pot determina cu ajutorul *balanţei de torsiune*.

Schematic, balanţa de torsiune (fig. 19-12) este reprezentată de o bară, la extremităţile căreia se află masele punctiforme m, suspendate de un fir

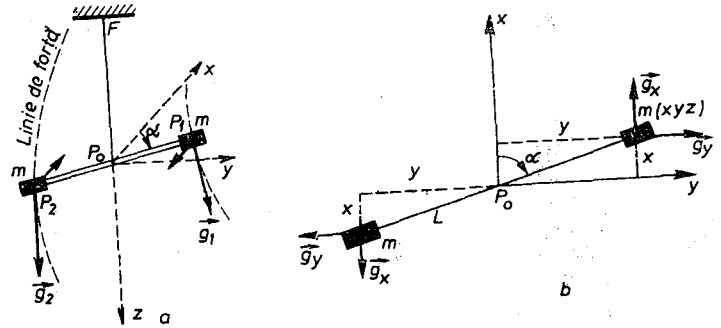


Fig. 19-12. Balanţa de torsiune (schemă de funcţionare).

de torsiune ce trece prin centrul său de greutate P_0. În continuare se va folosi acelaşi sistem de coordonate ca în 2.1.2:

— axa z este îndreptată după direcţia firului de torsiune, putîndu-se admite că în punctul P_0 coincide cu direcţia gravităţii;

— axa x este îndreptată după direcţia nord (în poziţia din figură bara are azimutul α), iar, în consecinţă, axa y după direcţia vest-est.

Datorită curburii suprafeţelor de nivel şi a liniilor de forţă, vectorii care reprezintă gravitatea în punctele P_1 şi P_2 pot diferi atît ca direcţie, cît şi ca intensitate. Dacă se descompun aceste forţe în două componente, şi anume în direcţia firului de torsiune, respectiv perpendicular pe planul determinat de fir şi bara P_1P_2, se observă că doar ultimele componente acţionează asupra sistemului deformabil, producînd un cuplu care imprimă o rotire a barei P_1P_2. În situaţia din figura 19-12 momentul cuplului rezultat din acţiunea cîmpului gravific asupra masei m este:

$$2m\,(x\,g_x - y g_y),$$

căreia i se opune cuplul de torsiune în firul FP_0: $f\,(\tau - \tau_0)$, în care:

f este constanta de torsiune a firului;

τ — unghiul de rotaţie a firului în poziţia de lucru;

τ_0 — unghiul de rotaţie a firului în poziţia iniţială.

Condiţia de echilibru va fi prin urmare:

$$f(\tau - \tau_0) = 2m\,(x\,g_y - y g_x). \tag{19-49}$$

Deoarece braţele pîrghiei P_1P_2 sînt mici, se poate accepta o variaţie liniară a gravităţii şi a componentelor sale, exprimată printr-o dezvoltare în serie *Taylor* cu termeni de ord. 1:

$$g_x = (g_x)_0 + \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 z + \ldots;$$

$$g_y = (g_y)_0 + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 z + \ldots. \tag{19-50}$$

Folosind condiţiile iniţiale (2-12), valabile şi în situaţia de faţă, precum şi notaţiile (1-60), (1-61) şi (1-63), relaţiile (19-50) se pot scrie şi sub forma:

$$g_x = x\,W_{xx} + y\,W_{xy} + z\,W_{xz};$$

$$g_y = x\,W_{yx} + y\,W_{yy} + z\,W_{yz}. \tag{19-51}$$

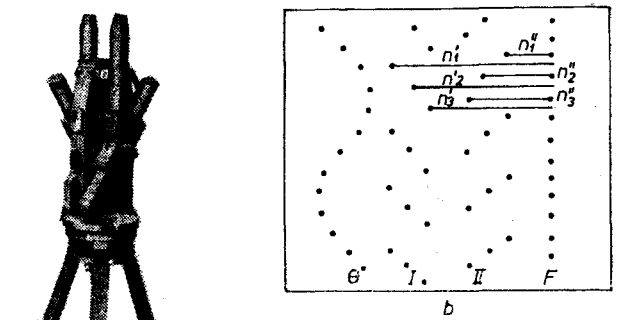


Fig. 19-13. Balanța de torsiune *Askania*.

Pentru poziția considerată:

$$x = L \cos \alpha; \qquad y = L \sin \alpha; \qquad z = h/2, \tag{19-52}$$

h fiind diferența de nivel între punctele P_1 și P_2. Rezultă astfel din relația inițială (19-40):

$$2(\tau - \tau_0) = \frac{K}{f}(W_{yy} - W_{xx}) \sin 2\alpha + 2W_{xy} \cos 2\alpha - \\ - \frac{2\,mhL}{f}(W_{zx} \sin \alpha - W_{zy} \cos \alpha). \tag{19-53}$$

Momentul de inerție $K = 2mL^2$, precum și mărimile f, m, h, L sînt constante instrumentale cunoscute, α se măsoară în poziția de lucru, iar $\tau - \tau_0$ se determină, de regulă, prin înregistrare fotografică. Necunoscutele problemei $(W_{yy} - W_{xx})$, W_{xy}, W_{zx}, W_{zy} și τ_0 se pot determina prin efectuarea unui număr de minimum 5 determinări într-un punct de lucru, pentru azimute diferite.

Balanțele de torsiune (fig. 19-13, *a*) sînt instrumente grele (30—60 kg), timpul de stabilizare a pîrghiei fiind cuprins între 20 și 60 minute. La tipurile mai noi de balanțe de torsiune, funcționarea se desfășoară automat, înregistrările efectuîndu-se fotografic. În figura 19-13, *b* se prezintă un exemplu de astfel de înregistrare, într-un punct de stație în care s-a lucrat cu o balanță de torsiune cu două pîrghii (notate I și II) efectuîndu-se patru determinări în cîte trei azimute. Pentru fiecare azimut se obțin patru puncte: punctul fix F, două puncte corespunzătoare poziției celor două pîrghii și punctul de temperatură θ. Formula de lucru a balanței derivă din formula fundamentală (19-53), necunoscutele problemei urmînd a se determina în funcție de înregistrări după developare.

19.5. REȚELE GRAVIMETRICE

Rețelele gravimetrice pot fi clasificate în:
— rețele gravimetrice de sprijin;
— rețele gravimetrice de prospecțiuni.

Specialistul geodez este util la crearea ambelor categorii de rețele, atît la efectuarea determinărilor gravimetrice propriu-zise, cît și la efectuarea determinărilor topografice-geodezice necesare stabilirii poziției punctelor de stație, a determinărilor nivelitice în mod deosebit, necesare reducerilor topografice.

Dintre *rețelele gravimetrice de sprijin* trebuie menționată în primul rînd *rețeaua gravimetrică internațională* (v. 1.9.2.) la care se racordează rețelele naționale gravimetrice, sistemul internațional astfel creat avînd o importanță deosebită în studierea formei și dimensiunilor Pămîntului (v.8.1.4.), în care s-au prezentat unele detalii privind racordarea punctului gravimetric fundamental din țara noastră la sistemul internațional Potsdam).

Rețeaua gravimetrică de ord. I a țării noastre a fost prezentată în figura 8-8.

Schema de lucru a rețelei gravimetrice de ord. I a fost concepută sub forma unei triangulații cu stație centrală, situată în capitala țării (aeroportul *Popești-Leordeni*). Acest punct central, împreună cu alte puncte gravimetrice ajutătoare, situate în apropierea orașului *București*, au fost încadrate într-o microrețea, în scopul racordării la stația gravimetrică fundamentală a țării.

Succesiunea determinărilor a fost următoarea:
— pentru latura ab: $a—b—a$ sau $a—b—b—a$;
— pentru laturile ab și ac: $a—b—c—a$;
— pentru laturile ab și bc: $a—b—c—b—a$.

Eroarea maximă de închidere pe un triunghi din rețeaua gravimetrică de ord. I a R.S.R. a fost de +0,20 mgal, după compensare abaterea standard a unității de pondere fiind $s_0 = \pm 0{,}082$ mgal.

Rețeaua gravimetrică de ord. II, aflată în curs de realizare, este concepută ca rețea de îndesire, cu densitatea de 1 punct la 70 km. Metodele de determinare sînt analoage cu cele descrise mai sus, fiind folosite gravimetre statice.

Deși au multe particularități, lucrările de realizare a rețelei gravimetrice au multe puncte comune cu lucrările efectuate în rețeaua națională de nivelment, cu care studenții secției de geodezie sînt mai familiarizați: proiectarea ca rețele sub formă de poligoane sau drumuiri sprijinite la capete pe puncte vechi, observații dus-întors cu controale specifice, metode de compensare asemănătoare.

Din literatura de specialitate se desprind și posibilități specifice de succesiune a determinărilor gravimetrice în teren, menite să conducă la diminuarea influențelor de drift instrumental (fig. 19-14).

Rețelele gravimetrice geodezice de îndesire trebuie să asigure densitatea necesară următoarelor lucrări (v. cap. 3.5):
— determinarea ondulațiilor geoidului și a deviațiilor verticalei;
— calculul corecțiilor normale în lucrări de nivelment geometric.

Rețelele gravimetrice de prospecțiune se întind pe suprafețe variabile, în funcție de mărimea zonei de prospectat, lungimile laturilor variind între 1 și 10 km. Fără a intra în detaliile de amplasament ale stațiilor de prospecțiuni, care constituie de fapt atribuțiile specialistului geofizician sau geolog, trebuie menționat volumul mare de lucrări topografice necesare pentru:
— stabilirea coordonatelor stațiilor gravimetrice;

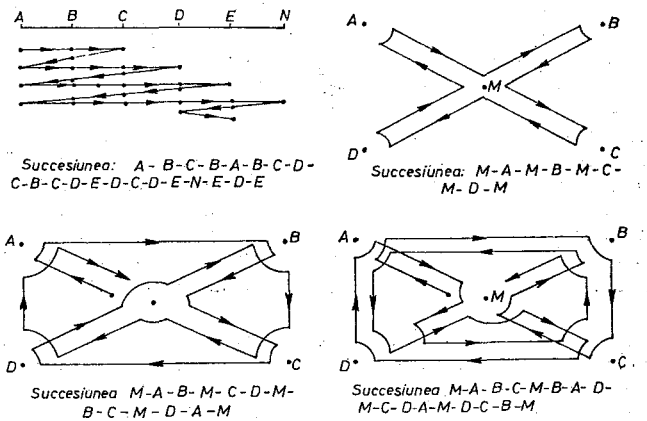


Fig. 19-14. Succesiuni ale determinărilor gravimetrice utile pentru diminuarea erorii de drift instrumental.

— determinarea cotelor medii ale compartimentelor în care a fost împărțit terenul, în scopul determinării reducerilor topografice.

Pretențiile ridicate în ceea ce privește precizia de determinare necesară sînt însoțite de pretenții deosebite privind randamentul lucrărilor topografice, care trebuie să se înscrie în ritmul lucrărilor gravimetrice propriu-zise. Acestea din urmă solicită un volum de muncă mai mic (circa 35—40% din volumul total de lucrări) putînd fi executate rapid, în condițiile utilizării aparaturii moderne. De aceea și lucrările topografice necesare se execută cu aparate de mare randament (nivele cu pendul, tahimetre autoreductoare sau electronice ș.a.).

Liniile și bazele gravimetrice etalon au fost create de către *Uniunea Internațională de Geodezie și Geofizică* pentru asigurarea unei bune racordări a lucrărilor gravimetrice internaționale. Acestea au fost determinate cu cea mai mare precizie posibilă și la ele se racordează lucrările gravimetrice naționale (v.8.1.4.).

Pentru scopuri naționale, fiecare țară are un număr oarecare de baze gravimetrice etalon, pe care se verifică și se calibrează periodic aparatura existentă în exploatare. La noi în țară se folosește baza gravimetrică din *Poiana Brașov*, constituită din trei puncte (A_1, A_2, A_3) pentru care s-au determinat diferențele de gravitate cu un grup mare de gravimetre avute la dispoziție (*GAK, Nörgaard, Worden*) rezultînd:

$$g_{A_1}-g_{A_2}=49{,}94\pm0{,}06 \text{ mgal}; \qquad g_{A_1}-g_{A_3}=78{,}51\pm0{,}10 \text{ mgal}. \quad (19\text{-}54)$$

Partea a cincea

PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR EFECTUATE ÎN REȚELELE GEODEZICE

Modelul de prelucrare este un instrument al gîndirii umane și, de aceea, nu va putea descrie decît într-o anumită măsură, modelul extrem de complex al realității

(I. M. Tienstra)

Prelucrarea observațiilor efectuate în rețelele geodezice constituie una din activitățile finale, după care rezultatele sînt reprezentate grafic sau numeric și utilizate de diverși beneficiari. Prelucrarea în sine nu va îmbunătăți precizia realizată prin procesele de măsurare. Dar, paradoxal, prelucrarea neîngrijită, insuficient de adecvată realității pe care intenționează să o descrie, poate micșora această precizie sau poate oferi, în cazuri extreme, rezultate deformate în raport cu realitatea.

Concordanța deplină între rezultatele prelucrării și modelul real este un deziderat practic imposibil de îndeplinit deoarece descrierile au și vor avea întotdeauna un număr oarecare de ipoteze, care influențează mai mult sau mai puțin diferențierea față de realitate. Se poate afirma că în prezent prelucrarea observațiilor geodezice este efectuată sub forma unui *proces iterativ*, în fiecare etapă fiind realizate progrese care determină baza unor modele de calcul perfecționate pentru etapa următoare.

Capitolul 20
PRELUCRAREA PRELIMINARĂ A OBSERVAȚIILOR GEODEZICE

Obiectivele prelucrării preliminare a observațiilor geodezice constau în determinarea elementelor necesare construirii modelului funcțional-stochastic al prelucrării propriu-zise, precum și în reducerea observațiilor geodezice la o suprafață de referință unitară.

20.1. COORDONATE PRELIMINARII

Pentru calcularea corecțiilor de reducere a observațiilor geodezice la suprafața de referință este necesară determinarea unor coordonate de lucru, numite *coordonate preliminarii*, pentru a le deosebi de *coordonatele provizorii*, cu care se operează efectiv în prelucrarea propriu-zisă. Calculele se efectuează cu un număr restrîns de cifre, dependent de *aproximația de calcul* acceptată și de lungimea laturilor rețelei de triangulație.

Determinarea coordonatelor preliminarii este adaptată la modalitatea efectivă de desfășurare a prelucrării propriu-zise, atît în ceea ce privește suprafața de referință folosită, cît și metoda utilizată (observații indirecte, respectiv observații condiționate).

20.1.1. CALCULUL DISTANȚELOR ȘI ORIENTĂRILOR ÎNTRE PUNCTELE VECHI

În mod obișnuit într-o rețea de triangulație există cel puțin o racordare simplă la o rețea de sprijin mai veche, în care punctele au coordonate cunoscute. De aceea, o primă etapă de calcule, care intervine în toate categoriile de prelucrări, este constituită de calculul distanțelor și orientărilor între punctele vechi, care vor fi considerate în continuare drept *elemente inițiale*. Considerînd două puncte vechi A și B, se obține:

$$D_{AB} = \sqrt{\Delta X^2_{AB} + \Delta Y^2_{AB}}; \quad \theta_{AB} = \text{arc tg}\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}}, \tag{20-1}$$

unde:

$$\Delta X_{AB} = X_B - X_A; \quad \Delta Y_{AB} = Y_B - Y_A. \tag{20-2}$$

Deoarece elementele inițiale D_{AB} și θ_{AB} sînt necesare și la efectuarea calculelor de prelucrare propriu-zisă, în această etapă preliminară deducerea lor se face cu un grad ridicat de precizie de calcul (v. exemplele de calcul din cap. 21 și 22). De aceea se utilizează întotdeauna următorul control al calculelor:

$$D_{AB} = \frac{\Delta X_{AB}}{\cos\theta_{AB}} = \frac{\Delta Y_{AB}}{\sin\theta_{AB}}. \tag{20-3}$$

Calculele se ordonează, de regulă, într-un tabel de forma tabelului 21-3.

În cazul în care calculele de compensare se efectuează pe elipsoid, elementele inițiale se deduc prin utilizarea formulelor cunoscute de la *problema geodezică inversă* (v. 7.2.3.).

20.1.2. ORIENTAREA STAȚIILOR CU COORDONATE CUNOSCUTE

Se presupune că din punctul vechi P (fig. 20-1) au fost vizate punctele vechi A, B, C, precum și punctele noi *1*, *2*, *3*, (tabelul 20-1).

Din coordonatele punctelor vechi se pot determina orientările θ_{PJ} ($J = A,B,C$), numite și *vize orientate*, care au fost înscrise în tabelul 20-1 cu sublinieri pentru a putea fi puse în evidență. Dacă se determină diferențe de forma:

$$z^J_P = \theta_{PJ} - \alpha^0_{PJ}; \quad J = A,B,C, \tag{20-4}$$

unde α^0_{PJ} reprezintă observațiile orizontale rezultate din compensarea în stație, se obțin trei valori apropiate ca mărime. Din figura 20-1 se observă că unghiul z_P denumit *unghi de orientare a stației* P are o semnificație fizică, fiind orientarea direcției zero (originii) lecturilor pe cercul orizontal.

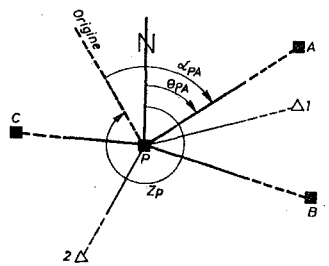


Fig. 20-1. Orientarea stației P, de coordonate cunoscute.

Datorită erorilor produse la efectuarea observațiilor, precum și datorită erorilor

Tabelul 20-1

Punctul vizat	Direcții măsurate			Unghi de orientare			Vize orientate			Ponderea D (km)
	g	c	cc	g	c	cc	g	cc	c	
A	274	34	36	114	52	80	388	87	16	5
1	339	77	23	114	52	84	54	30	07	
2	391	27	58	114	52	84	105	80	42	
B	0	00	06	114	52	84	114	52	90	3
3	65	35	42	114	52	84	179	88	26	
C	117	81	08	114	52	87	232	33	95	6

coordonatelor punctelor vechi, cele trei valori obținute pentru unghiul de orientare nu vor fi niciodată aceleași, decît în mod cu totul întîmplător.

A orienta o stație cu coordonate înseamnă a stabili un unghi de orientare mediu ponderat z'_P (ca pondere se consideră distanța exprimată în km, D_{km}) din valorile z^J_P anterior determinate. În exemplul prezentat $z'_P = 114^g52^c84^{cc}$. Prin adăugarea acestui unghi de orientare mediu la direcțiile α^0_{Pi} către punctele noi, se obțin vizele orientate către aceste puncte, notate θ'_P

$$\theta'_{Pi} = z'_P + \alpha^0_{Pi} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{20-5}$$

Este evident că orientările θ'_{Pi} și unghiul mediu ponderat z'_P diferă de valorile corespondente θ_{Pi} și z_P, care s-ar obține din compensarea riguroasă a întregii rețele. Vizele orientate θ'_{Pi} se vor folosi apoi la calculul coordonatelor punctelor noi.

Observații. 1. În cazul în care prelucrarea propriu-zisă se va efectua prin metoda observațiilor condiționate, calculele descrise mai înainte nu sînt necesare.

2. În prelucrările aproximative, utilizate mai ales în trecut, calculele descrise anterior, însoțite de orientarea similară a punctelor noi din rețea, constituiau un procedeu de sine stătător de prelucrare „definitivă" (*Ghițău* 1972 pag. 331). Astfel de procedee au în prezent o aplicabilitate mult prea restrînsă, putînd fi înlocuite cu ușurință de metodele riguroase.

20.1.3. CALCULUL COORDONATELOR PRELIMINARII

Calculul coordonatelor preliminarii în planul de proiecție se poate realiza în două moduri:

— cînd prelucrarea se desfășoară după *metoda observațiilor indirecte* se vor utiliza formulele intersecției simple înainte (10-46) și respectiv (10-47), efectuîndu-se cel puțin două intersecții (pentru control), pentru fiecare punct nou. Media acestor determinări constituie coordonatele preliminarii ale punctului nou considerat;

— cînd prelucrarea se desfășoară după *metoda observațiilor condiționate*, coordonatele punctelor rețelei se determină din aproape în aproape, prin metoda dublei radieri. Astfel, de exemplu, pentru punctul nou *1* (figura 20-2) determinat din punctele vechi A și B se vor folosi relațiile:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_A + D'_{A1}\cos\theta'_{A1}; \quad x'_1 = x_B + D'_{B1}\cos\theta'_{B1}; \\ y'_1 &= y_1 + D'_{A1}\sin\theta'_{A1}; \quad y'_1 = y_B + D'_{B1}\sin\theta'_{B1}. \end{aligned} \tag{20-6}$$

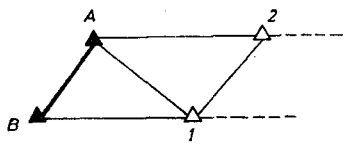


Fig. 20-2. Determinarea coordonatelor preliminarii ale punctelor noi prin metoda dublei radieri.

Cu D' și $0'$ s-au notat distanța și respectiv orientarea preliminară între punctele considerate, care se calculează în tabele de forma (22-5) și respectiv (22-6) prin utilizarea elementelor inițiale și a observațiilor azimutale compensate în stație. Pentru a avea un control asupra acestor calcule, se obișnuiește ca triunghiurile rețelei să fie „închise" la 200^g, în mod preliminar, obținîndu-se în acest fel o egalitate perfectă între cele două soluții din relația (20-6). Astfel de calcule se desfășoară *simultan* în trei componente: orientări, distanțe și respectiv coordonate, pentru fiecare triunghi în parte.

● În cazul în care prelucrarea se efectuează pe elipsoid, este necesar să se rezolve, *într-o primă aproximație*, triunghiurile geodezice după *metoda Legendre* (7.1.2.) sau după *metoda aditamentelor* (7.1.3.), obținîndu-se laturile rețelei de triangulație. Apoi se determină coordonatele punctelor geodezice prin utilizarea formulelor de la *problema geodezică directă* (7.2.1. și 7.2.2.) cu controalele respective.

● Calculul altitudinilor preliminarii în rețelele altimetrice geodezice se desfășoară după aceleași principii, efectuîndu-se transmiteri din aproape în aproape, prin duble radieri, dacă situațiile concrete permit acest lucru, pentru asigurarea unui control curent. Nu există practic deosebiri, din acest punct de vedere, între transmiterea diferențelor de nivel determinate prin cele două metode examinate în detaliu în cap. 17.

● Analog procedurii din cadrul rețelelor altimetrice se poate proceda și în cadrul rețelelor gravimetrice.

20.2. REDUCEREA OBSERVAȚIILOR GEODEZICE LA SUPRAFAȚA DE REFERINȚĂ

Înainte de a fi folosite în calcule, observațiile geodezice *se reduc inițial la suprafața de referință*.

Pentru calculul corecțiilor de reducere pe elipsoid a observațiilor geodezice este necesară determinarea prealabilă a ondulațiilor geoidului N și a componentelor *deviației* verticalei ξ, η după metodele prezentate în partea întîi a lucrării.

De obicei prelucrarea propriu-zisă a observațiilor geodezice se realizează în *planul de proiecție*. Pentru aceasta observațiile sînt corectate suplimentar, prin noi corecții care depind în primul rînd de caracteristicile proiecției folosite (v. 8.1.1.4.) și apoi de complexitatea lucrărilor din care fac parte observațiile respective. Studiul corecțiilor de reducere la planul de proiecție a observațiilor geodezice, precum și transformările de coordonate, care intervin de regulă în asemenea situații, este realizat în cadrul unei alte discipline din planul de învățămînt al secției de geodezie și anume *cartografia matematică* (*Calistru* și *Munteanu* 1975, *Groβman* 1976 ș.a.). În acest cadru se vor indica doar principial modalitățile de trecere a observațiilor geodezice de pe elipsoid în planul de proiecție.

20.2.1. REDUCEREA DETERMINĂRILOR ASTRONOMICE

Reducerea determinărilor astronomice fiind expusă parțial în 5.2.1., aici se vor face numai completările corespunzătoare.

20.2.1.1. **Reducerea coordonatelor astronomice.** Coordonatele astronomice pot fi transformate în coordonate geodezice cu relațiile (5-44) și respectiv (5-43), dacă se cunosc componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei:

$$B = \Phi - \xi_{ag}; \tag{5-44}$$

$$L = \Lambda - \eta_{ag} \sec \Phi. \tag{5-43}$$

După cum se știe, coordonatele astronomice sînt caracterizate prin erori de poziție cu mult mai mari decît erorile impuse coordonatelor geodezice, astfel încît relațiile (5-43) și (5-44) sînt utilizabile în scopul reducerii coordonatelor astronomice numai în cazul unor puncte de control, amplasate la distanțe mari, de ordinul sutelor de kilometri, între care se desfășoară rețelele geodezice de sprijin.

Transformarea coordonatelor geodezice B, L, în coordonate plane x, y este studiată la cursul de *cartografie matematică*.

20.2.1.2. **Reducerea azimutelor astronomice.** Din figura 5-2,a se observă că:

$$A = R + \beta; \quad \alpha = R_1 + \beta_1,$$

astfel încît:

$$A = \alpha + (\beta - \beta_1) + (R - R_1). \tag{20-7}$$

Pentru determinarea diferenței $(\beta - \beta_1)$ în funcție de elementele cunoscute, se scrie formula cosinusului unui unghi în triunghiul sferic $Z_g Z_a P$:

$$\cos \beta = \cos \beta_1 \cos (\Lambda - L) + \sin \beta_1 \sin (\Lambda - L) \sin \Phi,$$

care, în limitele aproximațiilor admise în 5.2.1. devine:

$$\beta - \beta_1 = (\Lambda - L) \sin \Phi = - \eta \operatorname{tg} \Phi. \tag{20-8}$$

În mod analog, se obține din triunghiul sferic $Z_g Z_a S_2'$:

$$R - R_1 = - \sin q \cos \zeta^0. \tag{20-9}$$

Mărimea q se poate exprima în funcție de cantități determinabile:

$$\sin q = \frac{u \sin R}{\sin \zeta^0},$$

rezultînd:

$$R - R_1 = (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} \zeta^0. \tag{20-10}$$

Introducînd relațiile (20-8) și (20-10) în formula inițială (20-7) rezultă:

$$A = \alpha - (\Lambda - L) \sin \Phi + (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} \zeta^0. \tag{20-11}$$

Determinările de azimut se fac, în general, în punctele rețelelor de dezvoltare a bazelor geodezice, între care există diferențe de nivel mici. În aceste condiții $\zeta^0 \to 90°$ și prin urmare $\operatorname{ctg} \zeta^0 \approx 0$, rezultînd că mărimea ultimului termen este mai mică în raport cu cea a penultimului termen din relația (20-11), astfel încît se poate scrie:

$$A \approx \alpha - (\Lambda - L) \sin \Phi = \alpha - \eta \operatorname{tg} \Phi. \tag{20-12}$$

Aceasta este cunoscuta ecuație *Laplace*, folosită în trecut în calculele de prelucrare a rețelelor de triangulație de ordin superior.

Pentru mai multă exactitate, relațiile (20-11) și (20-12) trebuie completate cu corecția azimutală datorată altitudinii punctului vizat (v. 20.2.2.2.).

O b s e r v a ț i e. Cunoașterea componentelor deviațiilor verticalelor în punctele rețelei de triangulație presupune efectuarea observațiilor astronomo-gravimetrice, cecea ce ridică mult costul total al lucrărilor, limitînd aproape întotdeauna aplicarea corecțiilor respective ***numai la rețelele de triangulație de ordin superior.***

Trecerea de la *azimutul Laplace* A_{ij}, al curbei dintre punctul P_i și punctul P_j, la orientarea (în plan) θ_{ij} a coardei dintre imaginile punctelor respective în planul de proiecție, se face cu formula:

$$\theta_{ij} = A_{ij} + \delta_{ij} - \gamma_i, \tag{20-13}$$

unde δ_{ij} sînt corecțiile de reducere la planul de proiecție a observațiilor unghiulare orizontale (așa-zisele corecții de reducere la coardă), iar γ_i — unghiul de convergență a meridianului în punctul P_i.

Elementele δ_{ij} și γ_i se determină cu formule studiate la *cursul de cartografie matematică*.

20.2.2. REDUCEREA OBSERVAȚIILOR AZIMUTALE

Pentru reducerea direcțiilor și unghiurilor azimutale pe elipsoidul de referință se aplică un număr de trei corecții specifice, la care se adaugă corecțiile de centrare și reducere.

20.2.2.1. **Corecția de reducere de la secțiunea normală directă la linia geodezică.** Uzual corecția se numește „corecție de linie geodezică" și se poate calcula cu formula dedusă în 6.4.4.:

$$c_1^{cc} = -K_1 (s_{km})^2 \sin 2A. \tag{6-129}$$

Coeficientul K_1 se extrage din tabelul 6-5, s fiind lungimea liniei geodezice. Deoarece corecția are valori mici, lungimea s poate fi înlocuită cu lungimea corespondentă în plan, determinată preliminar (v. 20.1.).

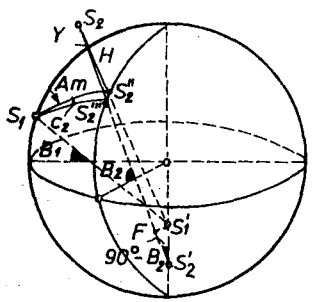


Fig. 20-3. Corecția datorată altitudinii punctului vizat.

20.2.2.2. **Corecția datorată altitudinii punctului vizat.** Din punctul S_1, presupus proiectat pe elipsoidul de referință (figura 20-3) cu ajutorul normalei $S_1\ S_1'$, se vizează punctul S_2 situat la altitudinea elipsoidică H. Planul de vizã (în ipoteza că normala la elipsoid coincide cu verticala locului), format de normala S_1S_1' și punctul vizat, intersectează elipsoidul de referință după secțiunea S_1S_2'' de azimut A_m. Proiecția punctului S_2 pe elipsoidul de referință fiind S_2'', va rezulta o diferență între secțiunea S_1S_1'' și curba $S_1S_2^m$ (după care se efectuează calculele geodezice) reprezentată de corecția c_2. Deoarece această corecție este suficient de mică se pot accepta unele aproximații în determinarea ei:

$$c_2 \approx \frac{S_2''' S_2''}{s} \sin A = \frac{H\gamma^{rad}}{s} \sin A. \tag{20-14}$$

În continuare:

$$\gamma^{rad} = \frac{FS_1'}{S_2F} \approx \frac{FS_1'}{a} = \frac{\overline{S_1'S_2'} \cos B_1}{a}$$

și împreună cu formula (6-104):

$$\gamma^{rad} \approx e^2 (B_2 - B_1)^{rad} \cos^2 B_2 \approx e^2 \frac{s}{M_m} \cos A \cos^2 B_2. \tag{20-15}$$

Prin urmare corecția datorată altitudinii punctului vizat se va determina cu formula:

$$c_2^{cc} = K_2 H \sin 2A, \tag{20-16}$$

unde coeficientul:

$$K_2 = \frac{e^2}{2} [1]_m \cos^2 B_2, \tag{20-17}$$

poate fi extras din tabelul 6-5, în funcție de latitudinea punctului vizat. Atît din formula (20-16), cît și din figura 20-3 se observă că această corecție nu depinde de altitudinea punctului de stație, ci doar de altitudinea punctului vizat, de unde și numele corecției. În cazul punctelor situate pe același meridian sau pe același paralel ($A = 100^g$ și respectiv $A = 0^g$), corecția este zero.

20.2.2.3. **Corecția datorată deviației verticalei.** Din examinarea relației (20-11) se constată că termenul corectiv total la măsurătorile azimutale dintr-o stație este format din următoarele părți componente:

$$-(\Lambda - L) \sin \Phi;\ (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} \zeta^0.$$

Prima componentă este o funcție numai de poziția punctului de stație, avînd aceeași contribuție pentru toate azimutele și direcțiile azimutale care se măsoară în punctul considerat.

În schimb, cea de a doua componentă cuprinde atît influența deviației verticalei în punctul de stație ξ, η, cît și influența azimutului și unghiului zenital ale direcției spre punctul vizat. Astfel, această componentă, variabilă de la o direcție azimutală la alta, constituie cea de a treia corecție care trebuie aplicată observațiilor unghiulare orizontale:

$$c_3^{cc} = (\eta^{cc} \cos A - \xi^{cc} \sin A) \operatorname{ctg} \zeta^0. \tag{20-18}$$

Unghiurile zenitale necesare se calculează în funcție de diferența de nivel ΔH, existentă între punctul de stație și punctul vizat:

$$\operatorname{ctg} \zeta = \frac{\Delta H}{D}, \tag{20-19}$$

diferența de nivel fiind determinată fie prin nivelment geometric, fie prin nivelment trigonometric, însă la distanțe mici (laturi de 1—4 km).

În tabelul 20-2 se prezintă valorile pe care le poate căpăta corecția c_3 în funcție de diverse azimute și distanțe zenitale, considerîndu-se valorile medii $\xi_m = 6^{cc}$, 513 și $\eta_m = 2^{cc}$, 881, determinate din circa 40 de puncte răspîndite uniform pe teritoriul țării noastre.

Tabelul 20-2

ζ^g \ A^g	0	50	100	150	200	250	300	350
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
20	+8cc,865	−7cc,901	−20cc,209	−20cc,436	−8cc,865	+7cc,901	+20cc,209	+20cc,436
40	+3cc,963	−3,532	−8,959	−9,136	−3,963	+3,532	+8,959	+9,136
60	+2cc,094	−1,866	−4,733	−4,827	−2,094	+1,866	+4,733	+4,827
80	+0cc,936	−0,834	−2,116	−2,158	−0,936	+0,834	+2,116	+2,158
90	+0cc,433	−0,386	−0,979	−0,998	−0,433	+0,386	+0,979	+0,998
99g50	+0cc,022	−0cc,020	−0cc,051	−0cc,052	−0cc,022	+0cc,020	+0cc,051	+0cc,052

20.2.2.4. **Corecţii de centrare şi reducere.** Datorită unor imperfecţiuni inerente de construcţie a semnalelor geodezice, precum şi datorită influenţei condiţiilor atmosferice, observaţiile unghiulare reduse la suprafaţa elipsoidului trebuie *centrate*, prin aplicarea unor corecţii corespunzătoare, în cadrul *tuturor* reţelelor de triangulaţie (indiferent de ordinul sau mărimea reţelei).

Se consideră rezultatul obţinut pe foaia de centrare întocmită în punctul de triangulaţie P (fig. 20-4) şi se acceptă că între acest punct şi punctul de triangulaţie P_1 există legătură reciprocă.

Se notează cu M direcţiile măsurate pe pilastrul I al punctului P şi reduse, în prealabil, pe direcţia de referinţă R, în raport cu care s-au determinat elementele de centrare.

Deoarece borna C şi pilastrul I nu se află pe aceeaşi verticală, în loc să se măsoare direcţia α s-a măsurat direcţia M. Se observă că:

$$\alpha = M + c. \tag{20-20}$$

Corecţiile c se numesc *corecţii de centrare*. Din triunghiul CP_1I se deduce:

$$\frac{\sin c}{l} = \frac{\sin (\theta + M)}{D}. \tag{20-21}$$

Cu D s-a notat distanţa PP_1, cunoscută din calculele preliminare, în raport cu care elementele de excentricitate l şi l_1 sînt infinit mici, astfel încît se poate scrie:

$$c^{cc} = \rho^{cc} \frac{l \sin (\theta + M)}{D}. \tag{20-22}$$

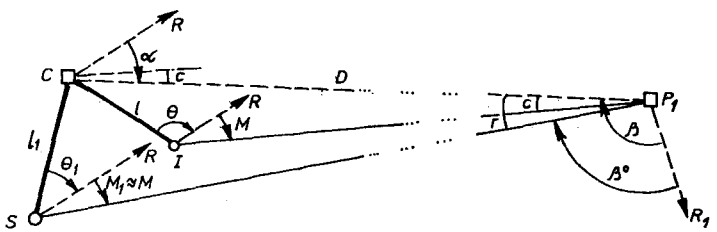


Fig. 20-4. Corecţii de centrare şi reducere.

Deoarece borna C şi punctul S vizat din punctul P_1 nu se află pe aceeaşi verticală, direcţia β^0 măsurată în P_1 (în raport de o anumită direcţie de referinţă R_1) va trebui corectată cu o corecţie r, denumită uzual *corecţie de reducere*, pentru a nu se confunda cu corecţia de centrare propriu-zisă:

$$\beta = \beta^0 + r. \tag{20-23}$$

Din triunghiul CP_1S rezultă analog:

$$r^{cc} = \rho^{cc} \frac{l_1 \sin (\theta_1 + M)}{D}. \tag{20-24}$$

Aproximaţia folosită $M_1 \approx M$ nu introduce erori superioare celor cu care s-au determinat elementele de centrare θ şi θ'.

O b s e r v a ţ i i. 1. Corecţiile de reducere calculate cu elementele de centrare ale punctului P se vor aplica observaţiilor din punctul P_1.

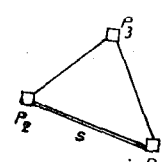
2. Situaţii mai deosebite prezintă centrarea observaţiilor azimutale efectuate pe turnuri, care solicită mai multe operaţii (*Ghiţău* 1972 pg. 248).

3. Un exemplu de calcul complet privind reducerea pe elipsoid şi centrarea direcţiilor azimutale este dat în tabelele 20-3...20-8, avîndu-se în vedere punctele P_1, P_2 şi P_3 reprezentate schematic în tabelul 20-4. Tabelul 20-3 cuprinde datele iniţiale, tabelul 20-4

Tabelul 20-3

Staţia	Punct vizat	Direcţii măsurate şi compensate în staţie g	c	cc	Azimutul geodezic A g	c	cc	Longitudinea geodezică B °	′	Lungimea liniei geodezice s (m)	Altitudinea H (m)	Componentele deviaţiei verticalei ξ (cc)	η (cc)
P_1	P_2	25	46	76,25	100	56c	40cc	45	18	20 518,315	1 768	+5,72	−2,34
	P_3	75	64	49,98									
P_2	P_3	215	65	34,19				45	18		648	+4,38	−3,75
	P_1	295	50	54,04									
P_3	P_1	108	34	56,74				45	10		1 018	+3,67	−5,83
	P_2	178	31	59,38									

Tabelul 20-4

Schiţa triunghiului	Unghi aproximativ g	c	cc	Corecţie aproximativă	Unghi corectat g	c	cc	Lungimea laturii (m)	Denumirea laturii
	50	17	73,7	+1,3	50	17	75,0	16 332,6	2−3
	79	85	19,8	+1,3	79	85	21,1	21 889,7	1−3
	69	97	02,6	+1,3	69	97	03,9	20 518,3	1,2
	199	99	96,1	+1,3	200	00	00	Modul =23 033,69	

conține calculul preliminar al lungimii laturilor, tabelele 20-5 și 20-6 corecțiile de centrare și reducere, iar tabelele 20-7 și 20-8 celelalte trei corecții specifice și centralizarea rezultatelor.

4. Pentru prelucrarea direcțiilor orizontale în planul de proiecție se aplică în continuare corecții de reducere la coardă δ_{ij} (v. 20.2.1.2.).

Tabelul 20-5

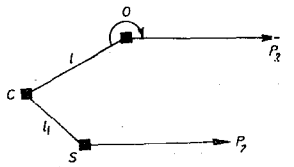
Denumirea punctului: P_1

$l = 11{,}8$ cm $\quad l_1 = 6{,}8$ cm

$\theta = 240^g 68^c$ $\quad \theta_1 = 201^g 28^c$

$l\rho^{cc} = 75121$ $\quad l_1\rho^{cc} = 43290$

$$c^{cc} = \frac{l \sin (\theta + M)}{D} \cdot \rho^{cc}$$



Corecția	Punctul vizat	Direcții M g	c	cc	$\theta + M$ g	c	cc	D (m)	$\sin(\theta + M)$	$l\rho^{cc}$	Corecția (cc)
c	P_2	0	00	00	240	68	00	20 518,3	−0,596393	75 121	−2,183
	P_3	50	17	73	290	85	73	21 889,7	−0,989705		−3,478
r	P_2	0	00	00	201	28	00	20 518,3	−0,020105	43 290	−0,042
	P_3	50	17	73	251	45	73	21 889,7	−0,723107		−1,430

Tabelul 20-6

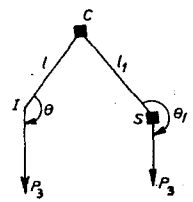
Denumirea punctului: P_2

$l = 9{,}8$ cm $\quad l_1 = 38{,}0$ cm

$\theta = 161^g 68^c$ $\quad \theta_1 = 282^g 18^c$

$l\rho^{cc} = 62388$ $\quad l_1\rho^{cc} = 241916$

$$c^{cc} = \frac{l \sin (M + \theta)}{D} \cdot \rho^{cc}$$



Corecția	Punctul vizat	Direcții M g	c	cc	$\theta + M$ g	c	cc	D (m)	$\sin(\theta + M)$	$l\rho^{cc}$	Corecția (cc)
c	P_3	0	00	00	161	68	80	16 332,6	+0,566234	62 388	+1,722
	P_1	79	85	20	241	53	20	20 518,3	−0,607082		−1,846
r	P_3	0	00	0	282	18	00	16 332,6	−0,961079	241 916	−14,235
	P_1	79	85	20	362	03	20	20 518,3	−0,561668		−6,622

Tabelul 20-7

Stația	Punctul vizat	Latitudini geodezice B_1 °	′	B_2 °	′	B mediu °	′	Componentele deviației verticalei ξ (cc)	η (cc)	Coeficienți din tabele K_1 $10^4 K_1$	K_2 $10^4 K_2$	Azimutul geodezic A g	c	cc	Distanța D' [km]	Altitudinea punctului vizat H_2 [m]	Diferența de nivel Δh [m]	Corecții c_1 [cc]	c_2 [cc]	c_3 [cc]
P_1	P_2	45	18	45	18	45	18	+5,72	−2,34	4,31	1,65	100	56	40	20,518	648	−1120	0,000	−0,002	0,311
	P_3			45	10	45	14			4,32	1,66	150	74	13	21,890	1018	− 750	0,002	−0,169	0,080
P_2	P_3			45	10	45	14	+4,38	−3,75	4,32	1,66	220	71	20	16,333	1018	370	−0,001	0,102	0,112
	P_1	45	18	45	18	45	18			4,31	1,65	300	56	40	20,518	1768	1120	0,000	−0,005	0,207
P_3	P_1			45	18	45	14	+3,67	−5,83	4,32	1,66	350	74	13	21,890	1768	750	0,002	−0,293	−0,055
	P_2	45	10	45	18	45	14			4,32	1,66	20	71	20	16,333	648	− 370	−0,001	0,065	0,152

Tabelul 20-8

Stația	Punctul vizat	Direcții măsurate și compensate în stație g	c	cc	Corecții de reducere la elipsoid c (cc)	r (cc)	c_1 (cc)	c_2 (cc)	c_3 (cc)	Direcții reduse la elipsoid g	c	cc
P_1	P_2	25	46	76,25	−2,183	−6,622	0,000	−0,002	0,311	25	46	67,754
	P_3	75	64	49,98	−3,478	0,000	0,002	−0,169	0,080	75	64	46,415
P_2	P_3	215	65	34,19	1,722	0,000	−0,001	0,102	0,112	215	65	36,125
	P_1	295	50	54,04	−1,846	−0,042	0,000	−0,005	0,207	295	50	52,354
P_3	P_1	108	34	56,74	0,000	−1,430	0,002	−0,293	−0,055	108	34	54,964
	P_2	178	31	59,38	0,000	−14,235	−0,001	0,065	0,152	178	31	45,361

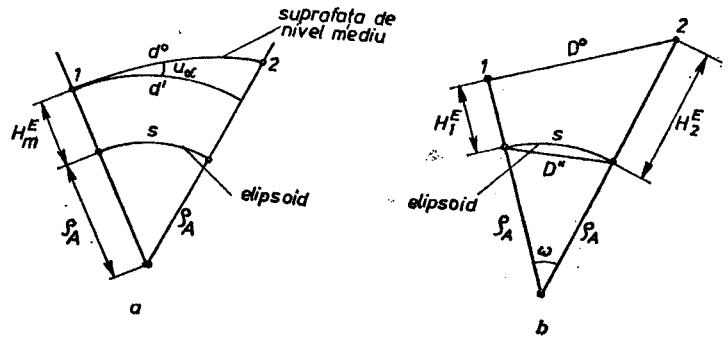


Fig. 20-5. Reducerea distanțelor pe elipsoid:
a — baze geodezice; *b* — lungimi măsurate cu instrumente electronice.

20.2.3. REDUCEREA DISTANȚELOR PE ELIPSOID

După cum s-a menționat în cap. 18, procesele tehnologice de obținere a distanțelor necesare în rețelele geodezice diferă în funcție de categoria de aparate utilizate. Ca urmare, rezultatele obținute prin calcule de prelucrare preliminară au semnificații diferite, astfel încît trebuie examinate separat.

20.2.3.1. **Reducerea bazelor geodezice măsurate cu firul invar.** Lungimea bazei geodezice d^0, măsurată cu firul invar și prelucrată în prealabil (18.2.4.), rezultă ca fiind redusă la o suprafață de nivel mediu, situată la altitudinea $H_m = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$, unde H_1 și H_2 sînt altitudinile capetelor bazei (fig. 20-5, *a*).

Pentru reducerea, în continuare, a bazei la elipsoid se poate proceda astfel:

— se reduce, pentru început, distanța d^0 la o suprafață paralelă cu elipsoidul, situată la altitudinea elipsoidică $H_m^E = \frac{1}{2}(H_1^E + H_2^E)$. Suprafața elipsoidului poate fi înlocuită cu *sfera medie Gauss*, de rază ρ_A, determinată cu relația (6-98), în funcție de latitudinea medie B_m a celor două puncte considerate, precum și de azimutul bazei geodezice A. Din figura 20-5, *a* rezultă:

$$d' = d^0 \cos u_\alpha , \tag{20-25}$$

unde:

$$u_\alpha = \xi_m \cos\alpha + \eta_m \sin\alpha; \tag{20-26}$$

$$\xi_m = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2);\ \eta_m = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2); \tag{20-27}$$

— baza s redusă la nivelul elipsoidului rezultă apoi din relația:

$$\frac{s}{\rho_A} = \frac{d'}{\rho_A + H_m^E}. \tag{20-28}$$

Altitudinile elipsoidice H_1^E și H_2^E necesare se obțin cu relațiile (4-37), fiind necesară cunoașterea ondulațiilor geoidului în capetele bazei.

Din dezvoltarea în serie a rețelei de mai înainte rezultă formula căutată:

$$s = d'\left[1 - \frac{H_m^E}{\rho_A} + \left(\frac{H_m^E}{\rho_A}\right)^2 - \ldots\right]. \tag{20-29}$$

20.2.3.2. **Reducerea distanțelor măsurate cu aparate electronice.** Se presupune că distanțele măsurate cu aparate electronice au fost corectate, în prealabil, cu așa-numitele *corecții fizice*, dependente de tipul concret de instrument folosit și de condițiile meteorologice existente în timpul măsurării (*Atudorei* 1981). Distanța D^0 rezultată după această operație este situată la nivelul celor două puncte, între care s-a efectuat măsurătoarea.

Din figura 20-5, *b* rezultă:

$$(D^0)^2 = (\rho_A + H_1^E)^2 + (\rho_A + H_2^E)^2 - 2(\rho_A + H_1^E)(\rho_A + H_2^E)\cos\omega. \tag{20-30}$$

Dacă se introduc:

$$\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2};\quad D'' = 2\rho_A \sin\frac{\omega}{2};\quad \Delta H_{12}^E = H_2^E - H_1^E, \tag{20-31}$$

se obține, prin dezvoltări simple:

$$(D^0)^2 = (\Delta H_{12}^E)^2 + \left(1 + \frac{H_1^E}{\rho_A}\right)\left(1 + \frac{H_2^E}{\rho_A}\right)(D'')^2. \tag{20-32}$$

De aici rezultă, ca valoare intermediară, lungimea coardei D'':

$$D'' = \sqrt{\frac{(D^0)^2 - (\Delta H_{12}^E)^2}{\left(1 + \frac{H_1^E}{\rho_A}\right)\left(1 + \frac{H_2^E}{\rho_A}\right)}}. \tag{20-33}$$

Lungimea arcului s, care reprezintă lungimea laturii măsurate reduse la suprafața elipsoidului, se obține cu formula:

$$s = 2\rho_A \operatorname{arc}\sin\frac{D''}{2\rho_A}. \tag{20-34}$$

Din examinarea formulelor finale se observă că nu este necesară, în acest caz, cunoașterea deviațiilor verticalelor în punctele *1* și *2*, așa cum a fost cazul la reducerea bazelor măsurate cu firul invar.

Observații. 1. Reducerea distanțelor măsurate direct la suprafața elipsoidului de referință presupune cunoașterea cît mai exactă a unor elemente suplimentare, fără de care se produce o diminuare a preciziei obținute la măsurarea propriu-zisă și anume:

— latitudinile punctelor considerate B_1 și B_2;

— azimutul geodezic A al lungimii măsurate;

— altitudinile elipsoidice H_1^E și H_2^E și deci ondulațiile geoidului N_1 și N_2 în aceste puncte.

Aceste elemente suplimentare se determină în diverse stadii ale prelucrării observațiilor geodezice într-o rețea dată. Pentru început este necesară, de exemplu, înlocuirea mărimilor raportate la elipsoid B, L, A, H^E cu mărimile naturale corespondente Φ, Λ, α, H^{OR} de care se dispune, eventual, urmînd ca în mod iterativ să se determine, atît elementele necesare suplimentare, cît și reducerile propriu-zise. Pentru ilustrarea ordinului de mărime a acestor *influențe indirecte*, a elementelor suplimentare asupra mărimii reduse, se prezintă în continuare un exemplu concret pe două distanțe din *Poligonul geodezic național*, care este o realizare cu totul remarcabilă a *Direcției topografice militare*.

Tabelul 20-9

De la punctul ... La punctul ...	Coordonate astronomice Φ °	′	″	Λ °	′	″	Altitudinea normală H^N [m]	Ondulația cvasigeoidului ζ [m]	Azimutul astronomic α g	c	cc	Distanța măsurată D^o [m]
P_1	45	07	11,812	23	32	41,250	750,68	4,4	195	43	50,245	28 651,829
P_2	44	51	54,062	23	34	08,812	83,84	4,8				
P_2	44	51	54,062	23	34	08,812	83,84	4,8	54	72	78,580	25 146,958
P_3	45	00	45,687	23	48	39,125	94,30	4,3				

Se au în vedere distanțele măsurate prezentate în tabelul 20-9, unde s-au trecut și celelalte date inițiale avute la dispoziție.

Calculul reducerilor distanțelor se efectuează cu formulele (20-33) și respectiv (20-34) însă în mai multe variante, în funcție de modalitatea de determinare a elementelor suplimentare necesare (tabelul 20-10). Raza medie de curbură R_m s-a calculat cu formula (6-93), utilizînd latitudinea medie B_m a celor două puncte geodezice considerate, iar pentru raza de curbură ρ_A a secțiunii de azimut A s-a folosit relația (6-98).

Varianta 1 de calcul a distanței s pe elipsoid se caracterizează prin faptul că în formulele menționate azimutul geodezic A și coordonatele geodezice B, L, nefiind încă determinate, sînt înlocuite de mărimile astronomice corespondente: α, Φ și Λ. Această înlocuire este evident ortuită în stadiul incipient al calculelor.

Varianta 2 de determinare a distanței s pe elipsoid este realizată prin utilizarea elementelor geodezice provizorii $A°$, $B°$, $L°$, obținute (în cazul considerat) după două iterații.

Varianta 3 este realizată după cunoașterea valorilor compensate pentru azimutul și coordonatele geodezice: A, B, L.

De menționat că în toate aceste trei variante nu s-a ținut seama de ondulațiile cvasigeoidului, întrucît acestea se determină într-o etapă mai evoluată a prelucrării datelor geodezice.

Varianta 4 este similară cu *varianta* 3, cuprinzînd în plus și ondulațiile cvasigeoidului.

Varianta 5 a fost introdusă pentru a ilustra influențele pe care le au erorile în determinarea altitudinilor asupra distanțelor reduse. Calculele în această variantă se desfășoară ca în *varianta* 4 ,cu deosebirea că s-au modificat altitudinile punctelor considerate cu $+10$ cm și respectiv -10 cm (ceea ce se înscrie în limitele cu care sînt cunoscute altitudinile determinate prin nivelment trigonometric). Se observă că influența acestor erori este mai mare în cazul distanței căreia îi corespunde o diferență de nivel mai mare.

2. Pentru prelucrarea în planul de proiecție este necesară aplicarea unor corecții suplimentare dependente de proiecția considerată (*Calistru* și *Munteanu* 1975).

3. Distanțele reduse la elipsoid sau la planul de proiecție sînt centrate pe punctele de stație prin aplicarea unor corecții care sînt examinate la cursul *măsurători geodezice prin unde* (*Atudorei* 1981).

20.3. COORDONATE ȘI ELEMENTE PROVIZORII

După reducerea și centrarea tuturor observațiilor efectuate în rețeaua geodezică la o suprafață de referință unitară (elipsoidul de referință sau planul de proiecție) se determină o nouă serie de coordonate, denumite *coordonate provizorii* după metodologia descrisă în 20.1. Aproximația de

Tabelul 20—10

Varianta	De la punctul ... La punctul ...	Coordonate geodezice B °	′	″	L °	′	″	Azimutul geodezic A g	c	cc	Raze de curbură R_m [m]	ρ_A [m]	Altitudinea normală H^N [m]	Ondulația cvasigeoidului ζ [m]	Distanța redusă pe elipsoid s [m]
1	P_1	45	07	11,812	23	32	41,250	195	43	50,245	6 378 203,405	6 367 637,202	750,68	—	28 642,585
	P_2	44	51	54,062	23	34	08,812						83,84	—	
	P_2	44	51	54,062	23	34	08,812	54	72	78,580	6 378 163,312	6 379 809,090	83,84	—	25 146,947
	P_3	45	00	45,687	23	48	39,125						94,30	—	
2	P_1	45	07	11,812	23	32	41,250	195	45	67,401	6 378 202,624	6 367 635,966	750,68	—	28 642,209
	P_3	44	51	45,364	23	34	14,692						83,84	—	
	P_2	44	51	46,364	23	34	14,692	55	81	85,408	6 378 160,414	6 380 104,994	83,84	—	25 146,616
	P_3	45	00	25,272	23	48	34,832						94,30	—	
3	P_1	45	07	13,151	23	32	37,288	195	45	67,401	6 378 202,624	6 367 635,966	750,68	—	28 642,209
	P_3	44	51	47,707	23	34	10,769						83,84	—	
	P_2	44	51	47,707	23	34	10,769	54	70	83,055	6 377 883,345	6 379 480,139	83,84	—	25 146,614
	P_3	45	00	38,460	23	48	40,784						94,30	—	
4	P_1	45	07	13,151	23	32	37,288	195	45	67,673	6 378 202,906	6 367 635,407	750,68	4,4	28 642,197
	P_2	44	51	47,707	23	34	10,769						83,84	4,8	
	P_2	44	51	47,707	23	34	10,769	54	89	77,121	6 378 162,961	6 379 802,210	83,84	4,8	25 146,596
	P_3	45	00	38,460	23	38	40,784						94,30	4,3	
5	P_1	45	07	13,151	23	32	37,288	195	45	67,673	6 378 202,906	6 367 635,407	750,78	4,4	28 642,193
	P_2	44	51	47,707	23	34	10,769						83,74	4,8	
	P_2	44	51	47,707	23	34	10,769	54	89	77,121	6 378 162,961	6 379 802,210	83,74	4,8	25 146,596
	P_3	45	00	38,460	23	38	40,784						94,30	4,3	

calcul este îmbunătățită în raport cu coordonatele preliminarii (în general $\pm$ 0'', 0001 pentru coordonatele geodezice provizorii, notate B^0 și L^0, și $\pm$ 0,001 m sau $\pm$ 0,01 m pentru coordonatele plane provizorii, notate x^0 și y^0).

Coordonatele provizorii și celelalte elemente derivate din acestea: A^0 și s^0 (azimutul provizoriu și respectiv lungimea provizorie a liniei geodezice pe elipsoidul de referință) sau θ^0 și D^0 (orientarea provizorie și respectiv lungimea provizorie în planul de proiecție) constituie elemente de bază în structura modelului funcțional folosit în prelucrarea observațiilor geodezice.

20.4. PONDERILE OBSERVAȚIILOR GEODEZICE

În cadrul prelucrării preliminare a observațiilor efectuate în rețelele geodezice este necesară *stabilirea ponderilor acestor observații și eventual, a corelațiilor existente între elementele care intervin în prelucrarea riguroasă.*

20.4.1. DETERMINAREA MATRICEI PONDERILOR

Condiția generală de minim sub care se desfășoară prelucrarea propriu-zisă, denumită uzual *compensarea observațiilor geodezice*, a fost definită în cap. 9:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \longrightarrow \text{minim}, \tag{9-31}$$

unde:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_M^{-1}. \tag{9-13}$$

Matricea ponderilor $\mathbf{P}$, precum și matricea cofactorilor măsurătorilor geodezice $\mathbf{Q}_M$ sînt matrice pozitiv definite, cu termeni pătratici și dreptunghiulari în structura lor. Determinarea acestor matrice constituie, în stadiul actual, deziderate care rămîn doar parțial îndeplinite deoarece ar presupune un volum mare de calcule și, în unele cazuri, de operațiuni de teren suplimentare și, evident, costisitoare. Un exemplu de determinare a matricei ponderilor a fost prezentat în cadrul rețelelor de nivelment geometric (v. 17.1.4.3.). Caracterul lucrării de față nu oferă posibilitatea abordării și altor aspecte similare, pentru alte tipuri de rețele geodezice.

Trebuie menționat însă că *în covîrșitoarea majoritate* a rezolvărilor actuale *este acceptată independența observațiilor geodezice* [v. relația (9-14)], astfel încît matricele ponderilor care intervin în prelucrări au forma (9-16), iar condiția de minim devine:

$$[p\, v\, v] \longrightarrow \text{minim}. \tag{9-32}$$

Nu rareori, din motive de simplificare a prelucrării, se acceptă nu numai independența observațiilor, ci, acestea *sînt considerate de precizii egale*:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n, \tag{20-35}$$

astfel încît condiția de minim este:

$$[v\, v] \longrightarrow \text{minim}. \tag{20-36}$$

Condițiile de minim (9-31), (9-32), (20-36), componente principale ale modelului stochastic al compensării, reflectă trei trepte de exactitate sau de aproximație, care intervin în prelucrările geodezice.

20.4.2. POSIBILITĂȚI DE CALCUL AL PONDERILOR

În continuare se vor prezenta cîteva posibilități de calcul al ponderilor observațiilor geodezice.

20.4.2.1. **Estimarea ponderilor în funcție de erorile medii de măsurare.** În cadrul părții a patra a manualului, unde au fost expuse aparatele și metodele de măsurare în rețelele geodezice, au fost făcute considerații referitoare la precizia interioară de măsurare din care se pot deduce elementele necesare estimării ponderilor acestor măsurători cu relații derivate din formula de definiție (9-17).

20.4.2.1.1. *Observații unghiulare orizontale.* Ponderile pot fi calculate în funcție de erorile s'_α ale unei direcții compensate în stație cu formula:

$$p_\alpha = \text{constant}/(s'_\alpha)^2, \tag{20-37}$$

urmînd ca vizele din stația considerată, să aibă, toate, aceeași pondere.

20.4.2.1.2. *Observații unghiulare zenitale.* Uzual sînt folosite relațiile: (17-64) — (17-66), însă ar putea fi utilizată o relație similară cu (20-37)

$$p_\zeta = \text{constant}/(s'^0_{\zeta m})^2, \tag{20-38}$$

unde $s'^0_{\zeta m}$ se determină cu relația (17-68).

20.4.2.1.3. *Diferențe de nivel geometric.* În mod curent se utilizează relația (17-23) și rareori, așa cum s-a specificat, relația (17-26).

20.4.2.1.4. *Diferențe de gravitate.* Deoarece se face un număr repetat de măsurători în fiecare stație, determinarea finală rezultînd din medierea acestora, ponderea ar putea fi estimată în funcție de eroarea medie aritmetică cu o relație similară cu (20-38).

20.4.2.1.5. *Distanțe.* Atît în cazul bazelor geodezice (18.2), cît și al distanțelor măsurate cu aparate electronice există posibilități similare de determinare a ponderilor cu formule de forma (20-38).

Observație. Unele aspecte privind determinarea ponderilor se prezintă în Anexa 6.

20.4.2.2. **Estimarea ponderilor în funcție de numărul de măsurători.** Ponderile pot fi considerate direct proporționale cu numărul n de observații efectuate asupra mărimilor ce se măsoară [a se compara relațiile (9-16) și respectiv (10-18)]. În ipoteza: $s'_0 = 1$; $s'_{10} = s'_{20}$ ..., rezultă:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots = n_1 : n_2 : n_3 = \ldots \quad . \tag{20-39}$$

În acest fel se pot partaja măsurătorile de același gen însă măsurate diferit în interiorul unei rețele geodezice.

20.4.2.3. **Estimarea ponderilor în funcție de prelucrări preliminare separate.** În cadrul unei rețele geodezice complexe, în care s-au efectuat diverse genuri de măsurători (de exemplu observații unghiulare și respectiv măsurări de distanțe) se pot efectua prelucrări preliminare separate, pe genuri distincte de măsurători, urmînd ca în încheierea fiecărei prelucrări să se obțină estimări mult mai exacte asupra ponderilor decît în stadiul inițial (a se vedea 9.2.4. și 9.3.3.). Aceste informații sînt folosite, în continuare, la prelucrarea globală, a tuturor observațiilor existente în rețeaua geodezică (v. 20.4.3.).

Alte posibilități de estimare a ponderilor pot fi urmărite în vechea ediție a manualului (*Ghițău* 1972, p. 261).

20.4.3. DETERMINAREA PONDERILOR GRUPELOR DE MĂSURĂTORI

Analizînd modalitatea în care se stabilesc ponderile înainte de compensare, *F.R. Helmert* (1924) intuiește pentru prima oară necesitatea verificării, după compensare, a ipotezelor acceptate inițial, în special în ceea ce privește *ponderile grupelor de observații*. În această categorie se includ, de exemplu, în cazul rețelelor de triangulație, trei grupe de observații și anume: direcții orizontale α, distanțe D, azimute A. Pentru aceste grupe este necesară determinarea unor coeficienți de pondere globali P_α, P_D, P_A (cu care să se multiplice corespunzător ponderile inițial admise pentru observațiile incluse în aceste grupe).

F.R. Helmert elaborează procedeul direct, riguros, de evaluare a raportului existent între ponderile diferitelor grupe de măsurători care sînt incluse într-o compensare globală. Este interesant de remarcat faptul că aceleași rezultate au fost obținute recent și pe alte căi.

Aplicarea practică a *procedeului Helmert*, precum și a altor procedee directe prezintă însă dificultăți, în special cînd numărul grupelor considerate este relativ mare. De aceea, în mod curent, se preferă determinarea rapoartelor P prin aproximații succesive, pornindu-se inițial de la formule de genul celor menționate în 20.4.2. O variantă aproximativă a procedeului riguros *Helmert* este obținută de *H. Wolf* (1968), care deduce următoarea relație de evaluare a ponderilor grupelor de măsurători (particularizată pentru cazul menționat):

$$P_\alpha : P_D : P_A = \frac{n_\alpha}{[pvv]_\alpha} : \frac{n_D}{[pvv]_D} : \frac{n_A}{[pvv]_A} . \tag{20-40}$$

Cu n_α, n_D și n_A s-au notat numărul de observații azimutale, de distanțe și respectiv azimute *Laplace* măsurate în rețeaua de triangulație.

Procedeul prin aproximații succesive cuprinde următoarele etape:

— se calculează după fiecare etapă de compensare valorile rapoartelor P cu formula (20-40). Pentru grupa care are raportul $n/[pvv]$ cel mai mic, se alege $P = 1$;

— se multiplică ponderile inițiale din grupele separate cu coeficientul P corespunzător grupei respective;

— cu noile ponderi se efectuează o nouă etapă de compensare.

Calculele se reiau în ciclul descris pînă cînd fiecare dintre coeficienții P are aceeași valoare, înainte și după compensare (abateri maxime de 5—10%).

20.4.4. OMOGENIZAREA (STANDARDIZAREA) CORECȚIILOR

Condiția (9-32) poate fi scrisă pentru rețelele de triangulație mai complexe, în care s-au măsurat valori unghiulare α, distanțe D și azimute A și sub forma următoare:

$$[p_\alpha v_\alpha v_\alpha] + [p_D v_D v_D] + [p_A v_A v_A] \longrightarrow \text{minim.} \tag{20-41}$$

Dacă se au în vedere și relații de tipul (20-37), condiția de minim (20-41) devine:

$$\left[\frac{v_\alpha}{s'_\alpha}\cdot\frac{v_\alpha}{s'_\alpha}\right] + \left[\frac{v_D}{s'_D}\cdot\frac{v_D}{s'_D}\right] + \left[\frac{v_A}{s'_A}\cdot\frac{v_A}{s'_A}\right] \longrightarrow \text{minim.} \tag{20-42}$$

Introducînd notațiile:

$$\tilde{v} = \frac{v}{s'} , \tag{20-43}$$

relația (20-42) se transformă în:

$$[\tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\alpha] + [\tilde{v}_D \tilde{v}_D] + [\tilde{v}_A \tilde{v}_A] \longrightarrow \text{minim.} \tag{20-44}$$

Corecțiile $\tilde{v}$ se numesc *standardizate* sau *omogenizate* și posedă următoarele caracteristici, care constituie în același timp avantaje pentru o compensare mai complexă:

— corecțiile $\tilde{v}$ sînt adimensionale (deoarece v și s se exprimă în aceleași unități de măsură), ceea ce simplifică calculele ulterioare, eliminînd necesitatea folosirii unor coeficienți de transformare în unele relații de calcul în care intervin elemente de diverse dimensiuni (metri, secunde ș.a.m.d.);

— corecțiile $\tilde{v}$ sînt toate de aceeași pondere, ceea ce reprezintă o simplificare a calculelor de compensare. În mod deosebit, acest avantaj se manifestă la compensarea pe grupe a rețelelor de triangulație naționale sau zonale, de precizii diferite.

Capitolul 21

PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR DIN REȚELELE DE TRIANGULAȚIE PRIN METODA OBSERVAȚIILOR INDIRECTE

Forma generală a modelului funcțional-stochastic care stă la baza prelucrării observațiilor efectuate în rețelele geodezice prin metoda observațiilor indirecte a fost prezentată în 9.1. și 9.2. În acest capitol se va examina în detaliu aplicarea acestor principii în cazul rețelelor de triangulație, ținînd seama de particularitățile acestora. Considerațiunile de ordin teoretic vor fi însoțite și de exemplificări numerice, avînd în vedere faptul că metoda are o largă aplicabilitate.

21.1. SISTEME ECHIVALENTE DE ECUAȚII ALE CORECȚIILOR

Două sisteme de ecuații ale corecțiilor se numesc echivalente dacă le corespund unul și același sistem de ecuații normale și, prin urmare, conduc la obținerea acelorași valori pentru necunoscutele pe care le conțin.

Se vor examina mai jos trei situații întîlnite foarte des în compensările rețelelor geodezice, cunoscute și sub denumirea de *reguli ale lui Schreiber*, care vor aduce importante simplificări de calcul la prelucrarea observațiilor în rețelele de triangulație.

Situația 1.

Se consideră următorul sistem de ecuații ale corecțiilor:

$$\begin{aligned}
&- dz + a_1\,dx_1 + b_1\,dx_2 + \ldots + u_1\,dx_u + l_1 = v_1 \quad \text{pondere } p_1;\\
&- dz + a_2\,dx_1 + b_2\,dx_2 + \ldots + u_2\,dx_u + l_2 = v_2 \quad \text{pondere } p_2;\\
&\qquad\ldots \qquad\qquad\ldots \qquad\qquad\ldots\\
&- dz + a_n\,dx_1 + b_n\,dx_2 + \ldots + u_n\,dx_u + l_n = v_n \quad \text{pondere } p_n.
\end{aligned} \tag{21-1}$$

Se observă că necunoscuta dz are coeficientul -1 în toate ecuațiile. *Sistemul (21-1) poate fi înlocuit printr-un sistem echivalent (21-2), care are un număr de n+1 ecuații, însă din care lipsește necunoscuta* dz:

$$\begin{aligned}
a_1\,dx_1 &+ b_1\,dx_2 + \ldots + u_1\,dx_u + l_1 = v_1' \text{ pondere } p_1;\\
a_2\,dx_1 &+ b_2\,dx_2 + \ldots + u_2\,dx_u + l_2 = v_2' \text{ pondere } p_2;\\
&\ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots\\
a_n\,dx_1 &+ b_n\,dx_2 + \ldots + u_n\,dx_u + l_n = v_n' \text{ pondere } p_n;\\
[pa]\,dx_1 &+ [pb]\,dx_2 + \ldots + [pu]\,dx_u + [pl] = [pv'] \text{ pondere } p_{n+1} = -\frac{1}{[p]}.
\end{aligned} \tag{21-2}$$

Ultima ecuație a sistemului (21-2) este denumită „ecuație sumă".

Pentru demonstrarea echivalenței urmărite, se formează sistemul de ecuații normale corespunzător sistemului (21-1):

$$\begin{aligned}
&[p]\,dz - [pa]\,dx_1 - [pb]\,dx_2 - \ldots - [pu]\,dx_u - [pl] = 0;\\
&-[pa]\,dz + [paa]\,dx_1 + [pab]\,dx_2 + \ldots + [pau]\,dx_u + [pal] = 0;\\
&\qquad\ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots\\
&-[pb]\,dz + [pab]\,dx_1 + [pbb]\,dx_2 + \ldots + [pbu]\,dx_u + [pbl] = 0;\\
&-[pu]\,dz + [pau]\,dx_1 + [pbu]\,dx_2 + \ldots + [puu]\,dx_u + [pul] = 0.
\end{aligned} \tag{21-3}$$

Se deduce necunoscuta dz din prima ecuație normală:

$$dz = \frac{[pa]}{[p]}\,dx_1 + \frac{[pb]}{[p]}\,dx_2 + \ldots + \frac{[pu]}{[p]}\,dx_u + \frac{[pl]}{[p]} \tag{21-4}$$

și se introduce în celelalte ecuații. În acest fel se obține:

$$\begin{aligned}
&\left\{[paa] - \frac{[pa][pa]}{[p]}\right\}dx_1 + \left\{[pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]}\right\}dx_2 + \ldots +\\
&\quad + \left\{[pau] - \frac{[pa][pu]}{[p]}\right\}dx_u + \left\{[pnl] - \frac{[pa][pl]}{[p]}\right\} = 0;\\
&\left\{[pab] - \frac{[pa][pb]}{[p]}\right\}dx_1 + \left\{[pbb] - \frac{[pb][pb]}{[p]}\right\}dx_2 + \ldots +\\
&\quad + \left\{[pbu] - \frac{[pb][pu]}{[p]}\right\}dx_u + \left\{[pbl] - \frac{[pb][pl]}{[p]}\right\} = 0;\\
&\qquad\ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots\\
&\left\{[pau] - \frac{[pa][pu]}{[p]}\right\}dx_1 + \left\{[pbu] - \frac{[pb][pu]}{[p]}\right\}dx_2 + \ldots +\\
&\quad + \left\{[puu] - \frac{[pu][pu]}{[p]}\right\}dx_u + \left\{[pul] - \frac{[pu][pl]}{[p]}\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{21-5}$$

Formînd direct ecuațiile normale ale sistemului (21-2), vor rezulta aceleași ecuații (21-5), ceea ce demonstrează echivalența căutată.

Situația 2.

Fie un sistem de ecuații ale corecțiilor, cu aceiași coeficienți ai necunoscutelor x, însă cu termenii liberi diferiți:

$$\begin{aligned}
a\,dx_1 &+ b\,dx_2 + \ldots + u\,dx_u + l_1 = v_1 \text{ pondere } p_1;\\
a\,dx_1 &+ b\,dx_2 + \ldots + u\,dx_u + l_2 = v_2 \text{ pondere } p_2;\\
&\ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots \qquad\quad \ldots\\
a\,dx_1 &+ b\,dx_2 + \ldots + u\,dx_u + l_k = v_k \text{ pondere } p_k.
\end{aligned} \tag{21-6}$$

Acest sistem este echivalent cu următoarea ecuație:

$$a\,dx_1 + b\,dx_2 + \ldots + u\,dx_u + \frac{[pl]}{[p]} = v'' \text{ pondere } [p], \tag{21-7}$$

în care termenul liber este media ponderată a termenilor liberi din sistemul (21-6).

Într-adevăr, sistemului (21-6) îi corespunde următorul sistem de ecuații normale:

$$\begin{aligned}
&aa[p]\,dx_1 + ab[p]\,dx_2 + \ldots + au[p]\,dx_u + a[lp] = 0;\\
&ab[p]\,dx_1 + bb[p]\,dx_2 + \ldots + bu[p]\,dx_u + b[lp] = 0;\\
&au[p]\,dx_1 + bu[p]\,dx_2 + \ldots + uu[p]\,dx_u + u[lp] = 0.
\end{aligned} \tag{21-8}$$

Ecuației (21-7) îi corespunde același sistem de ecuații normale.

Observație. Este de observat că această demonstrație este posibilă numai în situația în care *numărul total al ecuațiilor de erori rămîne mai mare ca numărul necunoscutelor.* Aceasta presupune că situația examinată se întîlnește într-un cadru mai general, într-o compensare în care intervin *mult mai multe* ecuații decît cele avute în vedere.

Situația 3.

Ecuația:

$$a\,dx_1 + b\,dx_2 + \ldots + u\,dx_u + l = v \text{ pondere } p \tag{21-9}$$

poate fi adusă la ponderea egală cu 1, dacă *întreaga ecuație* este multiplicată cu $\sqrt{p}$. Demonstrația acestei situații este cunoscută de la cursul de *teoria erorilor.*

Observație. Ecuația sumă din sistemul (21-2) se poate obține și prin utilizarea relației corespunzătoare din egalitățile (9-34) și anume $[pv]=0$, deoarece coeficienții necunoscutelor dz sînt egali cu (-1) în toate ecuațiile corecțiilor.

Pentru cazul în care observațiile sînt de aceeași precizie, adică $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, rezultă o relație folosită adesea:

$$[v] = 0. \tag{21-10}$$

21.2. DETERMINAREA VARIAȚIEI ORIENTĂRII ÎN FUNCȚIE DE VARIAȚIILE COORDONATELOR PLANE x, y

21.2.1. CAZUL GENERAL

Coordonatele provizorii ale punctelor noi $P_i\,(x_i^0,\ y_i^0)$, $P_j\,(x_j^0,\ y^0)$ (fig. 21-1), aflate în legătură directă și reciprocă într-o rețea de triangulație, vor primi prin compensare anumite corecții:

$$\begin{aligned}
x_i &= x_i^0 + dx_i; & x_j &= x_j^0 + dx_j;\\
y_i &= y_i^0 + y d_i; & y_j &= y_j^0 + dy_j
\end{aligned} \tag{21-11}$$

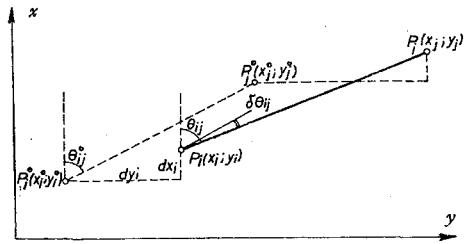


Fig. 21-1. Variația orientării în funcție de variațiile coordonatelor.

și, ca urmare, orientarea provizorie θ_{ij}^0 va primi o creștere $d\theta_{ij}$ care este funcție de corecțiile dx și dy ale punctelor considerate:

$$\theta_{ij} = \theta_{ij}^0 + d\theta_{ij}.$$

În sistemul de axe adoptat rezultă:

$$\operatorname{tg} \theta_{ij}^0 = \frac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0} = \frac{\Delta y_{ij}^0}{\Delta x_{ij}^0}.$$

din care, diferențiind, se obține:

$$\frac{d\theta_{ij}}{\cos^2 \theta_{ij}^0} = \frac{\Delta x_{ij}^0 (dy_j - dy_i) - \Delta y_{ij}^0 (dx_j - dx_i)}{(\Delta x_{ij}^0)^2}. \qquad (21\text{-}12)$$

Ținînd seama de formula (20-3) și introducînd notațiile:

$$a_{ij} = -\rho^{cc} \frac{\Delta y_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} = -\rho^{cc} \frac{\sin \theta_{ij}^0}{D_{ij}^0};$$
$$b_{ij} = \rho^{cc} \frac{\Delta x_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} = \rho^{cc} \frac{\cos \theta_{ij}^0}{D_{ij}^0}, \qquad (21\text{-}13)$$

se obține din relația (21-12):

$$d\theta_{ij}^{cc} = a_{ij}\, dx_j + b_{ij}\, dy_j - a_{ij}\, dx_i - b_{ij}\, dy_i. \qquad (21\text{-}14)$$

Coeficienții a_{ij} și b_{ij} se numesc *coeficienți de direcție*, deoarece prin intermediul lor se exprimă variația orientării pe unitatea de lungime considerată (coeficientul a pe axa x și coeficientul b pe axa y).

Observații. 1. Din motive practice, în triangulația de stat se consideră de obicei variația pe decimetru, iar D, Δx și Δy se exprimă în kilometri, astfel încît *formulele pentru uz curent* sînt (în cazul gradației centezimale) următoarele:

$$a_{ij} = -63{,}6620 \frac{(\Delta y_{ij}^0)_{km}}{(D_{km}^0)^2}; \quad b_{ij} = 63{,}6620 \frac{(\Delta x_{ij}^0)_{km}}{(D_{km}^0)^2}. \qquad (21\text{-}15)$$

În asemenea situații, corecțiile dx și dy rezultate din compensare vor fi exprimate tot în decimetri.

2. Analog, *pentru rețele de mici dimensiuni* (cu laturi de 1...4 km) se poate opera cu coeficienți de direcție de 100 de ori mai mici decît cei din relația (21-15) și, ca urmare, corecțiile dx și dy vor fi exprimate în milimetri.

3. Controlul calculelor coeficienților de direcție este dat de:

$$a_{ij}/b_{ij} = -\operatorname{tg} \theta_{ij}^0 \text{ sau } b_{ij}/a_{ij} = -\operatorname{ctg} \theta_{ij}^0. \qquad (21\text{-}16)$$

4. Din relațiile (21-13) rezultă:

$$a_{ij} = -a_{ji}; \quad b_{ij} = -b_{ji}. \qquad (21\text{-}17)$$

5. Deoarece $\theta_{ji}^0 = \theta_{ij}^0 + 200^g$, vom avea:

$$d\theta_{ij} = d\theta_{ji}. \qquad (21\text{-}18)$$

6. Formulele (21-11)...(21-18) se folosesc numai în situațiile în care axele de coordonate sînt orientate ca în figura 21-1, ceea ce este valabil pentru sistemele de proiecție oficial folosite în țara noastră. Pentru sisteme de proiecție cu orientarea inversă a axelor, formulele trebuie adaptate corespunzător (*Ghițău*, 1972, pg. 284).

21.2.2. CAZURI PARTICULARE

21.2.2.1. **Intersecția înainte.** Se consideră că punctul P_i este punct vechi, cu coordonate cunoscute, astfel încît $dx_i = dy_i = 0$ și, ca urmare, relația (21-14) devine:

$$d\theta_{ij}^{cc} = a_{ij}\, dx_j + b_{ij}\, dy_j. \qquad (21\text{-}19)$$

Este bine să se rețină și o regulă practică pentru deducerea semnelor coeficienților necunoscutelor dx_j și dy_j în cazul intersecției înainte: la orientarea θ_{ij}^0 se adaugă 100^g și semnele acestor coeficienți vor fi identice cu semnele pe care le au axele de coordonate în cadranul obținut (a pentru x și b pentru y).

21.2.2.2. **Intersecția înapoi.** Se consideră că punctul P_j este vechi, cu coordonate cunoscute, astfel încît $dx_j = dy_j = 0$ și, ca urmare, expresia (21-14) devine:

$$d\theta_{ij}^{cc} = -a_{ij}\, dx_i - b_{ij}\, dy_i. \qquad (21\text{-}20)$$

Aceasta este relația specifică intersecției înapoi, cînd $d\theta$ este calculat în punctul nou P_i.

Se poate reține și aici o regulă practică pentru deducerea semnelor coeficienților necunoscutelor dx și dy: la orientarea θ_{ij}^0 *se scade* 100^g și semnele acestor coeficienți vor fi identice cu semnele pe care le au axele de coordonate în cadranul obținut.

21.2.2.3. **Ambele puncte sînt noi.** Putem să privim acum cazul general, examinat inițial, ca o însumare a celor două cazuri particulare de mai sus. Se vor putea astfel aplica, pe rînd, cele două reguli practice privind stabilirea semnelor coeficienților necunoscutelor.

21.2.2.4. **Ambele puncte sînt vechi.** Avem evident $d\theta = 0$.

21.3. DETERMINAREA VARIAȚIEI AZIMUTULUI UNEI CURBE PE ELIPSOID ÎN FUNCȚIE DE VARIAȚIILE COORDONATELOR GEODEZICE B, L

Prin analogie cu formulele deduse în 21.2. se poate obține relația de exprimare a variației azimutului unei curbe pe elipsoid în funcție de variațiile coordonatelor geodezice ale punctelor situate la capetele sale:

$$B = B^0 + dB; \quad L = L^0 + dL; \quad A = A^0 + dA. \qquad (21\text{-}21)$$

În ipoteza unor lungimi $s < 60$ km, formulele (6-18) și (6-36) pot fi transformate în:

$$dx = M\, dB^{rad}; \quad dy = N \cos B\, dL^{rad}, \qquad (21\text{-}22)$$

astfel încît prin înlocuire corespunzătoare în (21-14) se obține:

$$dA_{ij}^{cc} = \bar{a}_{ij}\, dB_i^{rad} + \bar{b}_{ij}\, dL_i^{rad} - \bar{a}_{ij}\, dB_i^{rad} - \bar{b}_{ij}\, dL_i^{rad}. \qquad (21\text{-}23)$$

Se observă că noii coeficienți de direcție $\bar{a}$ și $\bar{b}$, pe elipsoid, se calculează cu:

$$\bar{a}_{ij} = -\rho^{cc}\frac{M \sin A^{\circ}_{ij}}{s^{\circ}_{ij}}; \qquad \bar{b}_{ij} = \rho^{cc}\frac{N \cos A^{\circ}_{ij}}{s^{\circ}_{ij}}. \tag{21-24}$$

În relațiile (21-24) s-au păstrat notațiile din cap. 6.

21.4. FORME ALE ECUAȚIILOR CORECȚIILOR

Ecuațiile corecțiilor care intervin în compensările rețelelor de triangulație sînt de diferite forme, în funcție de natura observațiilor geodezice efectuate.

21.4.1. DIRECȚII CENTRATE ȘI REDUSE LA PLANUL DE PROIECȚIE

Din punctul de stație P s-au vizat punctele de triangulație $1, 2, \ldots, n$ (fig. 21-2), rezultînd α^0_{Pj} — direcții centrate și reduse la planul de proiecție. Acestea urmează a fi corectate în procesul de prelucrare:

$$\alpha_{Pj} = \alpha^0_{Pj} + v_{Pj}; \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{21-25}$$

Se presupun cunoscute, de asemenea, orientările provizorii θ^0_{Pj}. Diferențele de forma (20-4), în care se presupune cunoscută o valoare provizorie z^0_P a unghiului de orientare:

$$z_P = z^0_P + \mathrm{d}z_P, \tag{21-26}$$

conduc la următorul sistem de ecuații ale corecțiilor:

$$-\mathrm{d}z_P + \mathrm{d}\theta_{Pj} + l_{Pj} = v_{Pj}; \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{21-27}$$

unde s-au notat:

$$l_{Pj} = (\theta^0_{Pj} - \alpha^0_{Pj}) - z^0_P; \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{21-28}$$

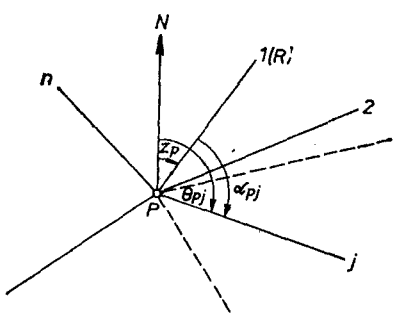


Fig. 21-2. Determinarea unghiului de orientare provizoriu.

Pentru determinarea valorii provizorii a unghiului de orientare se pot folosi diverse procedee. Este util din punct de vedere practic să se convină ca suma termenilor liberi ai ecuațiilor corecțiilor, scrise pentru o stație oarecare, să fie zero:

$$[l] = 0. \tag{21-29}$$

Pe baza acestei convenții rezultă prin însumarea relațiilor (21-28):

$$z^0_P = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\theta^0_{Pj} - \alpha^0_{Pj}). \tag{21-30}$$

Observații. 1. Unghiul de orientare provizoriu se obține ca medie aritmetică simplă a unghiurilor de orientare obținute pentru ficcare direcție.

2. Termenii liberi ai ecuațiilor corecțiilor se obțin ca diferențe între unghiurile de orientare individuale și unghiul de orientare provizoriu [v. relațiile (21-28)].

3. În toate ecuațiile corecțiilor, necunoscuta $\mathrm{d}z$ are coeficientul (-1) [v. sistemul (21-27)].

4. În funcție de caracterul variației orientării $\mathrm{d}\theta$, se pot întîlni următoarele tipuri de ecuații ale corecțiilor în cazul compensării direcțiilor măsurate:

— pentru o direcție măsurată în punctul vechi A către punctul vechi B:

$$-\mathrm{d}z_A + l_{AB} = v_{AB}; \tag{21-31}$$

— pentru o direcție măsurată în punctul A către punctul nou j:

$$-\mathrm{d}z_A + a_{Aj}\,\mathrm{d}x_j + b_{Aj}\,\mathrm{d}y_j + l_{Aj} = v_{Aj}; \tag{21-32}$$

— pentru o direcție măsurată în punctul nou j către punctul vechi B:

$$-\mathrm{d}z_j - a_{jB}\,\mathrm{d}x_j - b_{jB}\,\mathrm{d}y_j + l_{jB} = v_{jB}; \tag{21-33}$$

— pentru o direcție măsurată în punctul nou k către punctul nou j:

$$-\mathrm{d}z_k + a_{kj}\,\mathrm{d}x_j + b_{kj}\,\mathrm{d}y_j - a_{kj}\,\mathrm{d}x_k - b_{kj}\,\mathrm{d}y_k + l_{kj} = v_{kj}. \tag{21-34}$$

21.4.2. DIRECȚII CENTRATE ȘI REDUSE PE ELIPSOID

Ecuațiile corecțiilor, scrise în stația P, pentru direcțiile centrate și reduse pe elipsoid către punctele $1, 2, \ldots, s$ se obțin în mod analog ca pentru sistemul (21-27) fiind de forma:

$$-\mathrm{d}\tilde{z}_P + \mathrm{d}A_{Pj} + \tilde{l}_{Pj} = \tilde{v}_{Pj}; \quad (j = 1,2, \ldots, s). \tag{21-35}$$

Necunoscuta $\mathrm{d}\tilde{z}_P$ este compusă din două părți:

$$\mathrm{d}\tilde{z}_P = \mathrm{d}z_P - \mathrm{d}L_P \sin B^0_P, \tag{21-36}$$

unde $\mathrm{d}z_P$ este necunoscuta de orientare propriu-zisă a stației P, iar $\mathrm{d}L_P \sin B^0_P$ reprezintă convergența meridianelor între pozițiile provizorie și definitivă ale punctului de stație P.

Expresia variației azimutului $\mathrm{d}A_{Pj}$ s-a dat în relația (21-23), iar termenul liber $\tilde{l}_{Pj}$ se calculează analog cu relațiile (21-28):

$$\tilde{l}_{Pj} = (A^0_{Pj} - \tilde{\alpha}^0_{Pi}) - \tilde{z}^0_P; \qquad (j = 1, 2, \ldots s). \tag{21-37}$$

Cu $\tilde{\alpha}^0_{Pi}$ s-au notat direcțiile centrate și reduse la suprafața elipsoidului, iar A^0_{Pj}; z^0_P reprezintă valorile provizorii ale azimutelor direcțiilor și, respectiv, ale unghiului de orientare.

21.4.3. AZIMUTE LAPLACE

În cazul unui azimut astronomic măsurat din stația P către punctul B și transformat în azimut *Laplace* A^*_{PB} cu relația (20-11), se poate scrie:

$$A^*_{PB} + v^A_{PB} = A^0_{PB} + \mathrm{d}A_{PB}. \tag{21-38}$$

Aici v^A_{PB} reprezintă corecția azimutului *Laplace*, iar cu A^0_{PB} s-a notat, ca și pînă acum, valoarea provizorie a azimutului liniei geodezice PB, calculat din coordonatele provizorii ale punctelor P și B. Rezultă:

$$v^A_{PB} = \mathrm{d}A_{PB} + l^A_{PB}, \tag{21-39}$$

unde:

$$l^A_{PB} = A^0_{PB} - A^*_{PB}. \tag{21-40}$$

21.4.4. DISTANȚE REDUSE LA PLANUL DE PROIECȚIE

Forma ecuației este cunoscută de la *cursul de măsurători geodezice prin unde*. Pentru o distanță măsurată și redusă la planul de proiecție, între punctele noi a și b corespunde următoarea ecuație a corecției v^D_{ab}:

$$v^D_{ab} = -A_{ab}\,\mathrm{d}x_a - B_{ab}\,\mathrm{d}y_a + A_{ab}\,\mathrm{d}x_b + B_{ab}\,\mathrm{d}y_b + l^D_{ab}, \tag{21-41}$$

unde:

$$A_{ab} = \frac{\Delta x^0_{ab}}{D^0_{ab}} = \cos\theta^0_{ab}; \qquad B_{ab} = \frac{\Delta y^0_{ab}}{D^0_{ab}} = \sin\theta^0_{ab}; \tag{21-42}$$

$$l^D_{ab} = D^0_{ab} - D^*_{ab}. \tag{21-43}$$

D^0_{ab}, $\cos\theta^0_{ab}$, $\sin\theta^0_{ab}$ se calculează din coordonatele provizorii ale punctelor rețelei, iar D^*_{ab} reprezintă distanța măsurată și redusă la planul de proiecție.

21.4.5. DISTANȚE REDUSE PE ELIPSOID

Pentru o distanță măsurată și redusă la elipsoidul de referință, între punctele noi a și b corespunde o ecuație a corecției v^s_{ab} de aceeași formă cu (21-41):

$$v^s_{ab} = -\overline{A}_{ab}\,\mathrm{d}B_a - \overline{B}_{ab}\,\mathrm{d}L_a + \overline{A}_{ab}\,\mathrm{d}B_b + \overline{B}_{ab}\,\mathrm{d}L_b + l^s_{ab}, \tag{21-44}$$

unde s-au notat:

$$\overline{A}_{ab} = \cos A^0_{ab} \cdot \frac{M}{\rho^{cc} C}; \qquad \overline{B}_{ab} = \sin A^0_{ab} \cdot \frac{N\cos B^0}{\rho^{cc} C}; \tag{21-45}$$

$$l^s_{ab} = s^0_{ab} - s^*_{ab}, \tag{21-46}$$

C fiind o constantă aleasă convenabil; A_{ab}, s^0_{ab} se determină din coordonatele geodezice provizorii, iar s^*_{ab} este distanța măsurată și redusă pe elipsoidul de referință.

21.5. COMPENSAREA GRUPULUI DE PUNCTE

Compensarea rețelelor de triangulație prin metoda observațiilor indirecte este denumită uzual și *compensarea grupului de puncte*, deoarece a fost folosită în trecut în special la încadrarea riguroasă a unui număr de puncte noi într-o rețea veche de un anumit ordin. Metoda mai este cunoscută și sub denumirea de „metoda variației coordonatelor".

21.5.1. ALGORITMUL DE CALCUL

În cazul utilizării mijloacelor de calcul de birou obișnuite, numărul punctelor noi incluse într-un asemenea grup nu poate fi mai mare de 10—12, deoarece rezolvarea neautomatizată a unor sisteme de ecuații normale cu un număr mare de necunoscute prezintă dificultăți importante de calcul. Prin utilizarea mașinilor electronice de calculat, pe baza unor programe adecvate, s-a realizat mărirea considerabilă a rețelei care poate fi compensată, ajungîndu-se pînă la ordinul sutelor sau miilor de puncte noi.

Astfel de programe complexe prevăd automatizarea în întregime a procesului de calcul, începînd cu prelucrarea preliminară a observațiilor geodezice și terminînd cu calculele complete de evaluare a preciziei rezultatelor finale. S-au prevăzut, de asemenea, posibilități de luat în considerare a corelațiilor dintre observații, care pot interveni datorită procesului de măsurare, precum și estimarea „a posteriori" a ponderilor grupelor de observații (20.4.3.).

Sintetizînd, algoritmul de calcul prevede următoarele etape:

— calculul elementelor preliminarii și apoi provizorii (v. cap. 20);

— formarea modelului funcțional-stochastic (9.2.1 și 9.2.2.);

— transformarea ecuațiilor corecțiilor după regulile de echivalență prezentate în 21.1 și în 21.5.2. (mai ales din considerente de natură practică);

— determinarea elementelor compensate și evaluarea preciziei (v. 9.2.3. și 9.2.4.).

O b s e r v a ț i e. Fiecărei observații geodezice îi corespunde o ecuație a corecțiilor, așa cum s-a examinat amănunțit în 21.4, ceea ce constituie un mare avantaj la compensarea rețelelor de triangulație. Avantajul a fost sesizat încă de către *F.R. Helmert*, care aprecia că la compensarea unei rețele europene de triangulație se va putea aplica doar metoda observațiilor indirecte, deoarece această metodă asigură concomitent cu o privire de ansamblu a rețelei, posibilitatea unui control sigur asupra exactității rezolvării, nefiind posibile omiteri de ecuații sau dublări nedorite (ceea ce se poate întîmpla, de exemplu, cu mai multă ușurință, la metoda observațiilor condiționate).

21.5.2. PARTICULARITĂȚI ÎN TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR CORECȚIILOR DIRECȚIILOR MĂSURATE

Numărul inițial al ecuațiilor corecțiilor, scrise pentru direcțiile măsurate, este egal cu numărul direcțiilor în cadrul rețelei. Notînd cu N și P numărul punctelor noi și respectiv al stațiilor din rețea, numărul general de necunoscute este $2N + P$, fiind format din corecțiile $\mathrm{d}x$ și $\mathrm{d}y$ (respectiv $\mathrm{d}B$ și $\mathrm{d}L$) pentru fiecare punct nou și corecțiile $\mathrm{d}z$ pentru fiecare punct staționat.

Se grupează ecuațiile în jurul fiecărui punct staționat, luînd în considerație punctul de stație i, pentru care se scriu cele n ecuații (în planul de proiecție), sub forma cea mai generală (v. relația 21-34).

Se acceptă, de asemenea, că toate observațiile azimutale efectuate în rețea sînt de aceeași precizie, considerînd că ponderile ecuațiilor corecțiilor sînt 1/2. Rezultă:

$$
\begin{aligned}
&-dz_i + a_{i1}\,dx_1 + b_{i1}\,dy_1 - a_{i1}\,dx_i - b_{i1}\,dy_i + l_{i1} = v_{i1}; \quad p_1 = \frac{1}{2};\\
&-dz_i + a_{i2}\,dx_2 + b_{i2}\,dy_2 - a_{i2}\,dx_i - b_{i2}\,dy_i + l_{i2} = v_{i2}; \quad p_2 = \frac{1}{2};\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&-dz_i + a_{in}\,dx_n + b_{in}\,dy_n - a_{in}\,dx_i - b_{in}\,dy_i + l_{in} = v_{in}; \quad p_n = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{21-47}
$$

În cazul în care punctul considerat are legături spre puncte vechi sau el însuși este un punct vechi, în sistemul (21-47) vor fi incluse și ecuații de alte tipuri (v. 21-41). În toate aceste ecuații necunoscuta dz are coeficientul (-1).

● Aplicînd regula dedusă în cazul *situației 1 de echivalență*, putem deduce un sistem echivalent de ecuații ale corecțiilor, format din $n + 1$ ecuații, care nu mai conțin însă necunoscuta dz:

$$
\begin{aligned}
&a_{i1}\,dx_1 + b_{i1}\,dy_1 - a_{i1}\,dx_i - b_{i1}\,dy_i + l_{i1} = v'_{i1}; \quad p = \frac{1}{2};\\
&a_{i2}\,dx_2 + b_{i2}\,dy_2 - a_{i2}\,dx_i - b_{i2}\,dy_i + l_{i2} = v'_{i2}; \quad p = \frac{1}{2};\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&a_{in}\,dx_n + b_{in}\,dy_n - a_{in}\,dx_i - b_{in}\,dy_i + l_{in} = v'_{in}; \quad p = \frac{1}{2};\\
&\frac{1}{2}a_{i1}\,dx_1 + \frac{1}{2}b_{i1}\,dy_1 + \ldots + \frac{1}{2}a_{in}\,dx_n + \frac{1}{2}b_{in}\,dy_n -\\
&-\frac{1}{2}[a]\,dx_i - \frac{1}{2}[b]\,dy_i = \frac{1}{2}[v'_{ij}]; \quad p_{n+1} = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}
\tag{21-48}
$$

S-a ținut seamă de faptul că $[l] = 0$, potrivit cu relația (21-29).

În ecuațiile sumă scrise în punctele vechi, termenii cu coeficienții $[a]$ și $[b]$ lipsesc, deoarece aceștia se referă la corecțiile pe care le vor primi coordonatele punctului i, ceea ce pentru punctele vechi este lipsit de sens.

Efectuînd transformări analoge cu cea prezentată mai sus, se elimină din toate ecuațiile corecțiilor cele P necunoscute dz. Vor rezulta însă în plus un număr de P ecuații sumă. Prin eliminarea necunoscutelor dz încă înainte de formarea ecuațiilor normale, se mai petrece un lucru cu totul remarcabil: ecuațiile corecțiilor referitoare la legăturile dintre punctele vechi, de forma (21-31), nu mai au sens, deoarece nu mai conțin mărimi necunoscute. Numărul total al ecuațiilor corecțiilor, după această transformare este micșorat cu un număr egal cu cel al direcțiilor observate între punctele vechi.

● Avînd în vedere relația (21-18), ecuațiile corecțiilor pentru două direcții reciproce (din care a fost eliminată deja necunoscuta dz) vor fi:

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}\,dx_j + b_{ij}\,dy_j - a_{ij}\,dx_i - b_{ij}\,dy_i + l_{ij} = v'_{ij}; \quad p = \frac{1}{2};\\
&a_{ji}\,dx_j + b_{ji}\,dy_j - a_{ji}\,dx_i - b_{ji}\,dy_i + l_{ji} = v'_{ji}; \quad p = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{21-49}
$$

Potrivit cu *situația 2 de echivalență*, aceste două ecuații se pot reduce la o singură ecuație, de pondere egală cu $p = 1$:

$$a_{ij}\,dx_j + b_{ij}\,dy_j - a_{ij}\,dx_i - b_{ij}\,dy_i + L_{ij} = v''_{ij}; \quad p = 1. \tag{21-50}$$

Termenul liber al ecuației de mai sus este, potrivit cu relația (24-7), egal cu:

$$L_{ij} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji}). \tag{21-51}$$

Acest gen de transformări micșorează substanțial numărul ecuațiilor corecțiilor din care se formează ecuațiile normale.

Numărul lor va fi egal cu numărul laturilor rețelei care au cel puțin la unul din capete un punct nou, plus numărul punctelor staționate.

● Ecuațiile transformate ale corecțiilor, care se referă la vizele reciproce au ponderea egală cu 1, iar cele ale vizelor nereciproce au rămas cu ponderea 1/2, deoarece în aceste cazuri nu se pot aplica formulele (21-50) — (21-51). Ecuațiile sumă referitoare la punctele staționate au, de asemenea, ponderea diferită de unitate.

Este util ca și aceste ecuații să fie aduse la ponderi egale cu ± 1, prin utilizarea *situației 3 de echivalență* a ecuațiilor corecțiilor.

Pentru a aduce ultima ecuație din sistemul (21-48) la ponderea egală cu (-1) este necesar să înmulțim întreaga ecuație cu $\sqrt{\frac{2}{n}}$. În acest fel ecuația sumă examinată anterior va căpăta următorul aspect:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_{i1}}{\sqrt{2n}}\,dx_1 + \frac{b_{i1}}{\sqrt{2n}}\,dy_1 + \ldots + \frac{a_{in}}{\sqrt{2n}}\,dx_n + \frac{b_{in}}{\sqrt{2n}}\,dy_n -\\
&-\frac{[a]}{\sqrt{2n}}\,dx_i - \frac{[b]}{\sqrt{2n}}\,dy_i = \frac{[v''_{ij}]}{\sqrt{2n}}; \qquad p'_{n+1} = -1.
\end{aligned}
$$

În mod analog, ecuațiile cu pondere egală cu 1/2 vor trebui înmulțite cu $1/\sqrt{2}$, pentru a fi aduse la ponderea 1.

21.5.3. EXEMPLU

Un exemplu tipic de îndesire a unei rețele de triangulație este prezentat în figura 21-3.

Se cunosc coordonatele punctelor din rețeaua de ordin superior (tabelul 21-1), precum și direcțiile măsurate, centrate și reduse la planul de proiecție *Gauss-Krüger* (tabelul 21-2).

În tabelul 21-3 se prezintă calculul distanțelor și orientărilor între punctele vechi, precum și controalele respective.

Coordonatele provizorii ale punctelor noi se determină prin intersecții simple înainte, mediile valorilor obținute și care se vor utiliza în calcule, fiind prezentate în tabelul 21-4. Tabelul 21-5 conține calculul orientărilor provizorii θ^0 și al coeficienților de direcție a și b.

Pentru exemplificare, se prezintă un extras din tabelul ecuațiilor netransformate ale corecțiilor în tabelul 21-6, iar în tabelul 21-7 ecuațiile transformate pe baza *regulilor Schreiber*. Sistemul ecuațiilor normale este conținut de tabelul 21-8, iar rezolvarea și calculul coeficienților de pondere pătratici de tabelul 21-9. Sistemul ecuațiilor va cuprinde $2N$ necunoscute,

Tabelul 21-1

Punctul	Coordonate *Gauss-Krüger*	
	x [m]	y [m]
V	4 996 344,331	4 608 320,924
M	5 002 636,532	4 581 907,641
S	4 963 504,198	4 591 605,820
T	4 966 049,659	4 577 154,173
P	4 978 581,881	4 566 010,484

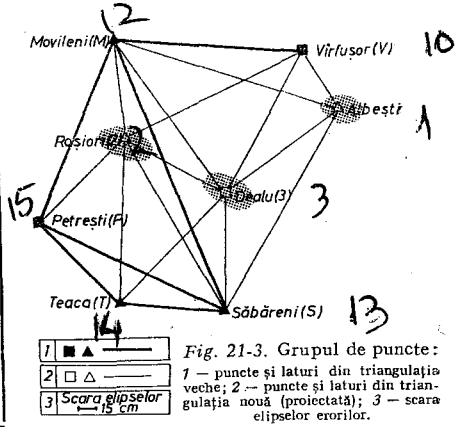


Fig. 21-3. Grupul de puncte: *1* — puncte și laturi din triangulația veche; *2* — puncte și laturi din triangulația nouă (proiectată); *3* — scara elipselor erorilor.

Tabelul 21-2

Stația	Punctul vizat	Direcții centrate, reduse la planul de proiecție			Stația	Punctul vizat	Direcții centrate, reduse la planul de proiecție			Stația	Punctul vizat	Direcții centrate, reduse la planul de proiecție		
		g	c	cc			g	c	cc			g	c	cc
P	S	0	00	09,26	1	V	399	99	92,57	3	S	0	00	01,93
	T	19	84	01,52		S	287	26	06,57		T	44	65	46,24
	M	303	28	86,04		3	313	00	26,68		2	119	03	22,02
	2	327	26	81,84		M	366	69	78,88		M	151	68	62,07
T	P	399	99	91,85	V	1	129	47	15,27		V	227	25	98,83
	2	54	78	38,32		3	211	14	55,90		1	258	58	88,48
	3	105	56	44,01		2	251	90	78,96	S	T	239	16	80,43
	S	157	36	95,18		M	284	13	48,93		P	261	95	90,17
M	P	0	00	15,63	2	M	399	99	93,40		2	300	74	06,17
	V	277	71	10,21		V	74	89	59,84		M	312	60	17,95
	1	289	74	66,08		3	125	90	74,88		3	342	70	33,54
	3	329	15	01,07		S	169	90	64,61		1	375	55	03,20
	S	347	35	67,83		T	200	74	77,31					
	2	370	58	92,79		P	253	39	24,81					

deoarece cele P necunoscute dz se elimină în prealabil, prin aplicarea primei reguli de echivalență.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații normale rezultă necunoscutele dx și dy pentru toate punctele noi. Atunci cînd rezolvarea se efectuează la un calculator electronic, este indicat ca matricea inversă a sistemului ecuațiilor normale să fie extrasă în întregime. De aici vor rezulta coeficienții

Tabelul 21-3

Punctul	Coordonate		tg θ			sin θ	$D = \frac{\Delta x}{\cos \theta}$
			orientarea θ			cos θ	$D = \frac{\Delta y}{\sin \theta}$
	x [m]	y [m]	g	c	cc		$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
M	5 002 636,532	4 581 907,641	0,6608 7664			−0,5513 5155	28 833,068
P	4 978 581,881	4 566 010,484	237	17	75,383	−0,8342 7302	28 833,068
Δ	−24 054,651	−15 897,157					28 833,068
V	4 996 344,331	4 608 320,924	−4,1977 8119			−0,9727 7862	27 152,409
M	5 002 636,532	4 581 907,641	314	88	81,948	0,2317 3638	27 152,409
Δ	6 292,201	−26 413,283					27 152,409
P	4 978 581,881	4 566 010,484	−0,8892 0297			0,6644 9494	16 770,164
T	4 966 049,659	4 577 154,173	153	72	93,440	−0,7472 9276	16 770,164
Δ	−12 532,222	11 143,689					16 770,164
T	4 966 049,659	4 577 154,173	−5,6774 1835			0,9848 3983	14 674,109
S	4 963 504,198	4 591 605,820	111	09	93,435	−0,1734 6614	14 674,109
Δ	−2 545,461	14 451,647					14 674,109
S	4 963 504,198	4 591 605,820	−0,2478 3032			−0,2405 5303	40 316,178
M	5 002 636,532	4 581 907,641	384	53	42,410	0,9706 6360	40 316,178
Δ	39 132,334	−9 698,179					40 316,178
P	4 978 581,881	4 566 010,484	−1,6975 6427			0,8616 1620	29 706,190
S	4 963 504,198	4 591 605,820	133	89	05,099	−0,5075 5030	29 706,190
Δ	−15 077,683	25 595,336					29 706,190

de pondere pătratici Q_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, 2N$), necesari la calculele de evaluare a preciziei, precum și coeficienții de pondere dreptunghiulari Q_{ij}, utili în diverse calcule care pot interveni în viitor. Cînd rezolvarea ecuațiilor normale se efectuează la calculatoare de birou, se calculează, de obicei, numai coeficienții de pondere pătratici Q_{ii} ca în tabelul 21-9. Verificarea rezolvării sistemului de ecuații normale se efectuează după metodele cunoscute, fiind prezentată tot în tabelul 21-9.

Coordonatele compensate (probabile) ale punctelor noi se calculează cu relațiile (21-11), fiind prezentate în tabelul 21-10.

Tabelul 21-4

Punctul	Coordonate provizorii	
	x° (m)	y° (m)
1	4 988 060,833	4 614 294,930
2	4 988 482,711	4 580 172,402
3	4 979 598,180	4 595 373,775

Tabelul 21-5

Punctul	Coordonate x/x^o [m]	Coordonate y/y^o [m]	tg θ°/ctg θ° Orientarea θ° g	c	cc	sin θ° / cos θ°	$D = \Delta x^o/\cos\theta^o$ / $D = \Delta y^o/\sin\theta^o$ / $D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	a / b	Control $a/b = -\operatorname{tg}\theta^o$ / $b/a = -\operatorname{ctg}\theta^o$
3	4 979 598,180	4 595 373,775	0,4472 5880			0,9128 5555	20 727,436	−2,8037	−0,4472
1	4 988 060,833	4 614 294,930					20 727,436		
Δ	8 462,653	18 921,155	73	22	55,548	0,4082 8268	20 727,436	1,2540	
3	4 979 598,180	4 595 373,775	0,7436 2332			−0,8024 4944	22 704,984	2,2500	−0,7436
T	4 966 049,659	4 577 154,173					22 704,984		
Δ	−13 584,521	−18 219,602	259	29	40,524	−0,5967 2012	22 704,984	−1,6731	
3	4 979 598,180	4 595 373,775	0,2341 2198			−0,2279 5780	16 529,178	0,8780	−0,2341
S	4 963 504,198	4 591 605,820					16 529,178		
Δ	−16 093,982	−3 767,955	214	64	09,645	−0,9736 7102	16 529,178	−3,7501	
1	4 988 060,833	4 614 294,930	−0,4500 4381			−0,9119 0655	35 516,017	1,6346	0,4499
M	5 002 636,532	4 581 907,641					35 516,017		
Δ	14 575,699	−32 387,289	326	92	20,364	0,4103 9790	35 516,017	0,7356	
1	4 988 060,833	4 614 294,930	−0,7211 9363			−0,5849 4210	10 212,986	3,6462	0,7211
V	4 996 344,331	4 608 320,924					10 212,986		
Δ	8 283,498	−5 974,006	360	22	34,415	0,8110 7502	10 212,986	5,0558	
1	4 988 060,833	4 614 294,930	0,9239 5029			−0,6786 2638	33 433,876	1,2922	−0,9235
S	4 963 504,198	4 591 605,820					33 433,876		
Δ	−24 556,635	−22 689,110	247	48	48,852	−0,7344 8365	33 433,876	−1,3985	
2	4 988 482,711	4 580 172,402	0,1225 9862			0,1216 8753	14 259,793	−0,5433	0,1225
M	5 002 636,532	4 581 907,641					14 259,793		
Δ	14 183,824	1 753,239	7	76	61,163	0,9925 6846	14 259,793	4,4313	

Tabelul 21-5 (continuare)

Punctul	Coordonate x/x^o [m]	Coordonate y/y^o [m]	tg θ°/ctg θ° Orientarea θ° g	c	cc	sin θ° / cos θ°	$D = \Delta x^o/\cos\theta^o$ / $D = \Delta y^o/\sin\theta^o$ / $D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	a / b	Control $a/b = -\operatorname{tg}\theta^o$ / $b/a = -\operatorname{ctg}\theta^o$
2	4 988 482,711	4 580 172,402	0,2792 9068			0,9631 4119	29 225,748	−2,0980	−0,2793
V	4 996 344,331	4 608 320,924					29 225,748		
Δ	7 862,620	28 148,522	82	66	16,976	0,2689 9636	29 225,748	0,5860	
2	4 988 482,711	4 580 172,402	−0,5844 5583			0,8633 5681	17 607,289	−3,1216	0,5842
3	4 979 598,180	4 595 373,775					17 607,289		
Δ	−8 884,531	15 201,373	113	67	15,548	−0,5045 9391	17 607,289	−1,8244	
2	4 988 482,711	4 580 172,402	0,1345 9384			−0,1333 4237	22 635,183	0,3750	−0,1346
T	4 966 060,833	4 577 154,173					22 635,183		
Δ	−22 433,053	− 318,229	208	51	41,979	−0,9910 7008	22 635,183	−2,7874	
2	4 988 482,711	4 580 172,402	0,6991 1646			−0,8195 7197	17 279,625	3,0195	−0,6992
P	4 978 581,881	4 566 010,484					17 279,625		
Δ	−9 900,830	−14 161,918	261	15	77,434	−0,5729 7625	17 279,625	−2,1100	
3	4 979 598,180	4 595 373,775	0,7731 4178			−0,6116 5281	27 167,481	−1,8396	−0,7374
V	4 996 344,331	4 608 320,924					27 167,481		
Δ	16 746,151	12 947,149	41	89	90,087	0,7911 2631	27 167,481	2,3793	
2	4 988 482,711	4 580 172,402	−0,4577 3013			−0,4162 0140	27 470,878	−0,9645	0,4580
S	4 963 504,198	4 591 605,820					27 470,878		
Δ	−24 978,513	11 433,418	172	67	22,235	−0,9092 7245	27 470,878	−2,1072	
3	4 979 598,180	4 595 373,775	−0,5845 0943			−0,5044 0341	26 685,247	1,2039	0,5846
M	5 002 636,532	4 581 907,641					26 685,247		
Δ	23 037,752	−13 466,130	366	32	59,615	−0,8633 3664	26 685,247	2,0696	

56,016 1834 6356115

Tabelul 217

Ecuația	Ponderea	Punctul nou						Termenul liber l (cc)	Sumă
		1		2		3			
		dx	dy	dx	dy	dx	dy		
$P-2$	1			−3,0195	2,1110			−0,7790	−1,6875
$T-2$	1			−0,3750	2,7874			5,8720	8,2744
$T-3$	1					−2,2500	1,6731	−0,7530	−1,3299
$M-1$	1	−1,6346	−0,7356					−2,8490	−5,2192
$M-2$	1			0,5433	−4,4313			7,5960	3,7080
$M-3$	1					−1,2039	−2,0596	−0,8780	−4,1415
$4-1$	1	−3,6462	−5,0558					−4,4230	−13,1250
$4-2$	1			2,0980	−0,5860			3,0160	4,5280
$4-3$	1					1,8396	−2,3793	2,7150	2,1753
$S-1$	1	−1,2922	1,3985					8,6603	8,7666
$S-2$	1			0,9645	2,1072			−7,2880	−4,2163
$S-3$	1					−0,8782	3,7501	29,9070	32,7791
$1-3$	1	−2,8037	1,2540			2,8037	−1,2540	−17,7420	−17,7420
$2-3$	1			3,1216	1,8244	−3,1216	−1,8244	−7,3520	−7,3520
Z_P	−1			−1,0676	0,7464				0,3212
Z_T	−1					−0,7955	0,5915		−0,2040
Z_M	−1	−0,4719	−0,2123	0,1568	−1,2792	−0,3475	−0,5946		−2,7487
Z_V	−1	1,2891	−1,7875	0,7418	−0,2072	0,6504	−0,8412		−0,1546
Z_S	−1	−0,3730	0,4037	0,2782	0,6083	−0,2535	1,0826		1,7463
Z_1	−1	−3,3152	−1,1098			0,9913	−0,4434		−3,8771
Z_2	−1			0,9621	1,1006	−0,9011	−0,5267		0,6349
Z_3	−1	−0,8094	0,3620	0,9011	0,5267	−0,8112	−0,6045		−0,4353

Punctul de staţie	Punctul vizat	Direcţii centrate, reduse la planul de proiecţie α^{o}_{ij} g	c	cc	Orientări din coordonate 0^{c}_{ij} g	c	cc	Unghi de orientare $z^{i}_{j} = 0^{c}_{ij} - \alpha^{o}_{ij}$ z^{oi} g	c	cc	Punctul nou 1 dx	1 dy	2 dx	2 dy	3 dx	3 dy	$t^{oi}_{ij} = \frac{s^{i}_{j}}{\rho^{cc}}$ (cc)	p_{ij}	v_{ij} (cc)	$-dz_i$ (cc)	$d0_{ij}$ (cc)	Direcţii compensate $\alpha_{ij} = \alpha^{o}_{ij} + v_{ij}$ g	c'	cc	Controlul compensării $0_{ij} = \alpha_{ij} + z_i$ g	c	cc	Orientări 0 din coordonate definitive g	c	cc
P	S	0	00	09,26	133	89	05,099	133	88	95,839							2,665	1/2	2,17			0	00	11,430	133	89	05,099	133	89	05,099
	T	19	84	01,52	153	72	93,440	133	88	91,920							−1,254	1/2	−1,749			19	83	99,771	153	72	93,440	153	72	93,440
	M	303	28	86,04	37	17	75,383	133	88	89,343							−3,831	1/2	−4,326	−0,495		303	28	81,714	37	17	75,383	37	17	75,383
	2	327	26	81,84	61	15	77,434	133	88	95,594			−3,0195	2,111			2,420	1/2	3,906		1,981	327	26	85,746	61	15	79,415	61	15	79,415
	Σ/s							133	88	93,174							0,000	$\sqrt{8}$=2,82	0,001		1,981									
1	P	399	99	91,85	353	72	93,440	353	73	01,590							1,586	1/2	2,748			399	99	94,598	353	72	93,440	353	72	93,440
	2	54	78	38,32	8	51	41,979	353	73	03,659			−0,375	2,7874			3,656	1/2	7,504		2,686	54	78	45,824	8	51	44,665	8	51	44,665
	3	105	56	44,01	59	29	40,524	353	72	96,514					−2,2500	1,6731	−3,490	1/2	−9,663	1,162	−7,335	105	56	34,347	159	29	33,190	159	29	33,190
	S	157	36	95,18	111	09	93,435	353	72	98,255							−1,750	1/2	−0,588			157	36	94,592	111	09	93,435	111	09	93,435
	Σ/s							353	73	00,005							0,000	$\sqrt{8}$=2,82	0,001		−4,649									
M	P	0	00	15,63	237	17	75,383	237	14	59,753							−4,593	1/2	−5,339			0	00	10,291	237	17	75,383	237	17	75,383
	V	277	71	10,21	114	88	81,348	237	17	71,138							6,793	1/2	6,047			277	71	16,257	114	88	81,348	114	88	81,348
	1	289	74	66,08	126	92	20,364	237	17	54,284	−1,6346	−0,7356					−10,062	1/2	−9,205		1,603	289	74	56,875	126	92	21,967	126	92	21,967
	3	329	15	01,07	166	32	59,015	237	17	57,945					−1,2039	−2,0596	−6,401	1/2	0,000	−0,746	7,147	329	15	01,070	166	32	66,162	166	32	66,162
	S	347	35	67,83	184	53	42,410	237	17	74,580							10,235	1/2	9,489			347	35	77,319	184	53	42,411	184	53	42,411
	2	370	58	92,79	207	76	61,163	237	17	68,373			0,5433	−4,4313			4,028	1/2	−0,989		−4,271	370	58	91,801	207	76	56,892	207	76	56,892
	Σ/s							237	17	64,346							0,000	$\sqrt{12}$=3,46	0,003		4,479									
1	V	399	99	92,57	360	22	34,415	360	22	41,845	−3,6462	−5,0558					2,725	1/2	2,208		3,310	399	99	94,778	360	22	37,725	360	22	37,725
	S	287	26	06,57	247	48	48,852	360	22	28,868	−1,2922	1,3985					3,162	1/2	0,757		1,422	287	26	07,327	247	48	50,274	247	48	50,274
	3	313	00	26,68	273	22	55,548	360	22	42,282	−2,8037	1,2540			2,8037	−1,2540	−10,251	1/2	−5,105	−3,827	8,973	251	90	81,690	282	66	15,548	282	66	15,548
	M	366	69	76,88	326	92	20,364	360	22	43,484	−1,6364	0,7356					4,3641	1/2	2,14		1,003	284	13	47,490	314	88	81,348	314	88	81,348
	Σ/s							360	22	39,120							0,000	$\sqrt{8}$=2,82	0,000		15,308									
2	M	399	99	93,40	7	76	61,163	7	76	67,763			0,5433	−4,4313			11,163	1/2	5,324		−4,271	399	99	98,724	7	76	56,892	7	76	56,892
	V	74	89	59,84	82	66	16,074	7	76	56,234			2,0980	−0,5860			−0,367	1/2	−2,411		−0,526	74	89	57,429	82	66	15,548	82	66	15,548
	3	125	20	74,88	133	67	15,548	7	76	40,668			3,1216	1,8244	−3,1216	−1,8244	−15,933	1/2	−10,271		7,180	125	20	64,609	133	67	22,782	133	67	22,782
	S	164	90	64,61	172	67	22,255	7	76	57,645			0,9645	2,1072			1,045	1/2	1,582	−1,518	2,055	164	90	66,192	172	67	24,310	172	67	24,310
	T	290	74	77,31	208	51	41,979	7	76	64,669			−0,3750	2,7874			8,069	1/2	9,237		2,686	290	74	86,547	208	51	44,665	208	51	44,665
	P	253	39	24,81	261	15	77,434	7	76	52,624			−3,0195	2,1110			−3,977	1/2	−3,513		1,982	253	39	21,292	261	15	79,416	261	15	79,416
	Σ/s							7	76	56,601							0,000	$\sqrt{12}$=3,46	0,001		9,106									

Tabelul 217

Tabelul 21-8

Punctul nou (necunoscute)						Termenul liber	Sumă	Control
1		*2*		*3*				
dx	dy	dx	dy	dx	dy			
39,1665	15,3454	0,0491	−0,3166	−9,3953	4,2675	−59,3365	108,4549	108,4549
	34,3964	−0,9207	1,0782	0,9309	−0,7677	−14,3205	65,9183	65,9183
		28,1591	−2,7774	−10,9848	−7,1626	−19,3709	−11,0082	−11,0082
			44,0696	−6,9585	−2,6330	−49,5025	−17,0403	−17,0403
				31,9656	−7,3353	−45,3058	−47,0815	−47,0815
					35,0890	141,9044	164,8974	164,8974

Punctul nou (necunoscute)						Termenul liber
1		2		3		
dx	dy	dx	dy	dx	dy	
39,166483	15,345432	0,049142	−0,316645	−9,393534	4,267473	59,336524
−1	−0,391800	−0,001255	−0,008085	0,239836	−0,108957	−1,514982
dx_1 = −1,0159	34,396441	−0,920749	1,078180	0,930887	0,767664	14,320489
	28,384101	−0,940002	1,202245	4,611274	−0,904332	−8,927561
	−1	0,033117	−0,042356	−0,162460	0,031860	0,314527
	dy_1 =0,0779	28,159067	−2,777362	−10,984852	−7,162556	−19,370864
		28,127875	−2,737150	−10,820352	−7,197860	−19,740985
		−1	0,097311	0,384684	0,255898	0,701830
		dx_2 =0,0193	44,069622	−6,958502	−2,633057	−49,502524
			43,749785	−8,282703	−3,260682	−50,565667
			−1	0,189320	0,074530	1,155792
			dy_2 =0,9662	31,965569	−7,335296	−45,730582
				23,233016	−9,551099	−46,791527
				−1	0,411100	2,014010
				dx_3 =0,4737	35,088984	141,904383
					28,583808	107,098487
					−1	−3,746823
					dy_3 = −3,7468	

Control

$$[(S - L - Q)\,dx] = -101,38198$$
$$-[L] = -101,3852$$

Tabelul 21-9

Coeficienţi de pondere						Sumă	Control
1		2		3			
Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xx}	Q_{yy}		
−1	0	0	0	0	0	107,454865	
0,0255	0	0	0	0	0	− 2,743541	− 2,7436
0	−1	0	0	0	0	64,918344	
0,3918	−1					22,817528	22,8175
−0,0138	0,0352					− 0,803884	− 0,8039
0	0	−1	0	0	0	−14,008175	
0,0142	−0,0331	−1				−13,387383	−13,3874
−0,0005	0,0012	0,0356				0,475947	0,4760
0	0	0	−1	0	0	−18,040297	
−0,0071	0,0391	−0,0973	−1			−19,440723	−19,4407
0,0002	−0,0009	0,0022	0,0229			0,444362	0,4443
0	0	0	0	−1	0	−48,081529	
−0,2994	0,1571	−0,4031	−0,1893	−1		−34,847349	−34,8473
0,0120	−0,0068	0,0174	0,0081	0,0430		1,499906	1,4998
0	0	0	0	0	−1	163,897394	
0,0015	0,0272	−0,4289	0,1524	−0,4111	−1	133,715934	133,7159
−0,0001	−0,0010	0,0150	0,0053	0,144	0,0350	−4,678030	− 4,6780

Q	0,0349	0,0364	0,0493	0,0252	0,0489	0,0350	Q_{xy1} = −0,0159
s(m)	±0,157	±0,160	±0,187	±0,133	±0,186	±0,157	Q_{xy2} = 0,0078
s_t(m)	±0,2240		±0,2290		±0,2430		Q_{xy3} = 0,0144

$$s_0 = \sqrt{\frac{1836,333}{40-14}} = \pm 8^{cc},404$$

$$s_\alpha = \pm \frac{8^{cc},404}{\sqrt{2}} = \pm 5^{cc},942$$

Tabelul 21-10

Punctul	Coordonate după compensare																	
	Grupul de puncte				Intersecții multiple înainte				Intersecții multiple înapoi				Intersecții multiple combinate					
	x [m]	s_x [m]	y [m]	s_y [m]	x [m]	s_x [m]	y [m]	s_y [m]	x [m]	s_x [m]	y [m]	s_y [m]	x [m]	s_x [m]	y [m]	s_y [m]		
1	4988060,731	0,157	4614294,938	0,160	4988060,207	0,376	4614294,860	0,348	4988060,160	0,226	4614295,188	0,081	4988060,155	0,327	4614295,031	0,234		
2	4988482,713	0,187	4580172,499	0,133	4988482,717	0,139	4580172,367	0,090	4988482,674	0,209	4580172,502	0,134	4988482,695	0,106	4580172,434	0,069		
3	4979598,227	0,186	4595373,400	0,157	4979597,888	0,185	4595372,816	0,154	4979598,097	0,139	4595373,601	0,095	4979597,961	0,188	4595373,202	0,142		
s_0; $\bar{s}_i$	$s_0 = 8^{cc},40$; $\bar{s}_i = 0,232$ m				$\bar{s}_i = 0,306$ m				$\bar{s}_i = 0,219$ m				$\bar{s}_i = 0,255$ m					

Tabelul 21-11

Punctul	Elementele elipselor erorilor															
	Grupul de puncte				Intersecții multiple înainte				Intersecții multiple înapoi				Intersecții multiple combinate			
	a [m]	b [m]	θ		a [m]	b [m]	θ		a [m]	b [m]	θ		a [m]	b [m]	θ	
			g	c			g	c			g	c			g	c
1	0,227	0,141	148	50	0,276	0,154	154	62	0,785	0,186	183	08	0,239	0,121	168	37
2	0,241	0,161	18	29	0,293	0,158	22	03	0,295	0,160	22	74	0,208	0,113	44	84
3	0,241	0,161	35	69	0,225	0,179	19	66	0,277	0,179	15	53	0,175	0,127	16	79

Pentru fiecare stație se calculează corecția unghiului de orientare provizoriu. Astfel, dacă pentru stația P se însumează ecuațiile inițiale ale corecțiilor, reprezentate concentrat sub forma (21-27) prin luarea în considerare a condițiilor (21-10) și (21-29) se obține:

$$dz_P = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d\theta_{Pj}. \qquad (21\text{-}50)$$

Calculul corecțiilor v, pentru toate direcțiile observate, folosind ecuațiile *netransformate* ale corecțiilor este prezentat în tabelul 21-6.

Control. Pentru fiecare punct de stație $[v] = 0$.

Pentru calculul $[pvv]$ se folosesc două procedee, pe baza relației cunoscute de la *cursul de teoria erorilor*, scrisă aici sub forma sa generală:

$$[pvv] = [pll] + [pal]\,dx_1 + [pbl]\,dx_2 + \ldots . \qquad (21\text{-}51)$$

Deoarece necunoscutele dz au coeficienții egali cu (-1) în toate ecuațiile corecțiilor, obținem, în ipoteza observațiilor de egală precizie și sub condiția (21-29):

$$\sum_{i=1}^{P} [l_{ij}]_{j=1}^{g} \cdot dz_i = 0, \qquad (21\text{-}52)$$

ceea ce înseamnă că necunoscutele dz nu aduc nici o contribuție în relația (21-51). Se poate scrie, sub formă simbolică:

$$[pvv] = [pll] + [AL]dx_1 + [BL]\,dy_1 + \ldots + [SL]\,dx_N + [TL]\,dy_N \qquad (21\text{-}53)$$

unde:

— termenul $[pll]$ se calculează cu termenii liberi ai ecuațiilor netransformate ale corecțiilor;

— restul termenilor se calculează după rezolvarea sistemului de ecuații normale.

Direcțiile compensate α, determinate cu relațiile (21-25) sînt trecute în tabelul 21-6.

Din coordonatele punctelor vechi și coordonatele compensate ale punctelor noi se calculează orientările definitive θ pentru toate direcțiile observate în rețea (tabelul 21-6).

Control. Cu relația (21-14) se pot determina variațiile $d\theta$. Aceste valori trebuie să coincidă (în limita preciziei de calcul, adică $0^{cc},001$ pentru ordinul I; $0^{cc},01$ pentru ordinul II ș.a.m.d.) cu diferențele dintre orientările definitive θ și orientările provizorii θ^0, calculate din coordonate.

Controlul final al calculelor este dat de îndeplinirea relației:

$$\theta_{Pj}^{coordonate} = \alpha_{Pj}^{0} + v_{Pj} + dz_P + z_P^0, \qquad (21\text{-}54)$$

pentru toate direcțiile observate în rețea (ultimele coloane ale tabelului 21-6).

Calculele de evaluare a preciziei

● S-a calculat $[pvv]$ prin cele două procedee menționate și s-a obținut: $1836,3334 \approx 1836,3336$.

● Eroarea medie a unității de pondere:

$$s_0 = \sqrt{\frac{1\,836,3335}{40 - 14}} = \pm 8^{cc},404.$$

● Eroarea medie a unei direcții observate:

$$s_\alpha = s_0/\sqrt{p} = s_0/\sqrt{1/2} = \pm\ 5^{cc},960.$$

● Erorile medii (în metri) ale coordonatelor punctelor noi s_x, s_y, s_t se prezintă în tabelul 21-10, iar elementele care definesc elipsele erorilor (semiaxele a și b și orientarea θ a semiaxei a) în tabelul 21-11. Elipsele erorilor sînt reprezentate schematic și pe figura 21-3.

21.6. INTERSECȚIA MULTIPLĂ ÎNAINTE

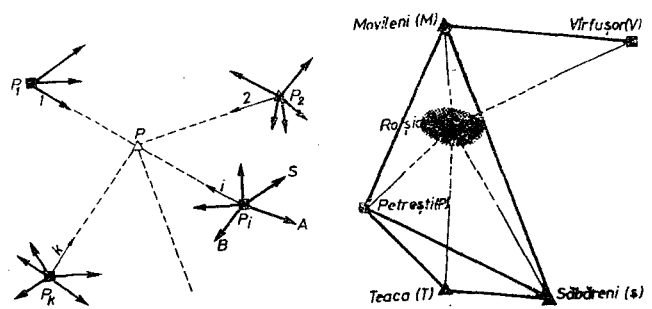
Din mai multe puncte vechi din rețeaua de triangulație se efectuează observații azimutale către un punct nou, precum și către alte puncte vechi din rețea (pentru orientarea cît mai bună a stațiilor); punctul nou nu este staționat. Asemenea situații intervin în special la îndesirea rețelelor de triangulație cu puncte greu staționabile (biserici, turnuri cu diverse destinații ș.a.), care sînt însă deosebit de utile în *ridicările topografice* ulterioare, deoarece sînt ușor vizibile, chiar de la distanțe mari.

Se cere compensarea prin metoda celor mai mici pătrate a observațiilor efectuate.

Se acceptă că în punctele vechi $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_k$ (fig. 21-4, *a*) au fost efectuate observații azimutale de aceeași precizie. Se consideră cunoscute coordonatele provizorii ale punctului nou P și, prin urmare, și orientările provizorii, coeficienții de direcție a și b.

Sistemul ecuațiilor corecțiilor, scris în fiecare din punctele vechi, va cuprinde mai multe ecuații de tipul (21-31) și doar o singură ecuație de tipul (21-32). Astfel, pentru stația P_i rezultă:

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{d}z_i + && l_{iA} = v_{iA}; && p = 1;\\
&-\mathrm{d}z_i + && l_{iB} = v_{iB}; && p = 1;\\
&\quad\ldots && \quad\ldots && \quad\ldots\\
&-\mathrm{d}z_i + && l_{iS} = v_{iS}; && p = 1;\\
&-\mathrm{d}z_i + a_{iP}\,\mathrm{d}x_P + b_{iP}\,\mathrm{d}y_P + && l_{iP} = v_{iP}; && p = 1.
\end{aligned} \qquad (21\text{-}55)$$



a *b*

Fig. 21-4. Intersecții multiple înainte.

Aplicînd prima regulă de echivalență a ecuațiilor, se va elimina necunoscuta $\mathrm{d}z_i$ și vor rămîne numai următoarele două ecuații care trebuie avute în vedere în continuare:

$$\begin{aligned}
&\textit{pentru viza } P_iP: && a_{iP}\,\mathrm{d}x_P + b_{iP}\,\mathrm{d}y_P + l_{iP} = v'_{iP}; && p = 1;\\
&\textit{ecuația sumă}: && a_{iP}\,\mathrm{d}x_P + b_{iP}\,\mathrm{d}y_P = v'_S && p = -\frac{1}{s}.
\end{aligned} \qquad (21\text{-}56)$$

S-a păstrat convenția că $[l] = 0$ pentru fiecare stație, astfel încît este necesar ca în media prin care se determină unghiul de orientare provizoriu al stației z_i^0, să se includă și viza spre punctul nou.

Prin aplicarea celei de-a doua reguli de echivalență, sistemul (21-56) poate fi înlocuit prin următoarea ecuație:

$$a_{iP}\,\mathrm{d}x_P + b_{iP}\,\mathrm{d}y_P + \frac{s}{s-1}\,l_{iP} = v''_{iP}; \quad p = \frac{s-1}{s}. \qquad (21\text{-}57)$$

În acest fel, sistemul ecuațiilor corecțiilor care concură la determinarea punctului nou P va fi format doar din k ecuații de forma (21-57), în care intervin numai necunoscutele $\mathrm{d}x_P$ și $\mathrm{d}y_P$.

Se observă că aceste ecuații au ponderi diferite: cu cît numărul vizelor de orientare (către punctele vechi) este mai mare, cu atît ponderile cresc.

După rezolvarea ecuațiilor normale (deducerea necunoscutelor $\mathrm{d}x_P$ și $\mathrm{d}y_P$), se calculează necunoscutele $\mathrm{d}z$ cu relații de tipul:

$$\mathrm{d}z_i = \frac{a_{iP}}{s}\,\mathrm{d}x_P + \frac{b_{iP}}{s}\,\mathrm{d}y_P, \qquad (21\text{-}58)$$

care sînt deduse din sistemul (21-55), pe baza condițiilor $[l] = 0$ și $[v] = 0$ pentru fiecare stație.

Corecțiile v pentru toate observațiile rezultă din sistemele de forma (21-55), iar evaluarea preciziei se realizează cu relații specifice prelucrării observațiilor indirecte.

Exemplu. Pentru a crea o bază de comparație între rezultatele obținute prin prelucrări care au la bază modele funcțional-stochastice diferite, exemplul numeric se referă la aceleași observații ca în 21.5.3. De această dată, punctul *2* a fost determinat independent, prin intersecții multiple înainte, așa cum se prezintă în figura 21-4, *b*.

Coordonatele provizorii folosite sînt prezentate în tabelul 21-12. Ecuațiile netransformate ale corecțiilor sînt conținute de tabelul 21-13. În tabelul 21-14 sînt prezentate ecuațiile transformate după regula a doua de echivalență, conform relației (21-57). Sistemul ecuațiilor normale este prezentat în tabelul 21-15, iar rezolvarea sa și calculul corecțiilor și al elementelor necesare la estimarea preciziei în tabelul 21-16. Rezultatele complete ale prelucrării sînt conținute de tabelele 21-10 și 21-11.

În aceste tabele se prezintă, pentru comparație, și rezultatele obținute pentru punctele *7* și *2* din figura 21-3, determinate, de asemenea, prin metoda intersecției multiple înainte.

Tabelul 21—12

Punctul	Coordonate provizorii	
	x^0 [m]	y^0 [m]
2	4 988 482,708	4 580 172,384

Tabelul 21-13

Punctul de staţie	Punctul vizat	Direcţii centrate, reduse la planul de proiecţie α_{ij} g	c	cc	Orientări din coordonate θ_{ij} g	c	cc	Unghi de orientare $x_j^i = \theta_{ij} - \alpha_{ij}$ / z_i^0 g	c	cc	Punctul nou 2 dx	dy	$l_x - {}^i_j x = f_i$ [cc]	p_{ij}	v_{ij} (cc)	$-dz_i$ (cc)	Direcţii compensate $\alpha_{ij} = \alpha_{ij} + v_{ij}$ g	c	cc	Controlul compensării $\theta_{ij} = \alpha_{ij} + z_i$ g	c	cc	Orientări θ din coordonate definitive g	c	cc
V	2	251	90	78,96	282	66	16,116	30	75	37,156	2,098	−0,586	2,069	1	2,214		251	90	81,174	282	66	16,41	282	66	16,41
	M	284	13	48,93	314	88	81,948	30	75	33,018			−2,069	1	−2,214	−0,145	284	13	46,716	314	88	81,95	314	88	81,95
	Σ/s							30	75	35,087															
P	S	0	00	09,26	133	89	05,099	133	88	95,839			2,737	1	2,895		0	00	12,155	133	89	05,10	133	89	05,10
	T	19	84	01,52	153	72	93,440	133	88	91,920			−1,182	1	−1,024		19	84	00,496	153	72	93,44	153	72	93,44
	M	303	28	86,04	37	17	75,383	133	88	89,343			−3,759	1	−3,601	0,158	303	28	82,439	37	17	75,38	37	17	75,38
	2	327	26	81,84	61	15	77,145	133	88	95,305	−3,019	2,111	2,204	1	1,730		327	26	83,570	61	15	76,51	61	15	76,51
	Σ/s							133	88	93,100															
M	P	0	00	15,63	237	17	75,383	237	17	59,753			−9,053	1	−9,252		0	00	06,378	237	17	75,38	237	17	75,38
	V	277	71	10,21	114	88	81,948	237	17	71,738			2,932	1	2,733		277	71	12,943	114	88	81,95	114	88	81,95
	S	347	35	67,83	184	53	42,410	237	17	74,580			5,773	1	5,574	−0,196	347	35	73,404	184	53	42,41	184	53	42,41
	2	370	58	92,79	207	76	61,944	237	17	69,154	0,543	−4,431	0,348	1	0,945		370	58	93,735	207	76	62,74	207	76	62,74
	Σ/s							237	17	68,806															
T	P	399	99	91,85	353	72	93,440	353	73	01,590			0,586	1	0,754		399	99	92,604	353	72	93,44	353	72	93,44
	2	54	78	38,32	8	51	41,488	353	73	03,168	−0,375	2,787	2,164	1	1,828	0,168	54	78	40,148	8	51	40,98	8	51	40,98
	S	157	36	95,18	111	09	93,435	353	72	98,256			−2,750	1	−2,582		157	36	92,598	111	09	93,43	111	09	93,43
	Σ/s							353	73	01,004															
S	T	239	16	80,43	311	09	93,435	71	93	13,006			−4,012	1	−3,945		239	16	76,485	311	09	93,44	311	09	93,44
	P	261	95	90,17	333	89	05,099	71	93	14,929			−2,089	1	−2,022		261	95	88,148	333	89	05,10	333	89	05,10
	2	300	74	06,17	372	67	21,846	71	93	15,676	0,965	2,107	−1,342	1	−1,542	0,063	300	74	04,628	372	67	21,58	372	67	21,58
	M	312	60	17,95	384	53	42,410	71	93	24,460			7,442	1	7,509		312	60	25,459	384	53	42,41	384	53	42,41
	Σ/s							71	93	17,018															

Tabelul 21 – 14

Direcţia	Ponderea $p = \frac{s-1}{s}$	2 dx	dy	Termenul liber	Suma
V – 2	0,5	2,098	−0,586	4,138	5,650
P – 2	0,75	−3,019	2,111	2,939	2,031
M – 2	0,75	0,543	−4,431	0,464	−3,424
T – 2	0,667	−0,375	2,787	3,246	5,658
S – 2	0,75	0,965	2,107	−1,789	1,283

Tabelul 21 – 15

	dx	dy	Termenul liber	Suma	Control
	14,882660	−9,02044	−2,88300	2,97922	2,97922
		36,64030	7,00056	34,62042	34,62042
			39,71310	43,83065	43,83065

Tabelul 21 – 16

	dx	dy	l_{ij}	Q_{xx}	Q_{yy}	Suma	Control
	14,88266	−9,02044	−2,88300	−1	0	1,97922	
	−1	0,60610	0,19372	0,6719	0	−0,13299	−0,1329
		36,64030	7,00056	0	−1	33,62042	
		31,17296	5,25316	−0,6061	−1	34,82003	34,82003
		−1	−0,1685	0,0194	0,0321	−1,11699	−1,117

$dx_2 = 0{,}0916$

$dy_2 = -0{,}1685$

	Q	s(m)
	0,0789	0,139
	0,0321	0,090

$[(S - L - Q)dx] = -4{,}11697$

$-[L] = -4{,}11756$

$\sqrt{\frac{249{,}2159}{}} = \pm 4^{cc},99$

21.7. INTERSECȚIA MULTIPLĂ ÎNAPOI

Într-un punct nou din rețeaua de triangulație se efectuează observații azimutale către mai multe puncte vechi din rețea, care nu sînt staționate. Se cere compensarea prin metoda celor mai mici pătrate a observațiilor efectuate.

Asemenea situații sînt, în general, evitate în triangulația de stat, deoarece posibilitățile de orientare a stației sînt mai limitate decît la intersecția multiplă înainte; orientarea stației se va realiza numai prin utilizarea punctelor cu care există legătură directă. Metoda intersecției multiple înapoi este folosită pe cale largă în rețelele de triangulație utilizate la trasarea unor construcții masive.

Se consideră că din punctul nou P (fig. 21-5, *a*) au fost măsurate (cu aceeași precizie) direcții către punctele vechi A, B, ... S.

Sistemul de s ecuații ale corecțiilor, scris pentru punctul P, va fi

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}z_P - a_{PA}\,\mathrm{d}x_P - b_{PA}\,\mathrm{d}y_P + l_{PA} &= v_{PA};\\ -\mathrm{d}z_P - a_{PB}\,\mathrm{d}x_P - b_{PB}\,\mathrm{d}y_P + l_{PB} &= v_{PB};\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots &\\ -\mathrm{d}z_P - a_{PS}\,dx_P - b_{PS}\,\mathrm{d}y_P + l_{PS} &= v_{PS}. \end{aligned} \tag{21-59}$$

Utilizînd condițiile $[v] = 0$ și $[l] = 0$, se poate elimina necunoscuta $\mathrm{d}z_P$ înainte de formarea ecuațiilor normale. Din sistemul (21-59) se obține:

$$\mathrm{d}z_P = -\frac{[a]}{s}\,\mathrm{d}x_P - \frac{[b]}{s}\,\mathrm{d}y_P. \tag{21-60}$$

Se notează:

$$A_{Pj} = \frac{[a]}{s} - a_{Pj}; \quad B_{Pj} = \frac{[b]}{s} - b_{Pj}. \tag{21-61}$$

Din definiție rezultă: $[A] = [B] = 0$ (control).

Introducînd relația (21-60) în condițiile (21-59), se obține următorul sistem de ecuații transformate ale corecțiilor:

$$A_{Pj}\,\mathrm{d}x_P + B_{Pj}\,\mathrm{d}y_P + l_{Pj} = v_{Pj}, \quad j = A, B, \ldots, S. \tag{21-62}$$

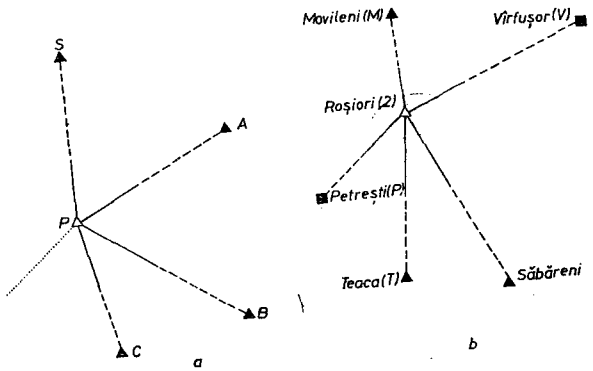


Fig. 21-5. Intersecții multiple înapoi.

Din acest sistem se formează ecuațiile normale, din a căror rezolvare rezultă necunoscutele $\mathrm{d}x_P$ și $\mathrm{d}y_P$, cu care se poate determina și necunoscuta $\mathrm{d}z_P$, din relația (21-60).

Calculele de estimare a preciziei decurg la fel ca în cazurile examinate anterior.

Tabelul 21-17

Punctul	Coordonate provizorii	
	x° (m)	y° (m)
2	4 988 482,708	4 580 172,384

Exemplu. Exemplul numeric se referă la punctul 2 din exemplele numerice prezentate în 21.5.3. și 21.6, situația în cazul examinat aici fiind însă reflectată de figura 21-5, *b*. Coordonatele provizorii sînt cele prezentate în tabelul 21-17, ecuațiile corecțiilor în tabelul 21-18, rezolvarea ecuațiilor normale și calculul preciziei în tabelul 21-19. Rezultatele prelucrării sînt prezentate concentrat în tabelele 21-10 și 21-11, la fel ca în exemplele numerice anterioare. În aceste ultime tabele sînt trecute și rezultatele obținute pentru celelalte două puncte noi, notate 1 și 3, determinate de această dată prin metoda intersecției multiple înapoi. Se observă că în cazul punctului 1 (care are o situație limită de determinare, cu numai o singură viză în plus față de numărul strict necesar de 3 vize) semiaxa $a = 0{,}785$ m a elipsei erorilor este mult mai mare în comparație cu celelalte semiaxe a și b prezentate în tabelul 21-11. Această constatare confirmă, o dată în plus, faptul că metoda intersecției înapoi, chiar în situații de prelucrare riguroasă, poate oferi rezultate neacceptabile atunci cînd geometria determinării este puțin favorabilă.

21.8. INTERSECȚIA MULTIPLĂ COMBINATĂ

Așa cum rezultă și din denumire, în cadrul intersecției multiple combinate *se realizează o unificare a principiilor de determinare expuse în cadrul intersecțiilor multiple înainte și, respectiv, înapoi*. Ilustrativ situația este prezentată de figura 21-6 care urmărește, în continuare, determinarea coordonatelor aceluiași punct 2, de această dată prin metoda intersecției multiple combinate.

La fel ca și în cadrul *grupului de puncte*, în cadrul acestei metode se staționează, de regulă, toate punctele vechi, precum și punctul nou, care urmează a fi determinat.

Ca urmare, ecuațiile inițiale ale corecțiilor vor fi atît de forma (21-55), cît și de forma (21-59). În principiu, ar putea fi aplicate regulile de echivalență, similar ca în 21.5.2., în cazul grupului de puncte, ceea ce ar constitui o primă modalitate de rezolvare.

O altă modalitate de rezolvare constă în eliminarea necunoscutelor $\mathrm{d}z$ separat, pe fiecare punct staționat, după procedeele prezentate în 21.6. și 21.7. În exemplul numeric examinat s-a urmat această cale. În tabelul 21-20 se prezintă ecuațiile inițiale ale corecțiilor (similare cu cele din tabelele 21-14 și 21-18). De menționat că s-au folosit aceleași

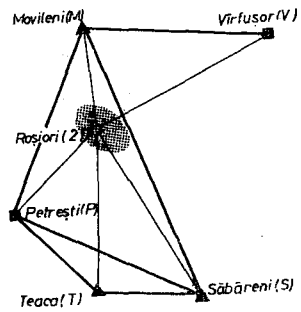


Fig. 21-6. Intersecția combinată.

Tabelul 21–18

Direcția	Orientări provizorii θ°_{2j} g	c	cc	Direcții centrate și reduse la planul de proiecție α°_{2j} g	c	cc	Unghi de orientare $z_2^i = \theta^{\circ}_{2j} - \alpha^{\circ}_{2j}$ g	c	cc	l_{ij}	dx_2 $-a_{2j}$	dy_2 $-b_{2j}$	dx_2 A_{2j}	dy_2 B_{2j}	v_{2j} (cc)	Controlul compensării $\theta_{2j} = \alpha_{2j} + v_{2j} + z_2$ g	c	cc	Orientări θ din coordonate definitive g	c	cc
2 M	7	76	61,944	399	99	93,40	7	76	68,544	8,831	0,543	−4,431	0,5006	−4,8286	2,951	7	76	56,53	7	76	56,53
2 V	82	66	16,116	74	89	59,84	7	76	56,276	−3,438	2,098	−0,586	2,0556	−0,9836	−5,296	82	66	14,71	82	66	14,71
2 S	172	67	21,846	164	90	64,61	7	76	57,236	−2,478	0,965	2,107	0,9226	1,7094	−0,768	172	67	24,01	172	67	24,01
2 T	208	51	41,488	200	74	77,31	7	76	64,178	4,464	−0,375	2,787	−0,4174	2,3894	7,431	208	51	44,91	208	51	44,91
2 P	261	15	77,145	253	39	24,81	7	76	52,335	−7,379	−3,019	2,111	−3,0614	1,7134	−4,318	261	15	80,66	261	15	80,66
$-[a]$									298,569	0,000	0,212	1,988									
$+\frac{[a]}{4}$						$z_2^{\circ} =$	7	76	59,714		−0,0424	−0,3976									

Tabelul 21–19

dx	dy	Termenul liber L_{ij}	Q_{xx}	Q_{yy}	Sumă	Control
14,873675	−9,104731	15,79424	−1	0	20,563184	
−1	0,612137	−1,061892	0,0672	0	−1,3825	−1,3825
$x_2 = -0{,}3379$	35,849867	−45,47254	0,0	−1	−19,72740	
	30,276522	−35,804297	0,6121	−1	−7,13992	−7,1399
	−1	1,182576	0,0202	0,0412	0,235823	0,235823

$y_2 = +1{,}1826$

$[(S - L - Q)dx] = 29{,}67889$

$-[L] = 29{,}6783$

Q	0,0796	0,0330
s(m)	0,209	0,134

$$s_0 = \sqrt{\frac{111{,}2104}{5-3}} = \pm 7^{cc},46$$

coordonate provizorii ca în cazul intersecției înapoi (tabelul 21-17), astfel încît rezultă unele diferențe la calculul coeficienților de direcție a și b specifici intersecției înainte (coeficienții din prima parte a tabelului 21-20, diferă puțin de coeficienții prezentați în tabelul 21-14). Ecuațiile transformate ale ecuațiilor, după regulile din 21-6 și 21-7, sînt prezentate în tabelele 21-21, iar rezolvarea ecuațiilor normale și calculul elementelor necesare estimării preciziei în tabelul 21-22.

Rezultatele prelucrării sînt conținute de tabelele 21-10 și 21-11, la fel ca în exemplificările anterioare. Se observă că și pentru punctul *1* s-au obținut, prin această metodă, rezultate similare din punctul de vedere al preciziei cu cele obținute pentru celelalte puncte noi 2 și 3, ceea ce nu se realizase la metoda intersecției multiple înapoi.

21.9. COMPENSAREA PE GRUPE

Compensarea rețelelor geodezice deosebit de mari prezintă dificultăți de calcul chiar în cazul utilizării calculatoarelor electronice. Din acest motiv rămîne actuală necesitatea aplicării metodelor de compensare pe grupe, a căror elaborare a început încă de la sfîrșitul secolului al XIX-lea. Acestea trebuie să furnizeze rezultate identice cu compensarea în bloc a rețelei geodezice, în condițiile unei împărțiri judicioase a volumului total de calcule pe mai mulți calculatori, adică pe mai multe zone (sectoare) ale rețelei.

Compensarea pe grupe, precum și compensarea riguroasă a rețelelor geodezice deja compensate se impune imperios în următoarele situații:

— cînd se urmărește (pe baza unor convenții internaționale) comasarea unor rețele naționale într-o rețea unică;

— compensarea pe grupe în cadrul diferitelor ordine, astfel încît să se realizeze legături riguroase între rețelele separate, ceea ce conduce la crearea unui sistem național unitar.

Posibilitățile actuale de calcul permit ca fiecare compensare să fie făcută în legătură riguroasă cu rețelele vecine, ceea ce conduce la o înlănțuire treptată a observațiilor efectuate la perioade diferite de timp.

Tabelul 21-20

Punctul de staţie	Punctul vizat	Direcţii centrate, reduse la planul de proiecţie α_{ij}			Orientări din coordonate θ_{ij}			Unghi de orientare $z_j^i = \theta_{ij} - \alpha_{ij}$			Punctul nou 2		$l_x^i - l_x^j = fl_j$ [cc]	p_{ij}	v_{ij} (cc)	$-dx_i$ (cc)	Direcţii compensate $\alpha_{ij} = \alpha_{ij} + v_{ij}$			Controlul compensării $\theta_{ij} = \alpha_{ij} + z_i$			Orientări θ din coordonate definitive		
		g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	dx	dy					g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc
V	2	251	90	78,96	282	66	16,116	30	75	37,156	2,098	−0,586	2,069	1	1,786	0,283	251	90	80,746	282	66	15,55	282	66	15,55
	M	284	13	48,93	314	88	81,948	30	75	38,018			−2,069	1	−1,786		284	13	47,114	314	88	81,95	314	88	81,95
	Σ/s							30	75	35,087			0,000		0,000										
P	S	0	00	09,26	133	89	05,099	133	88	95,839			2,737	1	2,376	−0,361	0	00	11,636	133	89	05,10	133	89	05,10
	T	19	84	01,52	153	72	93,440	133	88	91,920			−1,182	1	−1,543		19	83	99,977	153	72	93,44	153	72	93,44
	M	303	28	86,04	37	17	75,383	133	88	89,343			−3,759	1	−4,120		303	28	81,977	37	17	75,38	37	17	75,38
	2	327	26	81,84	61	15	77,145	133	88	95,305	−3,019	2,111	2,204	1	3,288		327	26	85,128	61	15	78,59	61	15	78,59
	Σ/s							133	88	93,100			0,000		−0,001										
M	P	0	00	15,63	237	17	75,383	237	17	59,753			−9,053	1	−8,484	0,569	0	00	24,114	237	17	75,38	237	17	75,38
	V	277	71	10,21	114	88	81,948	237	17	71,738			2,932	1	3,501		277	71	13,711	114	88	81,95	114	88	81,95
	S	347	35	67,83	184	53	42,410	237	17	74,580			5,773	1	6,342		347	35	74,172	184	53	42,41	184	53	42,41
	2	370	58	92,79	207	76	61,944	237	17	69,154	0,543	−4,431	0,348	1	−1,360		370	58	91,430	7	76	59,66	7	76	59,66
	Σ/s							237	17	68,806			0,000		−0,001										
T	P	399	99	91,85	353	72	93,44	353	73	01,590			0,586	1	0,107	−0,479	399	99	91,743	353	72	93,44	353	72	93,44
	2	54	78	38,32	8	51	41,488	353	73	03,168	−0,375	2,787	2,164	1	3,122		54	78	41,442	8	51	42,93	8	51	42,93
	S	157	36	95,18	111	09	93,435	353	72	98,256			−2,750	1	−3,229		157	36	91,951	111	09	93,44	111	09	93,44
	Σ/s							353	73	01,004			0,000		0,000										
S	T	239	16	80,43	311	09	93,435	71	93	13,006			−4,012	1	−4,243	−0,231	239	16	76,187	311	09	93,44	311	09	93,44
	P	261	95	90,17	333	89	05,099	71	93	14,929			−2,089	1	−2,320		261	95	87,850	33	89	05,10	33	89	05,10
	2	300	74	06,17	372	67	21,846	71	93	15,676	0,965	2,107	−1,342	1	−0,649		300	74	05,521	372	67	22,78	372	67	22,78
	M	312	60	17,95	384	53	42,410	71	93	24,460			7,442	1	7,211		312	60	25,161	384	53	42,41	384	53	42,41
	Σ/s							71	93	17,018			0,000		−0,001										
2	M	399	99	93,43	7	76	61,944	7	76	68,544	0,543	−4,431	8,831	1	6,361	0,193	399	99	99,791	7	76	59,66	7	76	59,66
	V	74	89	59,84	82	66	16,116	7	76	56,276	2,098	−0,586	−3,438	1	−4,199		74	89	55,641	82	66	15,55	82	66	15,55
	S	164	90	64,61	172	67	21,846	7	76	57,236	0,965	2,107	−2,478	1	−1,747		164	90	63,063	172	67	22,78	172	67	22,78
	T	200	74	77,31	208	51	41,488	7	76	64,178	−0,375	2,787	4,464	1	5,709		200	74	83,019	208	51	42,93	208	51	42,93
	P	253	39	24,81	261	15	77,145	7	76	52,335	−3,019	2,111	−7,379	1	−6,125		253	39	18,685	261	15	78,59	261	15	78,59
	Σ/s							7	76	59,714	0,212	1,988	0,0000		−0,001										

Tabelul 21-21

Direcţii	Ponderea	Punctul nou (2) dx	Punctul nou (2) dy	Termenul liber	Suma
V − 2	0,500	2,098	−0,586	4,138	5,650
P − 2	0,750	−3,019	2,111	2,939	2,031
M − 2	0,750	0,543	−4,431	0,464	−3,424
T − 2	0,667	−0,375	2,787	3,246	5,658
S − 2	0,750	0,965	2,107	−1,789	1,283
2 − V	1	−2,0556	0,9836	3,438	2,366
2 − P	1	3,0614	−1,7134	7,379	8,727
2 − M	1	−0,5006	4,8286	−8,831	−4,503
2 − T	1	0,4174	−2,3894	−4,464	−6,436
2 − S	1	0,9226	−1,7094	2,478	−0,1540

Tabelul 21-22

	dx	dy	L_{ij}	Q_{xx}	Q_{yy}	Suma	Control
	29,756335	−18,125171	12,91124	−1	0	23,542404	
	−1	0,609120	−0,433899	0,0336	0	−0,791173	−0,79118
		72,490167	−38,47198	0	−1	14,893016	
		61,449768	−30,607489	−0,60912	−1	29,233159	29,2316
		−1	0,498090	0,0099	0,0163	−0,47572	−0,4757

$dx_2 = -0,1305$

$dy_2 = 0,4981$

$[(S - L - g)dx] = 25,56134$

$[L] = 25,56134$

	Q	s (m)
	0,0396	0,106
	0,0163	0,069

$$s_0 = \sqrt{\frac{395,7411}{22-8}} = \pm 5^{cc},32$$

O primă operaţiune specifică este constituită de alegerea liniei de separare sau de graniţă între grupele de compensare (v. 21.9.2.).

Se cunosc mai multe procedee de compensare pe grupe sau de comasare a reţelelor geodezice deja compensate. (v. *Ghiţău*, 1970).

21.9.1. PROCEDEUL HELMERT – PRANIS PRANIEVICI

Este unul dintre procedeele cele mai cunoscute şi întrebuinţate practic în toate tipurile de reţele geodezice. Metoda a fost descrisă teoretic de către *Helmert* în anul 1880 la capitolul *compensarea seriilor incomplete*. În anul 1935 *Olander* publică pentru prima oară aplicarea metodei la com-

pensarea *rețelei de triangulație de ord. I finlandeză*. Utilizarea largă a metodei la *compensarea triangulației Uniunii Sovietice*, sub conducerea lui *Pranis-Pranievici* a constituit un pas important spre consacrare și universalitate.

Actuala rețea de triangulație *vest-europeană* este prelucrată,de asemenea, după această metodă.

Se presupune că rețeaua de triangulație avută în vedere este împărțită în două grupe, iar sistemul general al ecuațiilor are următorul aspect:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= \mathbf{B}_I \mathbf{x}_I + \mathbf{C}_I \mathbf{x}_{I\text{-}II} + \mathbf{L}_I \quad \text{ponderea } \mathbf{P}_I \\ \mathbf{v}_{II} &= \mathbf{B}_{II} \mathbf{x}_{II} + \mathbf{C}_{II} \mathbf{x}_{I\text{-}II} + \mathbf{L}_{II}; \quad \text{ponderea } \mathbf{P}_{II} \end{aligned} \tag{21-63}$$

Notațiile sînt similare cu cele din 9.2; elementele care intervin separat numai în cele două rețele au fost notate cu indicii I, respectiv II, iar elementele comune (sau de graniță) cu indicele I-II. În această împărțire s-a avut în vedere criteriul principal de creare a sectoarelor: *fiecare observație geodezică aparține univoc unui sector și numai acelui sector*. Este evident că sistemele (9-26) și (21-63) sînt echivalente, deosebirile fiind doar de natură formală (de scriere).

Pentru a rezolva *în bloc* sistemul (21-63), trebuie îndeplinite cunoscutele relații specifice măsurătorilor indirecte (de trecere la ecuațiile normale):

$$\mathbf{B}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{v}_I = 0; \quad \mathbf{B}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{v}_{II} = 0; \quad \mathbf{C}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{v}_I + \mathbf{C}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{v}_{II} = 0. \tag{21-64}$$

Prin intermediul relațiilor (21-64), se obține următorul sistem de ecuații normale:

$$\mathbf{B}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{B}_I \mathbf{x}_I + \mathbf{B}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{C}_I \mathbf{x}_{I\text{-}II} + \mathbf{B}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{L}_I = 0 \tag{21-65 a}$$

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{x}_{II} + \mathbf{B}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{C}_{II} \mathbf{x}_{I\text{-}II} + \mathbf{B}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{L}_{II} = 0 \tag{21-65 b}$$

$$\mathbf{C}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{B}_I \mathbf{x} + \mathbf{C}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{C}_I \mathbf{x}_{I\text{-}II} + \mathbf{C}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{B}_{II} \mathbf{x}_{II} + \mathbf{C}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{C}_{II} \mathbf{x}_{I\text{-}II} + \mathbf{C}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{L}_I + \mathbf{C}_{II}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{L}_{II} = 0 \tag{21-65 c}$$

Pentru comoditate se folosesc următoarele notații:

$${}_I\mathbf{N}_{BB} = \mathbf{B}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{B}_I; \quad {}_I\mathbf{N}_{BC} = \mathbf{B}_I^T \mathbf{P}_I \mathbf{C}_I; \quad \text{ș.a.m.d.} \tag{21-66}$$

În acest mod, sistemul (21-65) se poate scrie simplificat în modul următor:

$${}_I\mathbf{N}_{BB} \mathbf{x}_I + {}_I\mathbf{N}_{BC} \mathbf{x}_{I\text{-}II} + {}_I\mathbf{N}_{BL} = 0. \tag{21-67 a}$$

$${}_{II}\mathbf{N}_{BB} \mathbf{x}_{II} + {}_{II}\mathbf{N}_{BC} \mathbf{x}_{I\text{-}II} + {}_{II}\mathbf{N}_{BL} = 0. \tag{21-67 b}$$

$${}_I\mathbf{N}_{BC}^T \mathbf{x}_I + {}_{II}\mathbf{N}_{BC}^T \mathbf{x}_{II} + ({}_I\mathbf{N}_{CC} + {}_{II}\mathbf{N}_{CC}) \mathbf{x}_{I\text{-}II} + ({}_I\mathbf{N}_{CL} + {}_{II}\mathbf{N}_{CL}) = 0. \tag{21-67 c}$$

Matricele ${}_I\mathbf{N}_{BB}$ și ${}_{II}\mathbf{N}_{BB}$ sînt pătrate și simetrice în raport cu diagonala principală, astfel că pot fi folosite pentru eliminarea necunoscutelor $\mathbf{x}_I$ și $\mathbf{x}_{II}$. După ordonare, se obține:

$$({}_I\mathbf{N}_{CC} - {}_I\mathbf{N}_{BC}^T {}_I\mathbf{N}_{BB}^{-1} {}_I\mathbf{N}_{BC}) \mathbf{x}_{I\text{-}II} + ({}_{II}\mathbf{N}_{CC} - {}_{II}\mathbf{N}_{BC}^T {}_{II}\mathbf{N}_{BB}^{-1} {}_{II}\mathbf{N}_{BC}) \mathbf{x}_{I\text{-}II} + ({}_I\mathbf{N}_{CL} - {}_I\mathbf{N}_{BC}^T {}_I\mathbf{N}_{BB}^{-1} {}_I\mathbf{N}_{BL}) + ({}_{II}\mathbf{N}_{CL} - {}_{II}\mathbf{N}_{BC}^T {}_I\mathbf{N}_{BB}^{-1} {}_{II}\mathbf{N}_{BL}) = 0. \tag{21-68}$$

Coeficienții necunoscutelor și ambele părți componente ale termenilor liberi din sistemul (21-68) se pot obține prin tratarea separată a celor două grupe de ecuații ale corecțiilor cuprinse în sistemul (21-63). Într-adevăr,

sistemul de ecuații normale corespunzător *numai primei grupe* de ecuații din (21-63) este:

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{N}_{BB} \mathbf{x}_I^* + {}_I\mathbf{N}_{BC} \mathbf{x}_{I\text{-}II}^* + {}_I\mathbf{N}_{BL} &= 0; \\ {}_I\mathbf{N}_{BC}^T \mathbf{x}_I^* + {}_I\mathbf{N}_{CC} \mathbf{x}_{I\text{-}II}^* + {}_I\mathbf{N}_{CL} &= 0 \end{aligned} \tag{21-69}$$

Aici s-au notat cu $\mathbf{x}_I^*$ și $\mathbf{x}_{I\text{-}II}^*$ valorile pe care le-ar lua necunoscutele $\mathbf{x}_I$ și, respectiv, $\mathbf{x}_{I\text{-}II}$ în cazul în care s-ar considera numai prima grupă a ecuațiilor din blocul general (21-63), ceea ce ar însemna, evident, o rezolvare parțială, incompletă.

După eliminarea necunoscutei $\mathbf{x}_I^*$ din sistemul (21-69) se obține:

$$({}_I\mathbf{N}_{CC} - {}_I\mathbf{N}_{BC}^T {}_I\mathbf{N}_{BB}^{-1} {}_I\mathbf{N}_{BC}) \mathbf{x}_{I\text{-}II}^* + ({}_I\mathbf{N}_{CL} - {}_I\mathbf{N}_{BC}^T {}_I\mathbf{N}_{BB}^{-1} {}_I\mathbf{N}_{BL}) = 0 \tag{21-70}$$

Se observă că matricea coeficienților necunoscutei $\mathbf{x}_{I\text{-}II}^*$ din sistemul (21-70) este o parte componentă a relațiilor (21-68); observația este valabilă și pentru termenul liber.

Procedînd analog și cu grupa a doua de ecuații ale corecțiilor din sistemul (21-63), se obțin rezultate similare cu relația (21-70); acestea se pot scrie concentrat sub forma *Gauss-algoritmică*:

$$[{}_I\mathbf{N}_{CC} \cdot \mathbf{u}_1] \mathbf{x}_{I\text{-}II}^* + [{}_I\mathbf{N}_{CL} \cdot \mathbf{u}_1] = 0; \tag{21-71 a}$$

$$[{}_{II}\mathbf{N}_{CC} \cdot \mathbf{u}_2] \mathbf{x}_{I\text{-}II}^{**} + [{}_{II}\mathbf{N}_{CL} \cdot \mathbf{u}_2] = 0, \tag{21-71 b}$$

unde $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$ reprezintă numărul necunoscutelor interioare existente în grupa I, respectiv II. Rezumînd, se poate enunța *principiul Helmert-Pranis Pranievici* astfel:

— se formează sistemele ecuațiilor corecțiilor și apoi sistemele ecuațiilor normale, separat pe grupele în care a fost împărțită rețeaua de triangulație, avîndu-se grijă ca necunoscutele de graniță să ocupe, grupat, poziția ultimă în aceste sisteme;

— se reduc separat sistemele parțiale de ecuații normale, specifice celor două grupe, pînă cînd se obțin toți coeficienții algoritmici *Gauss* pentru necunoscutele de graniță, precum și termenii liberi corespunzători [relațiile (21-71, *a*) și (21-71, *b*)]. După adunarea corespunzătoare a acestor coeficienți și separat a termenilor liberi, se obține relația (21-68), din care se determină necunoscutele de graniță, deoarece această relație corespunde rezolvării în bloc a sistemului de ecuații normale;

— apoi, se consideră:

$$\mathbf{x}_{I\text{-}II}^* \equiv \mathbf{x}_{I\text{-}II} \equiv \mathbf{x}_{I\text{-}II}^{**}, \tag{21-72}$$

și prin calcul invers se obțin, din sistemele de ecuații reduse algoritmice în etapa anterioară, necunoscutele interioare $\mathbf{x}_1$ și respectiv $\mathbf{x}_2$. O imagine schematică a principiului metodei se poate urmări și în figura 21-7.

Metoda *Helmert-Pranis Pranievici* poate fi folosită la comasarea a două rețele deja compensate, numai în cazul în care punctele de graniță au ocupat pozițiile descrise în figura 12-7.

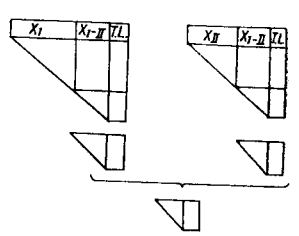


Fig. 21-7. Schemă de rezolvare la procedeul *Helmert-Pranis Pranievici.*

O b s e r v a ț i e. Rețeaua de triangulație poate fi împărțită în mai multe grupe, metodologia de rezolvare fiind cea arătată.

H. Wolf (1968) subliniază mai multe particularităţi care pot interveni în separarea pe grupe a unei mari reţele de triangulaţie, în scopul compensării ei prin aplicarea procedeului *Helmert-Pranis Pranievici*, dintre care se menţionează:

- Direcţiile măsurate unitar într-un punct de graniţă se pot împărţi arbitrar grupelor considerate (fig. 21-8, *a*). Necunoscuta dz aferentă nu va putea fi eliminată înainte de formarea ecuaţiilor normale, după procedeele expuse în acest capitol, deoarece grupul total de ecuaţii ale corecţiilor a fost împărţit pe grupe. În fiecare din aceste părţi trebuie să existe una şi aceeaşi valoare a necunoscutei dz, corespunzătoare grupului întreg de observaţii efectuate în punct, ceea ce nu s-ar obţine atunci cînd pentru fiecare din componentele acestui grup s-ar determina cîte o necunoscută dz.
- În punctele interioare se poate efectua însă eliminarea necunoscutelor dz, înainte de formarea ecuaţiilor normale.

Ca urmare a acestei restricţii, *regula a doua Schreiber* poate fi aplicată numai direcţiilor măsurate între punctele interioare (deoarece nu mai conţin necunoscute dz).

- În cazul în care într-un punct de graniţă direcţiile de separare au fost dublu observate, în fiecare grupă (fig. 21-8, *b*), fiecărui sector al compensării îi va reveni cîte o parte distinctă a fasciculului de direcţii observate în punctul considerat.

Părţile componente ale acestui fascicul sînt reciproc independente şi vor putea fi incluse separat în grupele reţelei, cu necunoscutele de orientare dz proprii, care vor putea fi eliminate înainte de formarea ecuaţiilor normale.

- S-ar putea alege ca limită între zone şi direcţii măsurate o singură dată (fig 21-8, *c*). Aceste direcţii vor interveni ***în ambele grupe***, însă numai cu o jumătate din ponderea unei direcţii care intervine într-o singură grupă.

Şi în asemenea situaţie necunoscuta dz nu poate fi eliminată înainte de formarea ecuaţiilor normale.

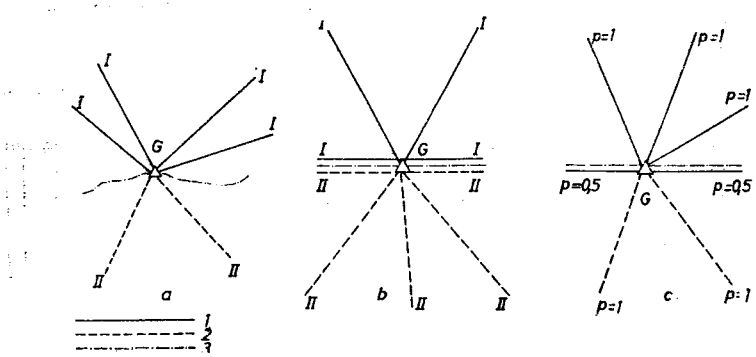


Fig. 21-8. Posibilităţi de separare pe grupe a unei reţele de triangulaţie:
1 — observaţii azimutale efectuate în grupa I; *2* — observaţii azimutale efectuate în grupa II; *3* — linie de separare (graniţă).

Capitolul 22
PRELUCRAREA OBSERVAŢIILOR DIN REŢELELE DE TRIANGULAŢIE PRIN METODA OBSERVAŢIILOR CONDIŢIONATE

22.1. CONSIDERAŢIUNI GENERALE

Formulele principale după care se realizează prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observaţiilor condiţionate au fost expuse în 9.1 şi 9.3.

Pentru o reţea dată, prin geometria sa şi prin măsurătorile geodezice efectuate în reţea, se obţin *aceleaşi rezultate* prin aplicarea metodelor observaţiilor indirecte şi respectiv condiţionate.

Volumul de calcul necesar la compensarea unei reţele de triangulaţie este însă diferit în cadrul utilizării observaţiilor indirecte şi respectiv condiţionate, depinzînd de configuraţia geometrică a reţelei şi, ca o consecinţă directă, de numărul de ecuaţii normale care rezultă. Se disting următoarele două situaţii tipice:

— pentru anumite reţele de triangulaţie, metoda observaţiilor condiţionate poate fi mai avantajoasă. Astfel, de exemplu, pentru reţeaua de triangulaţie din figura 22-1 rezultă evident n ecuaţii de condiţie:

$$A_i + B_i + C_i = 200^g; \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{22-1}$$

şi ca urmare, n ecuaţii normale. Dacă s-ar compensa această reţea prin metoda observaţiilor indirecte ar rezulta $2n$ ecuaţii normale (pentru fiecare punct nou cîte 2 necunoscute).

Astfel de reţele de triangulaţie, sub forma unor lanţuri de triunghiuri şi patrulatere geodezice, cu puţine legături la ordinul superior, se pretează la rezolvări prin metoda observaţiilor condiţionate;

— în schimb, dacă ar fi necesar să se prelucreze observaţiile unghiulare din reţeaua reprezentată în figura 22-2, ar rezulta un număr $r = 16$ de ecuaţii normale, determinabil cu relaţia:

$$r = n - u, \tag{9-83}$$

deoarece n = numărul observaţiilor efectuate = 24, iar u = numărul necunoscutelor = 8.

Dacă s-ar utiliza însă metoda observaţiilor indirecte, după aplicarea regulilor de echivalenţă prezentate în 21.1. şi 21.5.2., ar fi necesară rezolvarea a numai 2 ecuaţii normale, ceea ce constituie o economie evidentă de calcule.

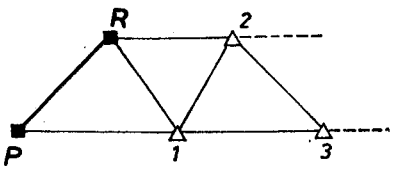


Fig. 22-1. Lanţ simplu de triunghiuri.

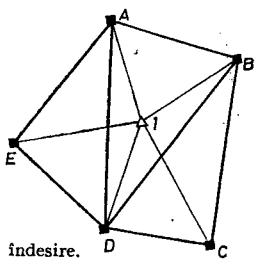


Fig. 22-2. Reţea geodezică de îndesire.

Deci, astfel de rețele de triangulație, cu multiple legături la ordinul superior, în interiorul căruia se dezvoltă ca „rețele de îndesire", se pretează la rezolvări prin metoda observațiilor indirecte.

Desigur, la alegerea unei metode trebuie avută în vedere *totalitatea calculelor* care intervin, însă dimensiunea sistemului ecuațiilor normale reprezintă aproape întotdeauna indicele cel mai reprezentativ în ceea ce privește volumul de calcul necesar.

Atunci cînd se aplică metoda observațiilor condiționate trebuie să se depună o foarte mare atenție la *stabilirea numărului necesar și suficient de ecuații de condiție* și la scrierea lor corectă. Din acest punct de vedere pot interveni următoarele neajunsuri:

— în cazul în care s-au omis unele ecuații de condiție, rezultatele finale ale compensării vor fi inexacte, doarece nu vor verifica condițiile omise, rezultînd o rețea incomplet geometrizată;

— atunci cînd o ecuație de condiție este consecința altor ecuații deja scrise (suma, diferența lor ș.a.m.d.), va rezulta o nedeterminare, pentru corelata k respectivă obținîndu-se soluția $\frac{0}{0}$. Este de remarcat că asemenea erori pot să rămînă, datorită rotunjirilor de calcul, nedepistate în cazul rezolvărilor la un calculator electronic, astfel încît „rezultatele" finale vor fi complet eronate.

22.2. STABILIREA NUMĂRULUI ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE

Exemplificările care se vor face în cadrul acestui paragraf se vor referi la rețeaua de triangulație din figura 22-3.

În cele ce urmează se va folosi următoarea relație de bază:

$$\boxed{\text{numărul ecuațiilor de condiție}} = \boxed{\text{numărul observațiilor efectuate}} - \boxed{\text{numărul observațiilor strict necesare}}. \quad (22\text{-}2)$$

22.2.1. CONDIȚII INTERIOARE

Pentru stabilirea cu mai mare ușurință a numărului necesar și suficient de ecuații de condiție se va „transforma" rețeaua de triangulație considerată (oricît de complexă) într-o rețea fără constrîngeri (v. 8.3.1). Condi-

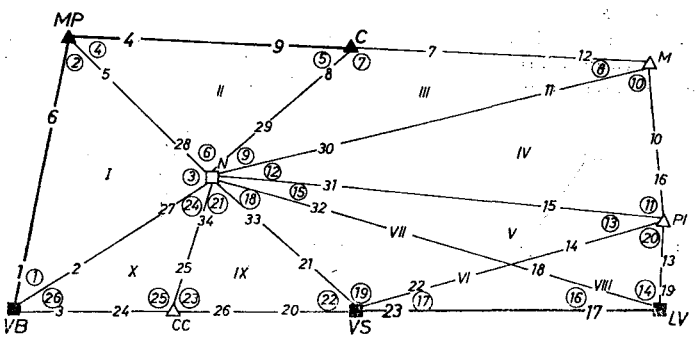


Fig. 22-3. Prelucrarea direcțiilor prin metoda observațiilor condiționate.

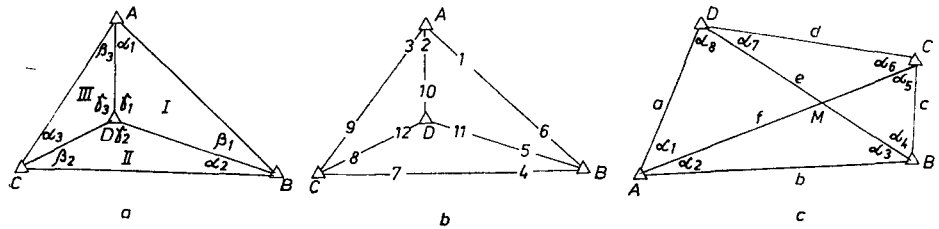


Fig. 22-4. Exemple de ecuații de pol.

țiile geometrice pe care trebuie să le îndeplinească observațiile geodezice într-o asemenea rețea de triangulație se numesc *condiții interioare*. Se disting următoarele tipuri de ecuații posibile:

— *ecuație de tur de orizont sau de stație*: suma unghiurilor măsurate în jurul unui punct trebuie să fie 400^g. Acest gen de ecuații dispare în cazul măsurării direcțiilor, deoarece condiția geometrică este îndeplinită ca urmare a organizării procesului de măsurare;

— *ecuație de sumă de unghiuri* într-o figură geometrică, sau mai simplu *ecuația de figură*: suma unghiurilor măsurate într-un triunghi plan trebuie să fie 200^g ș.a.m.d.;

— *ecuație de pol*, denumită uneori și *ecuație de latură*. Se va prefera prima denumire în scopul separării nete de o altă ecuație de condiție, care trebuie scrisă în cazul existenței în rețea a unor laturi măsurate direct. Necesitatea introducerii ecuației de pol poate fi astfel explicată: pornind de la o latură din rețea, pot exista cel puțin două posibilități complexe de calculare a unei alte laturi din această rețea.

Prin posibilitate complexă se înțelege calculul printr-un număr oarecare de figuri geometrice din rețea și nu o legătură (transmitere) directă.

Astfel de ecuații intervin în următoarele situații:

— poligoane geodezice cu puncte centrale (figurile 22-4, *a* și *b*, în care pol este punctul de triangulație *D*);

— patrulaterul geodezic (fig. 22-4, *c*) în care pol este punctul, nestaționat, de intersecție al diagonalelor;

— *ecuație de condiție pentru coordonatele unui punct*, care pot fi determinate pe cel puțin două căi complexe diferite.

O b s e r v a ț i i. 1. Ecuațiile de condiție sînt interșanjabile, preferîndu-se întotdeauna cele mai simple dintre posibilitățile care există într-o rețea dată. De aceea, în mod obișnuit, ca ecuații interioare se aleg: ecuații de tur de orizont, de figură și de pol.

2. Așa după cum s-a menționat în 15.3 și 15.4, numai *direcțiile* rezultate la compensarea în stație sînt *funcții ortogonale*, și, ca urmare, pot fi prelucrate ca observații independente. *Unghiurile* nu au această proprietate. Din acest motiv exemplul numeric prezentat în manual se va referi la prelucrarea direcțiilor.

3. În manual se vor folosi unghiurile numai ca elemente intermediare, prin care se pot exprima mai simplu anumite relații. Formulele finale vor avea însă în vedere prelucrarea direcțiilor.

4. La stabilirea numărului ecuațiilor de condiție interioare se vor folosi următoarele notații:

P, n_β, l — numărul punctelor, al unghiurilor și respectiv, al laturilor din care este formată rețeaua de triangulație;

C — numărul punctelor centrale, în care s-au măsurat unghiurile în întregul tur de orizont;

P_t — numărul punctelor nestaționate, determinate prin intersecții înainte;

l' — numărul direcțiilor observate într-un singur sens.

22.2.1.1. **Numărul ecuațiilor de condiție interioare în cazul prelucrării unghiurilor.** *Numărul total de ecuații interioare* R. Construcția geometrică a unei rețele oarecare este posibilă numai atunci cînd se cunoaște lungimea unei laturi cu care se determină scara rețelei și a reprezentării. Pentru reprezentarea oricărui punct din rețea vor fi apoi suficiente, de exemplu, două unghiuri.

Rezultă astfel din relația (22-2):

$$R = n_\beta - 2(P - 2) = n_\beta - 2P + 4. \tag{22-3}$$

Numărul ecuațiilor de tur de orizont R_c. Acesta este egal cu numărul punctelor în care s-au efectuat observații azimutale în întregul tur de orizont:

$$R_c = C. \tag{22-4}$$

Numărul ecuațiilor de pol R_p. Pornind de la latura cunoscută din rețea, reprezentarea oricărui alt punct se poate face, din aproape în aproape, prin intermediul a cîte două laturi. Aplicînd relația (22-2) rezultă:

$$R_p = l - \{1 + 2(P - 2)\} = l - 2P + 3. \tag{22-5}$$

Numărul ecuațiilor de figură R_f. Deoarece:

$$R_f = R - (R_c + R_p),$$

rezultă:

$$R_f = n_\beta - l - C + 1. \tag{22-6}$$

22.2.1.2. **Numărul ecuațiilor de condiție interioare în cazul prelucrării direcțiilor.** În fiecare punct de stație i se pot forma din cele n_α^i direcții măsurate, un număr de $n_\alpha^i - 1$ unghiuri (excepție de la această regulă fac punctele centrale C); pentru întreaga rețea de triangulație va rezulta:

$$n_\beta = n_\alpha - P + P_t + C = 2l - l' - P + P_t + C. \tag{22-7}$$

Introducînd această relație în ecuațiile (22-3) — (22-6), rezultă:

$$R_c = 0; \tag{22-8}$$

$$R_p = l - 2P + 3; \tag{22-9}$$

$$R_f = l - l' - P + P_t + 1; \tag{22-10}$$

$$R = 2l - l' - 3P + P_t + 4. \tag{22-11}$$

22.2.2. CONDIȚII EXTERIOARE

Poziționarea unei rețele de triangulație pe elipsoid sau în planul de proiecție este asigurată prin cunoașterea coordonatelor unui punct, a lungimii unei laturi și a azimutului (orientării) unei laturi. Fiecărui element suplimentar existent în rețea (care poate proveni dintr-o rețea de ordin superior sau dintr-o măsurare directă): coordonate, laturi, azimute (orientări) îi corespunde o ecuație de condiție. Astfel de condiții se numesc

exterioare și vor fi prin urmare: ecuații de acord pe latură, de acord pe azimut (orientare) și de acord pe coordonate (plane x, y sau geodezice B, L).

Observație. Este de la sine înțeles că pentru două puncte de triangulație aflate în legătură nemijlocită nu se pot scrie ecuații de condiție de acord pe coordonate. Astfel de grupuri de puncte vechi, aflate în legătură *nemijlocită*, au din acest punct de vedere un rol funcțional identic cu cel pe care îl are un singur punct de coordonate cunoscute.

Exemple:

— în rețeaua din figura 22-3 sînt două astfel de grupuri: pe de o parte, punctele *VB*, *MP*, *C*, iar pe de altă parte, punctele *VS*, *LV*. Rezultă că vor fi necesare doar două ecuații de condiție de acord pe coordonatele x, y între cele două grupuri;

— în rețeaua din figura 22-2 nu intervin ecuații de condiție de acord pe coordonatele x, y, deoarece toate punctele vechi sînt în legătură nemijlocită.

22.2.3. EXEMPLU

Se consideră rețeaua de triangulație din figura 22-3, în care s-au măsurat direcții. Se cere stabilirea numărului necesar și suficient de ecuații de condiție.

— Se observă că: $P = 9$; $l = 17$; $P_t = 0$; $l' = 0$.

— Ecuații interioare:

$$R = 11;\ R_p = 2;\ R_f = 9$$

— Ecuații exterioare:

— acord pe laturi;	$3 - 1 = 2$
— acord pe orientări;	$3 - 1 = 2$
— acord pe coordonate;	$= 2$
Total	6

— Total ecuații de condiție $r = 11 + 6 = 17$.

— Verificarea cu relația (9-83), prin reducerea la observații indirecte:

n = numărul direcțiilor măsurate = 34;

u = numărul necunoscutelor $= 9 + 4 \cdot 2 = 17$,

$$r = n - u = 17.$$

22.3. FORME ALE ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE

În cele ce urmează vom examina formele concrete pe care le pot lua ecuațiile de condiție, în funcție de elementele măsurate.

22.3.1. ECUAȚIA DE TUR DE ORIZONT SAU DE STAȚIE

Ecuația de tur de orizont sau de stație intervine numai în cazul prelucrării unghiurilor. Într-un punct central (de exemplu punctul N din figura 22-3), în care s-au măsurat toate unghiurile β în turul de orizont, trebuie îndeplinită condiția geometrică (aceeași pentru elipsoid și pentru planul de proiecție):

$$\sum_{i=1}^{t} \beta_i = 400^g. \tag{22-12}$$

Introducînd:

$$\beta_i = \beta_i^0 + v_i, \tag{22-13}$$

rezultă ecuația de condiție liniarizată:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_i + \omega_T = 0; \qquad \omega_T = \sum_{i=1}^{t} \beta_i^0 - 400^g. \tag{22-14}$$

22.3.2. ECUAȚIA DE FIGURĂ

Se consideră o figură geometrică închisă cu k vîrfuri, în care se cunosc direcțiile măsurate, reduse la suprafața de referință.

Se notează cu β valorile unghiurilor din vîrfurile figurii geometrice considerate, care se pot calcula după cunoașterea direcțiilor compensate.

Pe elipsoidul de referință va trebui îndeplinită următoarea ecuație de condiție:

$$\sum \beta_i = (k-2)\ 200^g + \varepsilon, \tag{22-15}$$

unde ε este excesul sferic al figurii considerate (7.1.1.). Din relațiile (22-13) și (22-15) rezultă ecuația de condiție liniarizată:

$$v_1 + \ldots + v_k + \omega_f = 0; \quad \omega_f = \sum \beta_i^0 - \{(k-2)\ 200^g + \varepsilon\}. \tag{22-16}$$

În planul de proiecție ecuațiile (22-15) și (22-16) au aceeași formă, cu particularizarea $\varepsilon = 0$.

Trecerea la prelucrarea direcțiilor, care va fi realizată și în cazul celorlalte forme de ecuații, se obține prin exprimarea unghiurilor ca diferențe de două direcții de forma:

$$\beta_1 = (2) - (1). \tag{22-17}$$

În acest fel, pentru un triunghi, în care intervin șase direcții rezultă:

$$-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 + \omega_f^d = 0, \tag{22-18}$$

unde:

$$\omega_f^d = \{(2)^\circ - (1)^\circ + \ldots + (6)^\circ - (5)^\circ\} - 200^g, \tag{22-19}$$

cu $(1)^\circ \ldots (6)^\circ$ fiind notate direcțiile centrate și reduse la planul de proiecție.

Observație. Suma coeficienților corecțiilor v într-o ecuație liniarizată, scrisă în cazul compensării direcțiilor, este *întotdeauna* egală cu zero. Aceasta reprezintă și un control utilizat în rezolvările practice.

22.3.3. ECUAȚIA DE POL

Se consideră poligonul cu punct central din figura 22-4, *a*, *b*. Într-o asemenea figură geometrică trebuie îndeplinită, evident, următoarea ecuație de condiție:

$$\frac{DB}{DA} \cdot \frac{DA}{DC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1, \tag{22-20}$$

punctul central D îndeplinind *rolul de pol*.

Considerînd unghiurile intermediare α, β din figura 22-4, *a*, ecuația (22-20) se poate scrie și sub forma:

$$P_{\sin\alpha} - P_{\sin\beta} = 0, \tag{22-21}$$

unde:

$$P_{\sin\alpha} = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3; \quad P_{\sin\beta} = \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3. \tag{22-22}$$

Relația (22-21) poate fi liniarizată prin aplicarea formulelor generale (9-70) — (9-72). Se observă că:

$$\left(\frac{\partial P_{\sin x}}{\partial x}\right) = P_{\sin x^\circ} \cdot \operatorname{ctg}\ x_i^0; \qquad x = \alpha, \beta, \tag{22-22}$$

astfel că relația (22-21) devine:

$$\frac{P_{\sin\alpha^\circ}}{\rho^{cc}} [\operatorname{ctg}\ \alpha^\circ \cdot v_\alpha] - \frac{P_{\sin\beta^\circ}}{\rho^{cc}} [\operatorname{ctg}\ \beta^\circ \cdot v_\beta] + \omega_p = 0, \tag{22-23}$$

unde:

$$\omega_p = P_{\sin\alpha^\circ} - P_{\sin\beta^\circ}. \tag{22-24}$$

Deoarece coeficienții corecțiilor v se calculează, în general, cu 3—4 zecimale sigure. se obține din relația (22-23) forma ecuației liniarizate de pol:

$$[\operatorname{ctg}\ \alpha^\circ\ v_\alpha] - [\operatorname{ctg}\ \beta^\circ\ v_\beta] + \omega_p^{cc} = 0, \tag{22-25}$$

unde:

$$\omega_p^{cc} = \rho^{cc} \left\{1 - \frac{P_{\sin\beta^\circ}}{P_{\sin\alpha^\circ}}\right\}. \tag{22-26}$$

Pentru deducerea ecuației liniarizate de pol la *prelucrarea direcțiilor* se procedează ca în 22.3.2., prin exprimarea corecțiilor unghiurilor ca diferențe de corecții pentru direcții. Astfel, de exemplu, în locul corecției $v_{\alpha 1}$ se va introduce diferența $v_2 - v_1$ ș.a.m.d. (a se examina figurile 22-4, *a* și 22-4, *b*). În locul relației (22-25) se obțin prin astfel de înlocuiri:

$$\begin{aligned} &-v_1 \operatorname{ctg}\ \alpha_1^0 + v_2 (\operatorname{ctg}\ \alpha_1^0 + \operatorname{ctg}\ \beta_3^0) - v_3 \operatorname{ctg}\ \beta_3^0 - \\ &-v_4 \operatorname{ctg}\ \alpha_4^0 + v_5 (\operatorname{ctg}\ \alpha_2^0 + \operatorname{ctg}\ \beta_1^0) - v_6 \operatorname{ctg}\ \beta_6^0 - \\ &-v_7 \operatorname{ctg}\ \alpha_3^0 + v_8 (\operatorname{ctg}\ \alpha_3^0 + \operatorname{ctg}\ \beta_2^0) - v_9 \operatorname{ctg}\ \beta_9^0 + \omega_p^{cc} = 0. \end{aligned} \tag{22-27}$$

Se observă că ecuațiile de tipul (22-27) se pot scrie direct de pe figura 22-4, *b*, avută în considerație, existînd o regulă simplă pentru stabilirea coeficienților corecțiilor v.

Observații. 1. Într-un patrulater geodezic (fig. 22-4, *c*) există mai multe posibilități de alegere a polului în raport cu care să se scrie ecuația de condiție: oricare din punctele de triangulație *A*, *B*, *C*, *D* sau punctul *M* (nestaționat), sau punctele S_1 și S_2 de intersecție a laturilor patrulaterului. De exemplu:

— ca pol este ales punctul *B*. Din identitatea:

$$\frac{b}{e} \cdot \frac{e}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1 \tag{22-28}$$

ezultă ecuația de condiție:

$$\frac{\sin \alpha_6 \cdot \sin (\alpha_5 + \alpha_6) \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_7 \sin \alpha_5} = 1; \qquad (22\text{-}29)$$

— ca pol este ales punctul M. Din identitatea:

$$\frac{MD}{MA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{MC}{MD} = 1 \qquad (22\text{-}30)$$

ezultă ecuația de condiție:

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_5 \sin \alpha_7}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6 \sin \alpha_8} = 1. \qquad (22\text{-}31)$$

2. Prin aplicarea formulei (22-5) se poate stabili că R_p-1, astfel că din cele șapte posibilități trebuie aleasă varianta care introduce cele mai mici aproximații în calculele de compensare, datorită neglijării termenilor de ordinul II și superior. Potrivit cu teorema *Zachariă-Jordan*, cea mai corespunzătoare posibilitate din acest punct de vedere este dată de relația (22-31), folosită și cel mai mult în rezolvările practice.

3. Prelucrarea pe elipsoidul de referință implică două variante de calcul:

— în ipoteza că triunghiurile elipsoidice mici ale rețelei de triangulație se rezolvă prin metoda aditamentelor, în cadrul căreia unghiurile plane și pe elipsoid sînt aceleași, modificîndu-se numai laturile (v. 7.1.3.), rezultă că relația (22-21) *este valabilă atît în cazul utilizării planului de proiecție, cît și al elipsoidului de referință*;

— dacă se utilizează însă metoda *Legendre* (v. 7.1.2.) de rezolvare a triunghiurilor elipsoidice mici, relația (22-21) va trebui scrisă sub forma:

$$\frac{\sin (\alpha_1^0 - \varepsilon_I/3 + v_{\alpha 1}) \sin (\alpha_2^0 - \varepsilon_{II}/3 + v_{\alpha 2}) \sin (\alpha_3^0 - \varepsilon_{III}/3 + v_{\alpha 3})}{\sin (\beta_1^0 - \varepsilon_I/3 + v_{\beta 1}) \sin (\beta_2^0 - \varepsilon_{II}/3 + v_{\beta 2}) \sin (\beta_3^0 - \varepsilon_{III}/3 + v_{\beta 3})} = 1. \qquad (22\text{-}32)$$

Liniarizarea acestei ecuații conduce la o formă similară cu relațiile (22-25) și (22-26):

— coeficienții corecțiilor v_α și v_β vor fi aceiași, deoarece excesele sferice ε sînt cantități mici (de ordinul a cîtorva secunde de arc), care nu vor modifica valorile coeficienților ecuațiilor de condiție: ctg $\alpha^\circ \approx$ ctg $(\alpha^\circ - \varepsilon/3)$, pentru primele 3—4 cifre semnificative;

— termenii liberi obținuți prin liniarizare trebuie să aibă, prin urmare, aceleași valori numerice cu cele obținute prin utilizarea relației (22-21), ceea ce reprezintă o posibilitate de control:

$$\omega_p^{cc} = \rho^{cc} \left\{1 - \frac{P_{\sin \beta^\circ}}{P_{\sin \alpha^\circ}}\right\} = \rho^{cc} \left\{1 - \frac{P_{\sin (\beta^\circ - \varepsilon)}}{P_{\sin (\alpha^\circ - \varepsilon)}}\right\}. \qquad (22\text{-}33)$$

Dezvoltînd în serie ultimii termeni ai relației (22-33) se obține *controlul Andrae-Helmert*:

$$[\varepsilon (\text{ctg } \alpha^\circ - \text{ctg } \beta^\circ)] = 0,$$

în sumă urmînd să fie incluse toate triunghiurile poligonului cu punct central considerat.

22.3.4. ECUAȚIA DE ACORD PE LATURI

O astfel de ecuație de condiție intervine cînd în rețeaua de triangulație considerată există mai mult decît o singură lungime cunoscută (cap. 18).

Se consideră în figura 22-5 un lanț de triangulație format din triunghiuri, în care se cunosc unghiurile reduse la suprafața de referință α_i^0, β_i^0, γ_i^0 $(i = 1, \ldots, n)$.

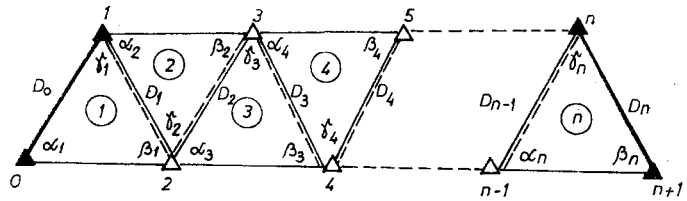


Fig. 22-5. Rețea de triangulație constrînsă.

Din figură rezultă ecuația de condiție de acord între laturile D_0 și D_n:

$$D_n = D_0 \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \ldots \sin \beta_n}. \qquad (22\text{-}34)$$

Se consideră, în cazul general, că și laturile de la capetele rețelei sînt afectate de erori:

$$D_0 = D_0^0 + v_0^D; \qquad D_n = D_n^0 + v_n^D. \qquad (22\text{-}35)$$

În analogie cu relațiile (22-21) — (22-26) rezultă:

$$P_\alpha - P_\beta = 0 \qquad (22\text{-}36)$$

unde:

$$P_\alpha = D_0 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n;$$

$$P_\beta = D_n \sin \beta_1 \sin \beta_2 \ldots \sin \beta_n. \qquad (22\text{-}37)$$

Rezultă forma liniarizată a ecuației de condiție:

$$[\text{ctg } \alpha^\circ \cdot v_\alpha] - [\text{ctg } \beta^\circ \cdot v_\beta] + \rho^{cc} \sigma_0 - \rho^{cc} \sigma_n + \omega_D^{cc} = 0 \qquad (22\text{-}38)$$

$$\omega_D^{cc} = \rho^{cc} \left\{1 - \frac{P_{\beta^\circ}}{P_{\alpha^\circ}}\right\}. \qquad (22\text{-}39)$$

Mărimile σ îndeplinesc rolul unor corecții relative:

$$\sigma_0 = \frac{v_0^D}{D_0^0}; \qquad \sigma_n = \frac{v_n^D}{D_n^0}. \qquad (22\text{-}40)$$

O b s e r v a ț i i. 1. În calculele practice termenul liber ω_D^{cc} poate fi dedus și prin următorul procedeu:

— pornind de la latura inițială D_0^0 se calculează latura finală D_n^c prin transmiteri obișnuite de distanțe, din triunghi în triunghi. Rezultă astfel:

$$D_n^c = D_0^0 \frac{P_{\sin \alpha^\circ}}{P_{\sin \beta^\circ}}. \qquad (20\text{-}41)$$

— diferența „calculat minus dat":

$$\Delta D = D_n^c - D_n^\circ = \frac{P_{\alpha^\circ} - P_{\beta^\circ}}{P_{\sin \beta^\circ}} \qquad (20\text{-}42)$$

va fi apoi folosită la calculul termenului liber:

$$\omega_D^{cc} = \rho^{cc} \frac{\Delta D}{D_n^c}. \qquad (20\text{-}43)$$

2. *Prelucrarea pe elipsoidul de referință* implică cele 2 variante de calcul menționate în 22.3.3. Forma liniarizată a ecuației de acord pe laturi este similară cu relația (22-38):

— coeficienții corecțiilor v_α și v_β sînt aceiași, deoarece ctg $(\alpha^\circ - \varepsilon/3) \approx$ ctg α°, în limita primelor 3—4 zecimale;

— în schimb termenii liberi vor fi calculați în mod diferit, în funcție de metoda utilizată:

— pentru metoda *Legendre*:

$$\omega_D^{cc} = \rho^{cc}\left\{1 - \frac{D_0^0 \sin(\beta_1^0 - \varepsilon_1/3) \ldots \sin(\beta_n^0 - \varepsilon_n/3)}{D_n^0 \sin(\alpha_1^0 - \varepsilon_1/3) \ldots \sin(\alpha_n^0 - \varepsilon_n/3)}\right\}; \qquad (20\text{-}44)$$

— pentru metoda aditamentelor:

$$\omega_D^{cc} = \rho^{cc}\left\{1 - \frac{(D_0^0 - A_0)\sin\beta_1^0 \ldots \sin\beta_n^0}{(D_n^0 - A_n)\sin\alpha_1^0 \ldots \sin\alpha_n^0}\right\}. \qquad (22\text{-}45)$$

În relația (22-45) A_0 și A_n reprezintă aditamentele laturilor D_0 și respectiv D_n, determinate cu formula (7-24).

3. În cazul în care una din distanțele D_k, avute în vedere la scrierea ecuațiilor de acord pe latură sau bază geodezică, este considerată ca lipsită de eroare de măsurare, sau atunci cînd aparține unei rețele vechi de triangulație:

$$v_k^D = \sigma_k = 0. \qquad (20\text{-}46)$$

4. Forma liniarizată a ecuației de acord pe laturi utilizată *în cazul prelucrării direcțiilor* se deduce după metodologia descrisă în 22.3.2.

22.3.5. ECUAȚIA DE ACORD PE AZIMUTE LAPLACE (ELIPSOID) SAU PE ORIENTĂRI (PLANUL DE PROIECȚIE)

22.3.5.1. **Ecuația de acord pe elipsoidul de referință.** Se consideră o rețea de triangulație de tipul celei reprezentate în figura 22-5, în care se cunosc nu numai unghiurile α_i^0, β_i^0, γ_i^0 $(i = 1, 2, .., n)$, reduse la suprafața elipsoidului de referință, ci și azimutele *Laplace* A_0^0 și A_n^0, măsurate la capetele rețelei. După cum s-a mai menționat, azimutele *Laplace* sînt introduse în compensările moderne ca elemente afectate de erori, urmînd a fi compensate:

$$A_i = A_i^0 + v_i^A; \qquad i = 0, n. \qquad (22\text{-}47)$$

Deoarece la transmiterea azimutului pe elipsoid trebuie să se țină seama de unghiul de convergență a meridianelor, notat ΔA (v. 7.2.):

$$A_{ji} = A_{ij} + \Delta A + 200^g, \qquad (22\text{-}48)$$

ecuația de condiție va avea următorul aspect:

$$A_0 - \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + (-1)^n \gamma_n + [\Delta A] \pm 200^g = A_n. \qquad (22\text{-}49)$$

Ecuația liniarizată de condiție a corecțiilor se obține imediat:

$$v_0^A - v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} + \ldots + (-1)^n v_{\gamma_n} - v_n^A + \omega_A^{cc} = 0, \qquad (22\text{-}50)$$

unde:

$$\omega_A^{cc} = A_0^0 - \gamma_1^0 + \gamma_2^0 + \ldots + (-1)^n \gamma_n^0 + [\Delta A] \pm 200^g - A_n^0. \qquad (22\text{-}51)$$

22.3.5.2. **Ecuația de acord în planul de proiecție.** De obicei orientările θ existente în rețelele de triangulație sînt determinate din coordonatele

unor puncte vechi, astfel încît nu vor primi corecții în procesul de prelucrare. Prin urmare *ecuația de acord pe orientări* va avea forma:

$$-v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} + \ldots + (-1)^n v_{\gamma_n} + \omega_\theta^{cc} = 0, \qquad (22\text{-}52)$$

unde:

$$\omega_0^{cc} = \theta_0 - \gamma_1^0 + \gamma_2^0 + \ldots + (-1)^n \gamma_n^0 - \theta_n. \qquad (22\text{-}53)$$

Observații. 1. Unghiurile γ_i^0 din relația (22-53) sînt considerate ca fiind reduse la planul de proiecție, spre deosebire de cele din relația (22-51), care, deși notate identic, au fost considerate ca fiind reduse la suprafața elipsoidului de referință. Această convenție, de care se va uza oricînd va fi necesar în acest capitol, aduce o economie de notații.

2. O formă particulară a ecuației de acord pe azimut (orientare) o constituie *ecuația de unghi fix*, care intervine atunci cînd cele două azimute (orientări) cunoscute se referă la laturi care pornesc din același punct de triangulație.

Astfel, de exemplu, în figura 22-3 se cunosc, din coordonatele punctelor vechi, orientările θ_{MP-C} și θ_{MP-VB} sau, cu alte cuvinte, este cunoscut „unghiul fix" $\sphericalangle VB-MP-C$. Ecuația de acord pe orientare sau de unghi fix va fi în cazul acesta (*direcții măsurate*):

$$\theta_{MP-C} + (6) - (4) = \theta_{MP-V}. \qquad (22\text{-}54)$$

Introducînd corecțiile la direcțiile măsurate, prin relațiile

$(6) = (6)^\circ + v_6$; $(4) = (4)^\circ + v_4$, se obține:

$$v_6 - v_4 + \omega_{MP}^\theta = 0, \qquad (22\text{-}55)$$

unde:

$$\omega_{MP}^\theta = \theta_{MP-C} + (6)^\circ - (4)^\circ - \theta_{MP-VB} \qquad (22\text{-}56)$$

ceea ce reprezintă forma liniarizată a ecuației de condiție de unghi fix în cazul considerat.

22.3.6. ECUAȚII DE ACORD PE COORDONATE

22.3.6.1. **Ecuații de acord în planul de proiecție.** Se consideră o rețea de triangulație de tipul celei reprezentate în figura 22-3; în care se cunosc unghiurile α_i^0, β_i^0, γ_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ reduse la planul de proiecție, coordonatele punctelor inițial și final 0 (X_0^0, Y_0^0); n (X_n^0, Y_n^0), lungimea laturii inițiale D_0^0 și a orientării sale θ_0^0.

În cazul general, în care toate elementele cunoscute vor trebui compensate, primind corecții după compensare, vor fi valabile relații de tipul (22-13), (22-35), (22-47), împreună cu:

$$x_i = x_i^0 + dx_i; \qquad i = 0, n. \qquad (22\text{-}57)$$

Ecuațiile de condiție de acord pe coordonate sînt:

$$x_n = x_0 + [D \cos\theta]_0^{n-1}; \qquad (22\text{-}58)$$

$$y_n = y_0 + [D \sin\theta]_0^{n-1}. \qquad (22\text{-}59)$$

Se va examina în continuare numai ecuația de acord pe coordonata x, pentru coordonata y rezultatul putîndu-se deduce în mod similar.

Forma liniarizată a ecuației (22-58) este:

$$x_n^\circ + dx_n = x_0^0 + dx_0 + [D^\circ \cos\theta^\circ]_0^{n-1} + [dD \cdot \cos\theta^\circ]_0^{n-1} - \frac{1}{\rho^{cc}}[D^\circ \sin\theta^\circ \cdot d\theta^{cc}]_0^{n-1}. \qquad (22\text{-}60)$$

Este necesar să se exprime corecțiile dD și $d\theta$ în raport de corecțiile ce trebuie aduse elementelor cunoscute. Pentru aceasta se scrie:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \theta_0 - \gamma_1 + 200^g;\\
\theta_2 &= \theta_0 - \gamma_1 + \gamma_2;\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
\theta_{n-1} &= \theta_0 - \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + (-1)^{n-1}\gamma_{n-1} \pm 200^g.
\end{aligned} \tag{22-61}$$

Diferențiind relațiile (22-61) și înlocuind în termenii din partea dreaptă $d\theta_0 = v_0^\theta$, $d\gamma_i = v_{\gamma_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, se obține:

$$\begin{aligned}
d\theta_0 &= v_0^\theta;\\
d\theta_1 &= v_0^\theta - v_{\gamma_1};\\
d\theta_2 &= v_0^\theta - v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2};\\
&\dots \quad \dots\\
d\theta_{n-1} &= v_0^\theta - v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2} + \dots + (-1)^{n-1}\, v_{\gamma_{n-1}}.
\end{aligned} \tag{22-62}$$

Pentru exprimarea variațiilor dD în funcție de elementele cunoscute, se folosesc relații de forma:

$$D_1^0 = D_0^0 \frac{\sin \alpha_1^0}{\sin \beta_1^0} \text{ ș.a.m.d.}$$

Logaritmînd, rezultă relația:

$$\ln D_1^0 = \ln D_0^0 + \ln \sin \alpha_1^0 - \ln \sin \beta_1^0,$$

a cărei diferențiere oferă:

$$\frac{dD_1^0}{D_1^0} = \frac{dD_0^0}{D_0^0} + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_1^0 \cdot d\alpha_1^{cc} - \operatorname{ctg} \beta_1^0 \cdot d\beta_1^{cc}). \tag{22-63}$$

Procedînd analog și cu celelalte laturi $D_2^0 \dots D_{n-1}^0$ din rețea, introducînd corecții v în locul elementelor diferențiale și folosind și corecții relative (v. relația 22-40) rezultă:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \sigma_0\\
\sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_1^0 \cdot v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg} \beta_1^0 \cdot v_{\beta_1})\\
\sigma_2 &= \sigma_0 + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_1^0 \cdot v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg} \beta_1^0 \cdot v_{\beta_1}) + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_2^0 \cdot v_{\alpha_2} - \operatorname{ctg} \beta_2^0 \cdot v_{\beta_2})\\
&\vdots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots\\
\sigma_{n-1} &= \sigma_0 + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_1^0 \cdot v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg} \beta_1^0 \cdot v_{\beta_1}) + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_2^0 \cdot v_{\alpha_2} - \operatorname{ctg} \beta_2^0 \cdot v_{\beta_2}) +\\
&\quad + \dots + \frac{1}{\rho^{cc}}(\operatorname{ctg} \alpha_{n-1}^0 \cdot v_{\alpha_{n-1}} - \operatorname{ctg} \beta_{n-1}^0 \cdot v_{\beta_{n-1}}).
\end{aligned} \tag{22-64}$$

Dacă se multiplică fiecare din relațiile sistemelor (22-62) și respectiv (22-64) cu $-D_i^0 \sin\theta_i^0/\rho^{cc}$ și respectiv $D_i^0 \cos\theta_i^0$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, se obțin,

prin însumare, termenii necesari din relația (22-60). În acest fel forma căutată a ecuației de condiție liniarizate, de acord pe coordonatele x, va fi:

$$\begin{aligned}
&\rho^{cc}(x_n^0 - x_0^0)\,\sigma_0 - (y_n^0 - y_0^0)\,v_0^\theta +\\
&+ \operatorname{ctg} \alpha_1^0 \cdot (x_n^0 - x_1^0)\, v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg} \beta_1^0 \cdot (x_n^0 - x_1^0)\, v_{\beta_1} + (y_n^0 - y_1^0)\, v_{\gamma_1} +\\
&+ \operatorname{ctg} \alpha_2^0 \cdot (x_n^0 - x_2^0)\, v_{\alpha_2} - \operatorname{ctg} \beta_2^0 \cdot (x_n^0 - x_2^0)\, v_{\beta_2} - (y_n^0 - y_2^0)\, v_{\gamma_2} +\\
&\quad \dots \qquad \dots \qquad \dots\\
&+ \operatorname{ctg} \alpha_{n-1}^0\,(x_n^0 - x_{n-1}^0)\, v_{\alpha_{(n-1)}} - \operatorname{ctg} \beta_{n-1}^0\,(x_n^0 - x_{n-1}^0)\, v_{\beta_{(n-1)}} +\\
&\quad + (-1)^n\,(y_n^0 - y_{n-1}^0)\, v_{\gamma_{(n-1)}} + \omega_x^{cc} = 0
\end{aligned} \tag{22-65}$$

unde:

$$\omega_x^{cc} = \rho^{cc}\{[D^\circ \cos\theta]_0^{n-1} - (x_n^0 - x_0^0) + dx_0 - dx_n\} \tag{22-66}$$

Analog se obține și ecuația de condiție liniarizată, de acord pe coordonatele y:

$$\begin{aligned}
&\rho^{cc}(y_n^0 - y_0^0)\cdot\sigma_0 + (x_n^0 - x_0^0)\, v_0^\theta +\\
&+ \operatorname{ctg} \alpha_1^0 \cdot (y_n^0 - y_1^0)\cdot v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg} \beta_1^0\,(y_n^0 - y_1^0)\, v_{\beta_1} - (x_n^0 - x_1^0)\, v_{\gamma_1} +\\
&+ \operatorname{ctg} \alpha_2^0 \cdot (y_n^0 - y_2^0)\cdot v_{\alpha_2} - \operatorname{ctg} \beta_2^0\,(y_n^0 - y_2^0)\, v_{\beta_2} + (x_n^0 - x_2^0)\, v_{\gamma_2} +\\
&\quad \dots \qquad \dots \qquad \dots\\
&+ \operatorname{ctg} \alpha_{n-1}^0\,(y_n^0 - y_{n-1}^0)\, v_{\alpha_{n-1}} - \operatorname{ctg} \beta_{n-1}^0\,(y_n^0 - y_{n-1}^0)\, v_{\beta_{n-1}} +\\
&\quad + (-1)^{n-1}\,(x_n^0 - x_{n-1}^0)\, v_{\gamma_{(n-1)}} + \omega_y^{cc} = 0
\end{aligned} \tag{22-67}$$

unde:

$$\omega_y^{cc} = \rho^{cc}\{[D^0 \sin\theta^0]_0^{n-1} - (y_n^0 - y_0^0) + dy_0 - dy_n\}. \tag{22-68}$$

O b s e r v a ț i i. 1. Elementele θ_j^0, D_j^0, x_j^0, y_j^0 $(j = 1, 2, \dots, n-1)$ se calculează din aproape în aproape, *pe un traseu* reprezentat în figura 22-5 prin linie discontinuă, folosind elementele inițiale. În acest fel rezultă termenii $[D^0 \cos\theta^0]_1^{n-1}$ și $[D^0 \sin\theta^0]_1^{n-1}$ din ω_x^{cc} și ω_y^{cc}.

2. Pentru a putea aplica relațiile (22-65) și respectiv (22-67) fără modificări este necesar ca traseul menționat mai înainte să „îmbrace" unghiurile γ_i din rețeaua considerată. Un caz particular este reprezentat în fig. 22-6, cînd traseul va trece prin punctele $f-g-j-k$, cuprinzînd prin urmare trei unghiuri γ în punctul h.

3. În calculele practice, diferențele de coordonate $(x_n^0 - x_j^0)$ și $(y_n^0 - y_j^0)$ se exprimă de obicei în kilometri, astfel încît ω_x^{cc}, ω_y^{cc}, calculați cu relațiile (22-66) și (22-68) trebuie multiplicați cu 10^{-3}.

4. În vechea proiecție stereografică, precum și în unele triangulații locale în care se folosește același sis-

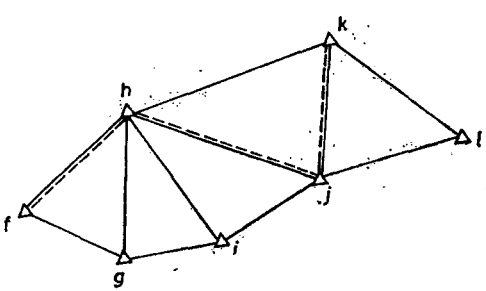


Fig. 22-6. Caz particular la ecuația de acord pe coordonate.

tem de dispunere pentru axele de coordonate, vor rezulta următoarele ecuații de condiție de acord pe coordonate:

$$x_n = x_0 + [D \sin \theta]_0^{n-1};\ y_n = y_0 + [D \cos \theta]_0^{n-1}. \tag{22-69}$$

Comparînd aceste ecuații cu ecuațiile (22-58) și (22-59) se desprinde concluzia că formele liniarizate ale ecuațiilor de condiție de acord pe coordonate se pot deduce prin simpla schimbare, reciprocă, a literelor x și y, în relațiile (22-60) — (22-68).

5. În mod curent punctele inițial și final fac parte din rețele mai vechi de triangulație și, ca atare, $dx_0 = dy_0 = dx_n = dy_n = 0$. Atunci cînd latura și orientarea de plecare sînt calculate din coordonatele unor puncte vechi de triangulație va rezulta $\sigma_0 = v_0^0 = 0$. Aceste simplificări modifică corespunzător structura relațiilor (22-65) — (22-68).

22.3.6.2. **Ecuații de acord pe elipsoidul de referință.** Formele liniarizate ale ecuațiilor de condiție de acord pe coordonatele geografice-geodezice se pot obține cu procedeul folosit în 21.3. Dacă se folosesc aceleași substituții și se notează:

$$\frac{N_m}{M_m} \cos B_m = -C_1 : \frac{M_m}{N_m \cos B_m} = C_2, \tag{22-70}$$

rezultă din relațiile (22-65) — (22-68):

— *ecuația de acord pe latitudini*

$$\begin{aligned} &\rho^{cc}\,(B_n^0 - B_0^0)\cdot\sigma_0 + C_1\,(L_n^0 - L_0^0)\,v_0^A + \\ &+ \operatorname{ctg}\,\alpha_1^0\,(B_n^0 - B_1^0)\cdot v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg}\,\beta_1^0\,(B_n^0 - B_1^0)\cdot v_{\beta_1} - C_1\,(L_n^0 - L_1^0)\,v_{\gamma_1} + \\ &\qquad \dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots \\ &+ \operatorname{ctg}\,\alpha_{n-1}^0\,(B_n^0 - B_{n-1}^0)\cdot v_{\alpha_{(n-1)}} - \operatorname{ctg}\,\beta_{n-1}^0\,(B_n^0 - B_{n-1}^0)\cdot v_{\beta_{(n-1)}} + \\ &+ (-1)^{n-1}\,C_1\,(L_n^0 - L_{n-1}^0)\cdot v_{\gamma_{(n-1)}} + \omega_B^{cc} = 0, \end{aligned} \tag{22-71}$$

unde:

$$\omega_B^{cc} = \rho^{cc}\{[\Delta B^0]_0^{n-1} - (B_n^0 - B_0^0) + dB_0 - dB_n\}; \tag{22-72}$$

— *ecuația de acord pe longitudini*

$$\begin{aligned} &\sigma_0\cdot\rho^{cc}\,(L_n^0 - L_0^0) + C_2\,(L_n^0 - L_0^0)\,v_0^A + \\ &+ \operatorname{ctg}\,\alpha_1^0\,(L_n^0 - L_1^0)\,v_{\alpha_1} - \operatorname{ctg}\,\beta_1^0\,(L_n^0 - L_1^0)\,v_{\beta_1} - C_2\,(B_n^0 - B_1^0)\,v_{\gamma_1} + \\ &\qquad \dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots \\ &+ \operatorname{ctg}\,\alpha_{n-1}^0\,(L_n^0 - L_{n-1}^0)\,v_{\alpha_{(n-1)}} - \operatorname{ctg}\,\beta_{n-1}^0\,(L_n^0 - L_{n-1}^0)\,v_{\beta_{(n-1)}} + \\ &+ (-1)^{n-1}\,C_2\,(B_n^0 - B_{n-1}^0)\,v_{\gamma_{(n-1)}} + \omega_L^{cc} = 0, \end{aligned} \tag{22-73}$$

unde:

$$\omega_L^{cc} = \rho^{cc}\{[\Delta L^0]_0^{n-1} - (L_n^0 - L_0^0) + dL_0 - dL_n\}. \tag{22-74}$$

Observațiile făcute pentru ecuațiile de acord pe coordonate plane sînt, în mod corespunzător, valabile și în cazul de față. În plus, trebuie, menționat că $[\Delta B]_0^{n-1}$ și $[\Delta L]_0^{n-1}$ se calculează prin transport de coordonate, pe elipsoid, așa cum s-a tratat în 7.2.

22.4. PARTICULARITĂȚI ÎN CALCULELE DE EVALUARE A PRECIZIEI

Calculul erorilor unor elemente din interiorul rețelei (azimute, laturi, coordonate) se realizează prin aplicarea formulelor din 9.3.3., considerînd fiecare din aceste elemente ca funcții de observațiile efectuate în rețea. De aceea o primă particularitate în calculele de evaluare a preciziei o constituie aducerea acestor funcții la o formă *liniară convenabilă*.

În practică intervine frecvent liniarizarea unor funcții în ipoteza că elementele inițiale sînt considerate ca neafectate de erori.

22.4.1. FUNCȚIE PENTRU O LATURĂ DIN REȚEA

Se cere calculul erorii laturii b situată spre mijlocul rețelei, în ipoteza că latura inițială a este neafectată de erori:

$$b = a\frac{\sin A}{\sin B};\quad b = a\frac{\sin (A^0 + v_A)}{\sin (B^0 + v_B)}. \tag{22-75}$$

Forma liniarizată a acestei ecuații este:

$$b = b^\circ + \frac{v_A^{cc}}{\rho^{cc}}\,b^0 \operatorname{ctg} A^0 - \frac{v_B^{cc}}{\rho^{cc}}\,b^0 \operatorname{ctg} B^0, \tag{22-76}$$

unde:

$$b^\circ = a\frac{\sin A^0}{\sin B^0}. \tag{22-77}$$

Este util ca relația (22-76) să fie pusă sub forma:

$$b = \frac{b^0}{\rho^{cc}}F';\ F' = \rho^{cc} + v_A \operatorname{ctg} A^0 - v_B \operatorname{ctg} B^0. \tag{22-78}$$

Calculele pot decurge apoi în felul următor:

— pentru început se calculează eroarea funcției F', deoarece coeficienții f' necesari se pot obține direct din ecuația liniarizată de acord pe laturi: $f'_A = \operatorname{ctg} A^0$ ... ș.a.m.d. Calculul coeficientului de pondere $Q_{F'F'}$, se efectuează în tabelele de formare ($[af']$, $[bf']$...) și respectiv rezolvare a ecuațiilor normale, după metodele cunoscute. La încheierea acestei prime etape se va obține $s_{F'} = s_0\sqrt{Q_{F'F'}}$, cu relația (9-85), unde s_0 se determină cu formula (9-82);

— din relația (22-78) rezultă apoi:

$$s_b = \frac{b^0}{\rho^{cc}}s_{F'}, \tag{22-79}$$

urmînd ca în încheiere să se calculeze eroarea relativă s_b/b.

22.4.2. FUNCȚIE PENTRU COORDONATA UNUI PUNCT DIN REȚEA

Se solicită calculul erorii coordonatei x a punctului P_k, situat spre mijlocul rețelei:

$$x_k = x_1 + [D \cos \theta]_1^k. \tag{22-80}$$

Forma liniarizată a acestei funcții este asemănătoare cu (22-65). Se pot împărți și aici calculele în două etape:

— se folosesc coeficienții $g_{\alpha_1} = \operatorname{ctg} \alpha_1^0 \ (x_k^0 - x_1^0) \ldots$ ș.a.m.d., analog ca la alcătuirea ecuației de acord pe coordonatele x, însă cu diferențele de coordonate față de punctul P_k și nu față de punctul final P_n. Se calculează apoi coeficientul de pondere $Q_{G'G'}$, și eroarea funcției intermediare:

$$s_{G'} = s_0 \sqrt{Q_{G'G'}} \ ;$$

— eroarea coordonatei x_k se obține cu relația:

$$s_{x_k} = s_{G'} / \rho^{cc}. \qquad (22\text{-}81)$$

Dacă la liniarizarea funcției se folosesc coordonatele x, y exprimate în kilometri (ceea ce este recomandabil), formula de calcul va fi:

$$s_{x_k} = \frac{s_{G'}}{\rho^{cc} \cdot 10^{-3}} \ . \qquad (22\text{-}82)$$

Analog se va proceda și cu eroarea coordonatei y_k.

Observație. Particularități în ceea ce privește calculul coeficienților de pondere intervin, în primul rînd, în funcție de calculatorul folosit. Aspectele mai deosebite au fost semnalate în 9.3.3.

22.5. EXEMPLU

Compensarea rețelelor de triangulație prin *metoda observațiilor condiționate* a fost folosită pe scară largă în trecut, deoarece pentru rețelele clasice sub formă de lanțuri de triunghiuri, patrulatere sau poligoane cu puncte centrale, este mai avantajoasă în raport cu metoda observațiilor indirecte (v. 22.1.).

Automatizarea completă a calculelor este mai dificilă și în general ocolită pînă în prezent, în special datorită greutății de programare generală a alcătuirii ecuațiilor de condiție. În schimb, semiautomatizarea procesului de calcul (în special formarea și rezolvarea sistemului ecuațiilor normale) este accesibilă.

Algoritmul general de calcul va fi descris pe baza unui exemplu numeric, avînd în vedere rețeaua de triangulație din figura 22-3, pentru care se cunosc coordonatele din tabelul 22-1 și direcțiile reduse la planul de proiecție din tabelul 22-2.

Tabelul 22-1

Punctul	Coordonate rectangulare *Gauss-Krüger*	
	x (m)	y (m)
VB	4 813 588,869	5 768 570,147
MP	4 835 709,153	5 780 884,954
C	4 833 979,414	5 799 804,337
LV	4 796 344,372	5 808 320,754
VS	4 806 666,398	5 784 765,713

Aceste operațiuni sînt:

1. Calculul elementelor inițiale (distanțe, orientări) din coordonatele punctelor vechi, cu controalele specifice (tabelul 22-3).

2. Stabilirea numărului de ecuații de condiție, pentru exemplul de față, acest calcul fiind realizat prin exemplul numeric din 22.2.3.

Tabelul 22-2

Triunghiul	Direcția	Direcții reduse la planul de proiecție			Direcția	Direcții reduse la planul de proiecție			Unghiul	Unghiuri deduse din direcții			Termenul liber w_f
		g	c	cc		g	c	cc		g	c	cc	cc
I	2	54	06	69,95	1	399	99	86,36	1	54	06	83,59	+24,22
	6	117	81	08,05	5	63	35	41,91	2	54	45	66,14	
	28	299	55	52,87	27	208	07	78,38	3	91	47	74,49	
									Σ	200	00	24,22	
II	5	63	35	41,91	4	391	27	57,98	4	72	07	83,93	−16,73
	9	181	51	59,64	8	117	07	91,29	5	64	43	68,35	
	29	363	03	83,86	28	299	55	52,87	6	63	48	30,99	
									Σ	199	99	83,27	
III	8	117	07	91,29	7	0	00	06,76	7	117	07	84,53	− 8,80
	12	226	27	22,06	11	180	31	24,43	8	45	95	97,63	
	30	399	99	92,90	29	363	03	83,86	9	36	06	09,04	
									Σ	199	99	91,20	
IV	11	180	31	24,43	10	106	77	96,90	10	73	53	27,53	− 3,06
	16	399	99	80,94	15	318	97	11,80	11	81	02	69,14	
	31	45	43	93,17	30	399	99	92,80	12	45	44	00,27	
									Σ	199	99	96,94	
V	19	399	99	89,27	18	319	88	55,17	14	80	11	34,10	− 5,43
	32	72	30	97,63	31	45	43	93,17	15	26	87	04,46	
	15	318	97	11,80	13	225	95	55,79	13+20	93	01	56,01	
									Σ	199	99	94,57	
VI	18	319	88	55,17	17	295	53	84,22	16	24	34	70,95	+14,24
	23	287	02	02,37	21	175	76	27,22	17+19	111	25	75,15	
	33	136	70	65,77	32	72	30	97,63	18	64	39	68,14	
									Σ	200	00	14,24	
VII	15	318	97	11,80	14	293	94	44,82	13	25	02	66,98	− 1,84
	33	136	70	65,77	31	45	43	93,17	15+18	91	26	72,60	
	22	259	46	85,80	21	175	76	27,22	19	83	70	58,58	
									Σ	199	99	98,16	
IX	34	178	35	41,94	31	45	43	93,17	21	41	64	76,17	−23,67
	21	175	76	27,22	20	83	54	54,72	22	92	21	72,50	
	26	399	99	79,40	25	333	86	51,74	23	66	13	27,66	
									Σ	199	99	76,33	
X	27	208	07	78,38	34	178	35	41,94	24	29	72	36,44	+ 1,74
	25	333	86	51,74	24	205	30	04,89	25	128	56	46,85	
	3	95	77	88,40	2	54	06	69,95	26	41	71	18,45	
									Σ	200	00	01,74	

Tabelul 22-3

Punctul	Coordonate rectangulare *Gauss-Krüger*		tg θ (ctg θ) θ	sin θ cos θ	Distanța
	x (m)	y (m)			$\Delta x/\cos\theta$ $\Delta y/\sin\theta$ $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$
MP	4 835 709,153	5 780 884,954	−0,091426819	+0,99584659	18 998,291
C	4 833 979,414	5 799 804,337	ctg		18 998,291
Δ	−1 729,739	+18 919,383	105ᵍ80ᶜ42ᶜᶜ,755	−0,09104708	18 998,291
VB	4 813 588,869	5 768 570,147	+0,556720112	+0,48642026	25 317,216
MP	4 835 709,153	5 780 884,954	tg		25 317,216
Δ	+22 120,284	+12 314,807	32ᵍ53ᶜ95ᶜᶜ,179	+0,87372497	25 317,216
VS	4 806 666,398	5 784 765,713	−0,438208789	+0,91591878	25 717,391
LS	4 796 344,372	5 808 320,754	ctg		25 717,391
Δ	−10 322,026	+23 555,041	126ᵍ29ᶜ27ᶜᶜ,279	−0,40136366	25 717,391

Tabelul 22-4

Unghiul	Unghiul α_i° g	c	cc	sin α_i°	ctg α_i°	Unghiul	Unghiul β_i° g	c	cc	sin β_i°	ctg β_i°
1	54	06	83,59	+0,75082074	+0,8797	2	54	45	66,14	+0,75483497	+0,8689
4	72	07	83,93	+0,90535067	+0,4691	5	64	43	68,35	+0,84798475	+0,6250
7	117	07	84,53	+0,96423150	−0,2749	8	45	95	97,63	+0,66083764	+1,1357
10	73	53	27,53	+0,91481506	+0,4415	11	81	02	69,14	+0,95591723	+0,3072
13	25	02	66,98	+0,38307085	+2,4114	19	83	70	58,58	+0,96742379	+0,2617
22	92	21	72,50	+0,99253663	+0,1229	23	66	13	27,66	+0,86180175	+0,5886
25	128	56	46,85	+0,90101482	−0,4814	26	41	71	18,45	+0,60932429	+1,3013

$P_{\sin\alpha^\circ} = +0{,}20541175$ $P_{\sin\beta^\circ} = +0{,}20541292$

$\omega_p^{cc} = 3^{cc}, 626$

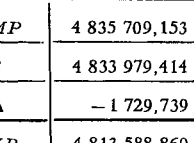
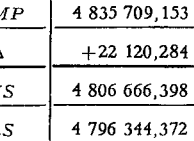
3. Calculul termenilor liberi ai ecuațiilor de condiție (direcții măsurate):

— *pentru ecuațiile de figură*, termenii liberi sînt calculați în tabelul 22-2, în care s-au determinat și unghiurile din rețea, care vor fi utilizate în calculele ulterioare. *Compensarea se va face însă pe direcții*;

— *pentru ecuațiile de pol*, termenii liberi sînt calculați în tabele de forma tabelului 22-4 (pentru punctul central N);

— *pentru ecuații de acord pe laturi* se folosesc tabele de forma tabelului 22-5 (acordul laturii $\overline{VB—MB}$ pe latura $\overline{MP—C}$).

Tabelul 22-5

Numărul triunghiului	Triunghiul	Denumirea unghiului	Mărimea unghiului g	c	cc	Sinusul unghiului	Denumirea unghiului	ctg α_i° ctg β_i° Modulul [m]	Lungimea laturii [m]	Denumirea laturii
I		1	54	06	83,59	0,75082074	1	+0,8797	19 180,305	$MP—N$
		2	54	45	66,14	0,75483497	3	+0,1347	19 282,852	$VB—N$
		3	91	47	74,49	0,99105253		22 545,785	25 317,216	$VB—MP$
		Σ	200	00	24,22					
II		4	72	07	83,93	0,90535067	5	+0,6250	20 477,846	$MP—VB$
		5	64	43	68,35	0,84799475		22 618,690	19 180,305	$MP—N$
		6	63	48	30,99	0,83994951	6	0,6461	18 998,558	$MP—C$
		Σ	199	99	83,27				18 998,291	$MP—C$

Aici s-au calculat și *laturile provizorii* necesare la transmiterea coordonatelor provizorii în rețea. Lungimile calculate din coordonatele punctelor vechi au fost încadrate în mici chenare;

— *pentru ecuațiile de acord pe orientări*: plecînd de pe orientarea $\theta_{VB-MP} = 32^g33^c95^{cc}$, 179 pe traseul $VB—N—VS—LV$ cu unghiurile din tabelul 22-2 se obține orientarea provizorie $\theta^0_{LV-VS} = 126^g29^c41^{cc}$, 309. Rezultă astfel: $\omega_\theta^{cc} = +14^{cc}$, 040; pentru *ecuația de unghi fix* $\sphericalangle VB—MP—C$ (v. indicațiile din 22.3.5.) s-a obținut $\omega^\theta_{MP} = -2^{cc}$, 350;

— *pentru ecuațiile de acord pe coordonatele x și y* (între punctele VB și VS) termenii liberi sînt calculați în tabelul 22-6.

4. Liniarizarea ecuațiilor de acord pe coordonatele x și y (tabelul 22-7), precum și liniarizarea funcțiilor pentru determinarea erorilor coordonatelor punctului N (tabelul 22-8).

5. Constituirea sistemului general al ecuațiilor liniarizate de condiție, precum și al funcțiilor necesare pentru calculele de evaluare a preciziei (tabelul 22-9). Aici se mai trec, după rezolvarea sistemului ecuațiilor normale, corelatele k, corecțiile v, controlul $[vv] = -[k\omega]$, verificarea tuturor ecuațiilor liniarizate de condiție a corecțiilor v (*ultima linie a tabelului*).

6. Sistemul ecuațiilor normale, prezentat *doar parțial* în tabelul 22-10, a fost format la un calculator electronic, unde s-a realizat și *rezolvarea sa* (soluțiile k sînt trecute în tabelul 22-9).

7. Calculul direcțiilor compensate $\alpha^0 + v = \alpha$, din care se determină *unghiurile compensate* (tabelul 22-11).

8. Calcule de control:

— controlul specific observațiilor condiționate $[vv] = -[k\omega]$, în tabelul 22-9;

— verificarea tuturor ecuațiilor liniarizate de condiție ale corecțiilor (tabelul 22-9);

Tabelul 22-6

Latura	Lungimea laturii [m]	Orientarea θ° g	c	cc	sin θ° cos θ°	Coordonate relative $\Delta x = D\cos\theta^\circ$ [m]	$\Delta y = D\sin\theta^\circ$ [m]	Coordonate absolute x [m]	y [m]	Punctul
								4 813 588,869	5 768 570,147	*VB*
VB–N	19 282,852	86	40	78,77	+0,99729434 +0,21188619	+ 4 075,770	+18 845,022	4 817 674,639	5 787 415,169	*N*
N–VS	11 322,664	215	03	66,16	−0,23400460 +0,97223549	−11 008,292	− 2 649,555	4 806 666,343	5 784 765,614	*VS*
								4 806 666,398	5 784 765,713	*VS*

$\omega_x^{cc} = -0{,}055\,\rho^{cc}\cdot 10^{-3} = -35^{cc},0141$ $\omega_y^{cc} = -0{,}099\,\rho^{cc}\cdot 10^{-3} = -63^{cc},0254$

Tabelul 22-7

Punctul	Coordonate x° [km]	y° [km]	$x_n^\circ - x_i^\circ$ [km]	$y_n^\circ - y_i^\circ$ [km]	ctg α_i°	ctg β_i°	Unghiuri α_i	β_i	γ_i	$(x_n^\circ - x_i^\circ)\cdot$ ctg α_i°	$(x_n^\circ - x_i^\circ)\cdot$ ctg β_i°	$(y_n^\circ - y_i^\circ)$	$(y_n^\circ - y_i^\circ)\cdot$ ctg α_i°	$-(y_n^\circ - y_i^\circ)\cdot$ ctg β_i°	$x_n^\circ - x_i^\circ$
VB	4 813,589	5 768,570	− 6,923	+16,196	+0,8690	+0,1347	2	3	+1	− 6,0161	+0,9325	−16,196	+14,0743	−2,1816	− 6,923
N	4 817,675	5 787,415	−11,009	− 2,649	+1,3013	−0,4814	26	25	−24	−14,3260	−5,2997	− 2,649	− 3,4471	−1,2752	+11,009
N	4 817,675	5 787,415	−11,009	− 2,649	+0,5886	+0,1229	23	22	−26	− 6,4799	+1,3530	−2,649	− 1,5591	+0,3258	+11,009
VS	4 806,666	5 784,766	0,0	0,0	+0,6259	+2,4860	18	16	+(17+19)			0,0			0,0

Tabelul 2-28

Punctul	Coordonate x° [km]	y° [km]	$x_n^\circ - x_i^\circ$ [km]	$y_n^\circ - y_i^\circ$ [km]	ctg α_i°	ctg β_i°	Unghiuri α_i	β_i	γ_i	$(x_n^\circ - x_i^\circ)\cdot$ ctg α_i°	$-(x_n^\circ - x_i^\circ)\cdot$ ctg β_i°	$-(y_n^\circ - y_i^\circ)$	$(y_n^\circ - y_i^\circ)\cdot$ ctg α_i°	$-(y_n^\circ - y_i^\circ)\cdot$ ctg β_i°	$x_n^\circ - x_i^\circ$
VB	4 813,589	5 768,570	+4,086	+18,845	+0,869	+0,135	2	3	+ 1	+3,551	−0,552	+18,845	+16,376	−2,544	+4,086
N	4 817,675	5 787,415	0,0	0,0	+1,301	−0,481	26	25	−24	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Tabelul 22–9

Corecții v	Ecuații de figură									Ecuații de acord pe laturi: De la $\frac{MP-VP}{MP-C}$ la	De la $\frac{MP-VB}{VS-LV}$ la	Ecuații de pol N	P	Ecuații de unghi fix	Ecuații de acord pe orientare	Ecuații de acord pe coordonate x	y	Funcții de pondere D_{N-VS}	x_N	y_N	Corecții v
1	−1,0									−0,8797		−0,8797			−1,0	+16,991	+6,9230		+18,855	−4,086	+3,243
2	+1,0								−1,0	+0.8797	−1,3013	+2,1810			+1,0	−1,8731	−3,4759	−1,301	−18,855	+4,086	−3,746
3									+1,0		+1,3013	−1,3013				−14,3260	−3,4471	+1,301			+0,503
4		−1,0										−0,4691		−1,0							−4,330
5	−1,0	+1,0									−0,8690	+1,3380				+6,0161	−14,0743	−0,869	−3,551	−16,376	+6,312
6	+1,0										+0,8690	−0,8690		+1,0		−6,0161	+14,0743	+0,869	+3,551	+16,376	−1,981
7			−1,0									+0,2749									+1,090
8		−1,0	+1,0							+0,6250		+0,3501									−3,694
9		+1,0								−0,6250		−0,6250									+2,604
10				−1,0								−0,4415									+1,582
11			−1,0	+1,0								−1,5772									−7,494
12			+1,0									−1,1357									+5,912
13					−1,0								−0,5500								+4,692
14						−1,0						−2,4114	+2,9614								−10,584
15				−1,0	+1,0		+1,0					+2,7186	−2,4114								+1,391
16				+1,0								−0,3072									+4,501
17						−1,0					+2,4860		−2,4860								−1,170
18					−1,0	+1,0					−2,4860		+2,8090								+0,743
19					+1,0								−0,3230								+0,427
20								−1,0			+0,1229	−0,1229				−1,3530	−0,3256	+0,123			−3,247
21						−1,0	−1,0	+1,0			−0,1229	+0,3846	−0,2617		−1,0	+1,3530	+0,3256	−0,123			−1,254
22							+1,0					−0,2617	+2,4262								+0,736

Tabelul 22-9 (continuare

Corecții v	Ecuații de figură									Ecuații de acord pe laturi: De la $MP-VP$ la $MP-C$	Ecuații de acord pe laturi: De la $MP-VB$ la $VS-LV$	Ecuații de pol: N	Ecuații de pol: P	Ecuații de unghi fix	Ecuații de acord pe orientare	Ecuații de acord pe coordonate: x	Ecuații de acord pe coordonate: y	Funcții de pondere: D_{N-VS}	Funcții de pondere: x_N	Funcții de pondere: y_N	Corecții v
23						+1,0							−2,1645		+1,0						+ 3,766
24									−1,0		−0,4814	+0,4814				+5,2907	+ 1,2735	−0,481			+ 0,506
25								−1,0	+1,0		−0,1072	+0,1072				+1,1892	+ 0,2856	−0,107			− 4,628
26								+1,0			+0,5886	−0,5886				−6,4799	− 1,5591	+0,589			+ 4,122
27	−1,0								+1,0	+0,1347	+0,1347				−1,0	−3,5815	+13,1906	+0,135	+0,552	+2,544	+ 3,641
28	+1,0	−1,0								−0,7808	−0,1347					+0,9325	− 2,1816	−0,135	−0,552	−2,544	− 5,300
29		+1,0	−1,0							+0,6461											− 5,509
30			+1,0	−1,0																	− 5,331
31				+1,0	−1,0		−1,0						−2,2268								+ 3,694
32					+1,0	−1,0					−0,6259		+2,8527								+12,741
33						+1,0	+1,0	−1,0			−0,6559		−0,6259		+1,0	+2,6490	−11,0090				− 8,431
34								+1,0	−1,0												+ 4,495
Termen liber ω	+24,220	−16,730	− 8,800	− 3,060	− 5,430	+14,240	− 1,840	−23,670	+ 1,740	+ 9,014	+16,041	− 3,626	+ 5,060	− 2,350	+ 14,040	−35,014	−63,025				
Corelata k	−15,883758	− 5,604544	− 3,326379	+ 2,004698	− 1,467096	−21,541351	+12,829734	+ 3,398242	− 1,097013	− 5,001334	−14,999058	− 8,132282	− 5,863426	+73,749190	+12,618584	− 0,761741	+ 0,109320				
Verificarea ecuațiilor de condiție	−24,221	+16,731	+ 8,800	+ 3,059	+ 5,430	−14,239	+ 1,840	+23,669	− 1,740	− 9,014	−16,037	+ 3,626	− 5,059	+ 2,349	−14,039	+35,021	+63,018				

Control: $[vv] = +793,7624$
$-[k\omega] = +793,7624$

$$s_0 = \pm\sqrt{\frac{793,7624}{17}} = \pm 6^{cc},84$$

Tabelul 22-10

1	2	3	4	5	6		16	17	Funcții de pondere: D_{N-VS}	Funcții de pondere: x_N	Funcții de pondere: y_N
+6,0	−2,0	0,0	0,0	0,0	0,0	. . .	− 25,581955	+ 2,366986	− 0,167000	− 31,691925	+ 35,835968
	+6,0	−2,0	0,0	0,0	0,0		+ 5,080999	− 11,888000	− 0,734000	− 2,999000	− 13,831992
		+6,0	−2,0	0,0	0,0	. . .	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
			+6,0	−2,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
				+6,0	−2,0	. . .	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
					+6,0		+ 1,295000	− 11,334999	+ 0,123000	0,0	0,0
							+ 1,295000	− 11,334999	+ 0,123000	0,0	0,0
							− 7,613999	+ 9,814599	− 0,727000	0,0	0,0
							− 20,139984	−112,238000	+ 3,109998	+ 19,396973	− 1,542000
							− 17,114777	− 5,663409	− 1,021218	− 32,661499	+ 9,521661
							− 32,432404	+ 18,042953	+ 4,858328	+ 30,837967	+ 23,832443
							+ 20,756210	− 38,525452	− 6,406546	− 65,521515	− 23,634537
							− 2,013020	+ 6,806221	+ 0,032226	0,0	0,0
							− 6,016000	+ 14,073999	+ 0,869000	+ 3,551000	+ 16,375992
							− 13,189985	− 34,929962	− 1,312999	− 38,241959	+ 5,627999
							+639,246094	− 61,757874	−26,452545	+295,289063	−282,361816
								+772,482422	+26,772293	+304,431152	+457,585693
									+ 5,552170	+ 30,837967	+ 23,832443
										+736,094727	− 34,890320
											+582,680664

Tabelul 22-11

Numărul triunghiului	Numărul unghiului	Unghiul compensat g	c	cc	Sinusul unghiului	Modulul [m]	Lungimea laturii [m]	Denumirea laturii
I	1	54	06	76,603	0,75081349		19 180,157	*MP–N*
	2	54	45	57,848	0,75482643		19 282,671	*VB–N*
	3	91	47	65,549	0,99105066	25 545,8344	25 317,261	*MP–VB*
	Σ	200	00	00,00				
X	24	29	72	35,586	0,45011719		9 632,947	*CC–VB*
	25	128	56	41,716	0,90101831	21 400,9757	19 282,671	*VB–N*
	26	41	71	22,698	0,60932958		13 040,218	*CC–N*
	Σ	200	00	00,00				
	...				...			...
V	13+20	93	01	52,709	0,99398725		29 867,049	*LV–N*
	15	26	87	13,507	0,40967174		12 309,701	*LV–PI*
	14	80	11	33,784	0,95160535	30 047,7188	28 593,570	*N–PI*
	Σ	200	00	00,00				
VI	16	24	34	72,863	0,37319113		11 322,702	*N–VS*
	17+19	111	25	80,170	0,98440442	30 340,2230	29 867,049	*N–LV*
	18	64	39	46,967	0,84763374		25 717,393	*LV–VS*
	Σ	200	00	00,00			25 717,391	*LV–VS*

— controlul final al compensării este obținut prin calculul orientărilor, al laturilor (tabelul 22-11) și al coordonatelor (tabelul 22-12) compensate pentru elementele din rețea și compararea lor cu cele date inițial ca elemente fixe.

9. *Evaluarea preciziei*:

— eroarea medie a unei direcții măsurate, egală cu eroarea medie a unității de pondere s_0, în tabelul 22-9;

— pentru calculul erorilor unor funcțiuni s-au aplicat metodele descrise în 22.4, rezultînd coeficienții formelor liniarizate prezentați în tabelul 22-9, soluțiile intermediare din tabelul 22-13 și soluțiile finale din tabelul 22-14.

22.6. COMPENSAREA PE GRUPE

Metoda observațiilor condiționate are o utilitate mult mai restrînsă în prezent în comparație cu perioade mai vechi (*Ghițău* 1970, 1972 p. 395 ș.a.).

O sumară trecere în revistă a acestor categorii de rezolvări ne conduce către *I. Krüger*, care în anul 1905 elaborează un procedeu care a căpătat o răspîndire foarte mare, în special la compensarea unghiurilor măsurate, deoarece ecuațiile din prima grupă (ecuațiile de figură) se rezolvă extrem

Tabelul 22-12

Latura	Lungimea laturii [m]	Orientarea θ g	c	cc	sin θ / cos θ	Coordonate relative $\Delta x = D\cos\theta$ [m]	Coordonate relative $\Delta y = D\sin\theta$ [m]	Coordonate absolute x [m]	Coordonate absolute y [m]	Punctul
								4 813 508,869	5 768 570,147	*VB*
VB–CC	9 632,947	128	11	94,480	+0,90402658 / −0,42747625	− 4 117,440	+ 8 708,440	4 809 471,013	5 777 278,587	*CC*
CC–N	13 040,248	56	68	36,196	+0,77731352 / +0,62911341	+ 8 203,795	+10 136,361	4 817 674,808	5 787 414,948	*N*
N–PI	28 593,570	123	76	86,620	+0,93110805 / −0,36474346	−10 429,318	+26 623,703	4 807 245,490	5 814 038,651	*PI*
PI–M	20 463,482	4	79	58,870	+0,07326238 / +0,99716376	+20 405,443	+ 1 540,130	4 827 650,933	5 815 578,781	*M*
M–C	16 996,552	324	28	88,361	−0,92809673 / +0,37233917	+ 6 328,182	−15 774,444	4 833 979,415	5 799 804,337	*C*
								4 833 979,414	5 799 804,337	*C*

Tabelul 22-13

Nr. crt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Soluții c pentru funcții de pondere																	
Pentru latura $N-VS$	+0,0881	+0,1962	+0,1660	+0,0078	−0,0670	−0,0667	−0,1801	+0,2248	+0,0149	+0,1385	+0,0187	+0,3218	+0,0781	−0,3860	+0,3459	+0,0481	−0,0011
Pentru coordonata x_N	−2,7446	+2,8004	+2,1806	+0,0091	−0,7222	−0,8762	−2,7615	−0,7826	−0,7644	+2,3460	+0,2169	+2,8111	+0,9189	−4,9876	+3,2580	−0,3986	−0,0400
Pentru coordonata y_N	−4,7361	−0,7592	−0,3249	−0,2444	−0,0826	−1,4420	−0,3698	+0,7196	+0,8296	−2,1769	−1,1907	+0,0370	−0,2757	−0,2152	−0,2719	+0,1081	−0,6220

Tabelul 22-14

Elementul considerat	Coeficientul de pondere	Eroarea medie a funcției intermediare	Eroarea medie a elementului
Latura $N-VS$	1,71437	± 8,9549	±0,159 m
Coordonata x_N	99,58918	±68,2591	±0,107 m
Coordonata y_N	51,9815	±49,3169	±0,077 m

de simplu. Procedeul este cunoscut studenților *secției de geodezie* de la *cursul de teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate*. În anii următori au apărut procedeele *Boltz* (1923), *Asplund* (1954) ș.a. care au avut aplicabilitate în rețelele naționale corespondente. Totuși, *procedeul Helmert — Pranis — Pranievici*, descris în 21.9.1. pentru metoda observațiilor indirecte, cu adaptările corespunzătoare, poate oferi rezultate optime și în cadrul prelucrării pe grupe prin metoda observațiilor condiționate.

22.7. SITUAȚII PARTICULARE

22.7.1. ÎNCADRAREA SIMPLĂ, FĂRĂ CONSTRÎNGERI, A UNEI REȚELE NOI DE TRIANGULAȚIE ÎNTR-UN SISTEM DE COORDONATE UNITAR

Prima situație particulară care se va examina este prezentată în figura 22-7, în care se cunosc:

— coordonatele punctelor vechi A și B, repartizate izolat în rețea, notate x_A, y_A, respectiv x_B, y_B (fără legătură directă, nemijlocită);

— coordonatele provizorii ale punctului nou *1*, notate x_1^0, y_1^0;

— direcții măsurate și reduse la planul de proiecție.

De menționat că numărul de elemente necesare și suficiente pentru încadrarea rețelei considerate în sistemul de coordonate unitar x, y, este asigurat *prin cele 4 coordonate* ale punctelor vechi. Prin urmare nu este necesară scrierea unor ecuații de condiții exterioare, ci numai ecuații de condiții interioare.

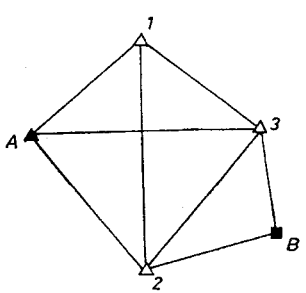


Fig. 22-7. Rețea geodezică cu două puncte vechi izolate.

Algoritmul de calcul va cuprinde următoarele două etape:

— compensarea observațiilor din rețea, prin care se realizează geometrizarea rețelei;

— încadrarea rețelei compensate în sistemul de coordonate.

În cadrul primei etape se realizează:

— scrierea ecuațiilor de condiție interioare și calculul termenilor liberi;

— formarea sistemului ecuațiilor normale și calculul corelatelor k;

— calculul corecțiilor v și al direcțiilor compensate. După efectuarea acestor operațiuni *rețeaua este geometrizată*.

În etapa a doua se vor efectua următoarele calcule:

— calculul coordonatelor provizorii x^0, y^0 pentru toate punctele rețelei *2, 3, B*, considerînd ca elemente inițiale: coordonatele punctului A (x_A, y_A), orientarea θ_{A1}^0 și distanța D_{A1}^0, determinate din coordonatele x_A, y_A și respectiv x_1^0, y_1^0;

— calculul unghiului de rotație α și al coeficientului de scară m, ale poziției provizorii în raport de poziția definitivă a rețelei considerate, prin utilizarea coordonatelor punctelor A și B, cunoscute pentru ambele situații:

$$t = m \cos \alpha = \frac{\Delta x_{AB}^0 \Delta x_{AB} + \Delta y_{AB}^0 \Delta y_{AB}}{(\Delta x_{AB}^0)^2 + (\Delta y_{AB}^0)^2}; \qquad (22\text{-}83)$$

$$u = m \sin \alpha = \frac{\Delta x_{AB} \Delta y_{AB}^0 - \Delta y_{AB} \Delta x_{AB}^0}{(\Delta x_{AB}^0)^2 + (\Delta y_{AB}^0)^2}; \qquad (22\text{-}84)$$

— coordonatele punctelor noi din rețea *1, 2, 3*, precum și a punctului vechi B (pentru control) se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned} \Delta x_{Aj} &= t\, \Delta x_{Aj}^0 + u\, \Delta y_{Aj}^0; \\ \Delta y_{Aj} &= -u\, \Delta x_{Aj}^0 + t \Delta y_{Aj}^0; \\ j &= 1, 2, 3, B, \end{aligned} \qquad (22\text{-}85)$$

în raport de coordonatele cunoscute ale punctului inițial A.

Observații. **1.** Rețeaua considerată poate avea o formă geometrică oarecare, oricît de complexă. Singura restricție introdusă constă în dispunerea punctelor vechi A și B, în mod izolat în rețea. Asemenea situații pot apărea *la încadrarea rețelelor geodezice locale în rețeaua geodezică de stat.*

2. Un caz particular, evident mai simplu, este reprezentat de situația în care punctele A și B sînt în legătură directă, nemijlocită. Atunci, etapa a doua de calcule nu mai este necesară.

22.7.2. CONSTRÎNGEREA REȚELELOR DE TRIANGULAȚIE NOI PE PUNCTE FIXE-IZOLATE

O a doua situație particulară este reprezentată în figura 22-8. Datele inițiale sînt similare cu cele menționate la începutul 22.7.1, cu o singură deosebire, de fapt esențială: în rețea există un număr de 3 puncte vechi, dispuse izolat (A, C și E). Specificul situației particulare examinate constă în faptul că punctele vechi nu au legături directe, unghiurile α și β nefiind măsurate.

Prin urmare, în rețeaua considerată se dispune de două elemente suplimentare, în raport de cele strict necesare, pentru încadrarea rețelei considerate într-un sistem de coordonate unitar x, y, Acestea creează două *grade de libertate*, care urmează a fi anihilate prin două ecuații de constrîngere.

În caz general, cînd numărul de puncte fixe-izolate este n_f, numărul ecuațiilor de constrîngere va fi evident, egal cu 2 $(n_f - 2)$.

Rezolvarea situației particulare la care ne referim este relativ simplă prin metoda observațiilor indirecte deoarece dispunerea punctelor vechi în rețea nu creează probleme deosebite de prelucrare.

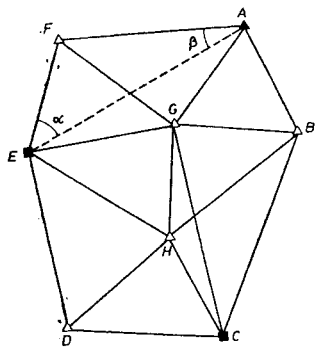


Fig. 22-8. Rețea geodezică cu mai multe puncte vechi izolate.

În schimb, la metoda observațiilor condiționate, dispunerea izolată a punctelor vechi în rețea nu permite scrierea directă a unor ecuații de condiție, de genul celor de acord pe coordonate, examinate în 22.3.6.

Pentru rețeaua considerată numărul total de ecuații, determinat cu relația (9-83) va fi: $r = n - u = 32 - 18 = 14$. Se poate stabili cu ușurință, eventual și prin verificarea cu formulele prezentate în 22.2 că vor exista 12 ecuații de condiții interioare (9 de figură și 3 de pol) și 2 ecuații de acord pe coordonate.

Fără a mai reveni asupra ecuațiilor de condiții interioare, se descrie în continuare un algoritm posibil de calcul relativ la ecuațiile exterioare.

● În figura *EFAG se exprimă* cele două unghiuri intermediare α și β în funcție de măsurătorile existente. Acest lucru este întotdeauna posibil, chiar dacă ar fi fost vorba de o figură geometrică mai complicată, prin utilizarea unui sistem de două ecuații (de exemplu o ecuație de pol și o ecuație de figură).

● Exprimarea unghiurilor α și β în raport de măsurători creează posibilitatea determinării tuturor *elementelor provizorii* din rețea (laturi, orientări, coordonate) în raport de lungimea și orientarea laturii EA, determinate din coordonatele punctelor E și A.

● În continuare se pot scrie ecuațiile de acord pe coordonatele x și y între punctele E și C sau între A și C, așa cum s-a tratat în 22.3.6.

Capitolul 23

PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR ÎN REȚELELE DE NIVELMENT ȘI GRAVIMETRICE

Asemănarea existentă între rețelele de nivelment și rețelele gravimetrice este pusă în evidență în mod deosebit la prelucrarea observațiilor efectuate. În ambele cazuri se dispune de *diferențe* (de nivel, respectiv de gravitate) *măsurate*, urmînd a se determina, prin compensare riguroasă, *valori absolute* (pentru altitudine, respectiv pentru gravitate) ale punctelor noi, în raport de unul sau mai multe puncte vechi (cu valori absolute cunoscute, considerate fixe) existente în rețea. De aceea, în cele ce urmează se vor avea în vedere, mai mult, rețelele de nivelment, cu care inginerul geodez intră mai des în contact, punctînd însă și particularitățile pe care le implică prelucrarea mărimilor gravimetrice.

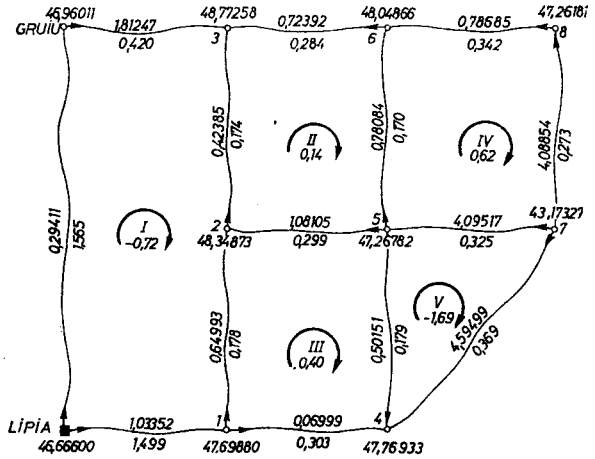


Fig. 23-1. Rețea de nivelment geometric.

23.1. PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR ÎN REȚELE DE NIVELMENT GEOMETRIC ȘI GRAVIMETRICE PRIN METODA OBSERVAȚIILOR INDIRECTE

Fie o *rețea de nivelment geometric*, de genul celei prezentate în figura 23-1, în care se cunosc:

— n diferențe de nivel Δh^0_{ij}, măsurate prin nivelment geometric și reduse unitar într-unul din sistemele de altitudini descrise în cap. 4 (valorile concrete sînt trecute pe schiță);

— distanțele (exprimate, de exemplu, în kilometri) între punctele rețelei;

— altitudinea pentru unul sau pentru mai mulți reperi de nivelment din rețeaua considerată;

— altitudinile provizorii H^0_i pentru cele u puncte noi din rețea (v. 20.1.3. și 20.3.);

—alte informații preliminarii utile la constituirea modelului funcțional-stochastic, în mod deosebit cele care pot fi folosite pentru stabilirea matricei ponderilor (v. 17.1.4.3. și 20.4.).

23.1.1. ALGORITMUL DE CALCUL

Principiile de prelucrare sînt cele expuse în 9.1., 9.2., și, cu adaptările corespunzătoare, în cap. 21.

Prin prelucrare se vor deduce corecții pentru măsurători și respectiv pentru altitudinile provizorii:

$$\Delta h_{ij} = \Delta h^0_{ij} + v_{ij}, \tag{23-1}$$

$$H_i = H^0_i + \mathrm{d}x_i. \tag{23-2}$$

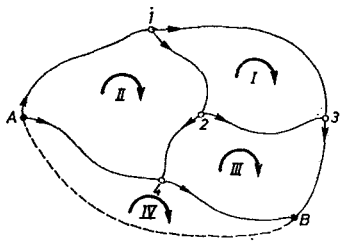


Fig. 23-2. Exemple de prelucrare a rețelelor de nivelment geometric.

23.1.1.1. **Formele ecuațiilor corecțiilor.**

● *Între două puncte vechi* nu se execută o nouă măsurătoare directă, fără puncte intermediare. Aceasta se observă și pe figura 23-2, care va fi avută în vedere la deducerea formulelor folosite în prelucrare.

● *Între un punct vechi A și un punct nou 1* se poate scrie:

$$H_A + \Delta h^0_{A1} + v_{A1} = H^0_1 + dx_1,$$

de unde:

$$v_{A1} = dx_1 + l_{A1}; \quad l_{A1} = H^0_1 - (H_A + \Delta h^0_{A1}). \tag{23-3}$$

● *Între două puncte noi*:

$$H^0_1 + dx_1 + \Delta h^0_{12} + v_{12} = H^0_2 + dx_2,$$

adică:

$$v_{12} = -dx_1 + dx_2 + l_{12}; \quad l_{12} = H^0_2 - (H^0_1 + \Delta h^0_{12}). \tag{23-4}$$

Dacă se păstrează consecvent o anumită convenție de scriere a ecuațiilor corecțiilor (de exemplu în sensul pozitiv al diferențelor de nivel) ecuațiile corecțiilor, inclusiv termenii liberi, se pot stabili cu ușurință direct de pe figură.

Este indicat ca ecuațiile corecțiilor să fie scrise în jurul fiecărui *punct nou*, denumit și *nod*, motiv pentru care metoda observațiilor indirecte aplicată la prelucrarea rețelelor de nivelment este denumită uzual *metoda nodurilor*.

În ipoteza observațiilor independente, acceptată în întregul capitol, ecuațiile corecțiilor pentru rețeaua din figura 23-2 sînt:

$$\begin{aligned}
v_{A1} &= +dx_1 && && + l_{A1}; && p_{A1}\\
v_{12} &= -dx_1 + dx_2 && && + l_{12}; && p_{12}\\
v_{13} &= -dx_1 && + dx_3 && + l_{13}; && p_{13}\\
v_{23} &= && -dx_2 + dx_3 && + l_{23}; && p_{23}\\
v_{24} &= && -dx_2 && + dx_4 + l_{24}; && p_{24}\\
v_{3B} &= && && -dx_3 + l_{3B}; && p_{3B}\\
v_{A4} &= && && + dx_4 + l_{A4}; && p_{A4}\\
v_{4B} &= && && - dx_4 + l_{4B}; && p_{4B}.
\end{aligned} \tag{23-5}$$

23.1.1.2. **Sistemul ecuațiilor normale.** Forma completă a primei ecuații normale corespunzătoare sistemului (23-5) este:

$$(p_{A1} + p_{12} + p_{13})\,dx_1 - p_{12}\,dx_2 - p_{13}\,dx_3 + (p_{A1}\,l_{A1} - p_{12}\,l_{12} - p_{13}\,l_{13}) = 0. \tag{23-6}$$

Se observă că sistemul de ecuații normale poate fi format de pe schița rețelei, indiferent de complexitatea sa, fiecărui punct nou corespunzîndu-i o ecuație normală constituită din următorii termeni:

— coeficientul necunoscutei de pe diagonala principală, corespunzător nodului i, pentru care se scrie ecuația, este egal cu suma ponderilor liniilor care converg în nod P_i;

— în ecuație mai intervin doar necunoscutele corespunzătoare nodurilor cu care punctul i este în legătură, coeficienții respectivi fiind egali cu $-p_{ij}$;

— termenul liber, notat în continuare cu E, este format dintr-o sumă de produse, între ponderi și termenii liberi din ecuațiile (23-5), în care semnul minus intervine pentru liniile care pleacă din nodul considerat și semnul plus în celelalte situații.

În acest fel, ecuația (23-6) se poate scrie mult mai concentrat, rezultînd următorul sistem de ecuații normale pentru rețeaua considerată:

$$\begin{aligned}
P_1\,dx_1 - p_{12}\,dx_2 - p_{13}\,dx_3 && + E_1 = 0;\\
-p_{12}\,dx_1 + P_2\,dx_2 - p_{23}\,dx_3 - p_{24}\,dx_4 && + E_2 = 0;\\
-p_{13}\,dx_1 - p_{23}\,dx_2 + P_3\,dx_3 && + E_3 = 0;\\
- p_{24}\,dx_2 + P_4\,dx_4 && + E_4 = 0.
\end{aligned} \tag{23-7}$$

Observație. Sistemele de ecuații normale de tipul (23-7) care iau naștere la compensarea rețelelor de nivelment geometric sau gravimetric au o caracteristică remarcabilă și anume: termenii de pe diagonala principală $P \geqslant \Sigma p$, în fiecare ecuație, sistemul pretîndu-se la rezolvări iterative (metoda *Gauss-Seidel*, metoda suprarelaxărilor ș.a.).

23.1.1.3. **Determinarea elementelor compensate și evaluarea preciziei.** Formulele utilizate au fost prezentate în 9.2.3. și 9.2.4., particularizările urmînd a se expune, mai edificator, în exemplificarea numerică prezentată în continuare.

23.1.2. EXEMPLU

Exemplul numeric se referă la rețeaua prezentată în figura 23-1, diferențele de nivel măsurate fiind trecute atît pe schiță, cît și în tabelul 23-2. Lungimile L ale liniilor de nivelment (în km) sînt trecute pe figura 23-1, iar ponderile corespondente, calculate cu formula (17-23) în tabelul 23-1.

Ecuațiile corecțiilor sînt prezentate în tabelul 23-1, din care se formează direct, fără transformări suplimentare, ecuațiile normale (de forma celor prezentate în tabelul 21-9) în care se determină soluțiile dx și coeficienții de pondere Q_{xx}.

Soluțiile dx obținute sînt prezentate în tabelele 23-1 și 23-3, iar erorile individuale s_x în tabelul 23-3. Corecțiile v se determină din relațiile (23-5) în tabelul 23-1.

Elementele compensate — diferențe de nivel și altitudinile punctelor noi — se prezintă în tabelele 23-2 și 23-3.

Eroarea medie a unității de pondere s_0, determinată cu relația (9-52), exprimată în mm/km este trecută sub tabelul 23-2.

Observație. Soluțiile dx și erorile individuale corespondente s_x sînt funcții de modalitatea de alegere a punctului fix în rețea. Dacă se schimbă poziția acestuia (fig. 23-3), se obțin rezultatele finale din tabelul 23-7. În schimb corecțiile v și eroarea s_0 sînt aceleași. Asupra acestor aspecte se va reveni pe larg în 24.1.

23.1.3. PARTICULARITĂȚI LA PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR ÎN REȚELELE GRAVIMETRICE

În multe lucrări de compensare a rețelelor gravimetrice, observațiile *au fost considerate* de aceeași precizie. Pentru a generaliza totuși rezolvarea clasică, se va presupune că aceste observații sînt de precizie dife-

452

Tabelul 23—1

Linia de nivelment	Ponderea $p = \frac{1}{L_{km}}$	Numărul punctului — Necunoscute calculate în prelucrare (dx) [mm]									Termenul liber l [mm]	Sumă	Corecții v [mm]
		0,4384 1	0,3931 2	0,3371 3	−0,0823 4	0,2733 5	0,2939 6	0,2804 7	0,2833 8	0,2658 G			
1—2	5,62	−1	+1								0	5,620	−0,0453
2—3	5,75		−1	+1							0	5,752	−0,0560
6—3	3,52			+1			−1				0	3,519	0,0432
5—6	5,90					−1	+1				0	5,898	0,0206
5—4	5,58				+1	−1					0	5,575	−0,3556
1—4	3,31	−1			+1						0,54	3,848	0,0193
5—2	3,34		+1			−1					−0,14	3,202	−0,0202
8—6	2,93						+1		−1		0	2,928	0,0106
7—8	3,66							−1	+1		0	3,657	0,0029
7—4	2,71				+1			−1			1,07	3,782	0,7073
7—5	3,08					+1		−1			−0,62	2,456	−0,6271
G—3	2,38			+1						−1	0	2,381	0,0713
L—1	0,67	+1									−0,72	0,947	−0,2816
L—G	0,64									+1	0	1,639	0,2658
Sumă		−1	+1	+3	+2	−1	+1	−3	0	0	+0,13	51,201 / 51,201	

Tabelul 23—2

Linia de nivelment	Diferențe de nivel măsurate Δh^0 [m]	Corecții v [mm]	Diferențe de nivel compensate Δh [m]
1—2	0,64993	−0,05	0,64988
2—3	0,42385	−0,05	0,42380
6—3	0,72392	0,05	0,72397
5—6	0,78084	0,02	0,78086
5—4	0,50151	−0,35	0,50116
1—4	0,06999	0,02	0,07001
5—2	1,08105	−0,02	1,08103
8—6	0,78685	0,01	0,78686
7—8	4,08854	0	4,08854
7—4	4,59499	0,71	4,59570
7—5	4,09517	−0,63	4,09454
G—3	1,81247	0,07	1,81254
L—1	1,03352	−0,28	1,03324
L—G	0,29411	0,27	0,29438

Tabelul 23—3

Reperul de nivelment	Altitudini provizorii H^0 [m]	Necunoscute dx [mm]	Altitudini compensate H [m]	Erori individuale s_x [mm]
L	46,66600	—	46,66600	—
G	46,96011	0,2658	46,96038	0,78
1	47,69880	0,4384	47,69924	0,72
2	48,34873	0,3931	48,34912	0,78
3	48,77258	0,3371	48,77292	0,78
4	47,76933	0,0823	47,76925	0,81
5	47,26782	0,2733	47,26809	0,80
6	48,04866	0,2939	48,04895	0,81
7	43,17327	0,2804	43,17355	0,84
8	47,26181	0,2833	47,26209	0,86

453

$$S_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{3,4231}{5}} = \pm 0,83 \text{ mm/km}$$

rită, fiecărei determinări δg fiindu-i atașată o pondere p. Deoarece valoarea δg provine dintr-o medie a mai multor determinări, ponderea p poate fi calculată, de exemplu, cu unul dintre procedeele descrise în 20.4.2.

O primă modalitate de prelucrare este similară cu cea descrisă anterior, în 23.1.1.

În ultimele decenii, ca urmare a dezvoltării mijloacelor de calcul, au apărut perfecționări în structura modelelor funcțional-stochastice folosite la compensarea rețelelor gravimetrice.

Metoda A.H. Cook este aplicată și dezvoltată de către *K. Marzahn* (1963) la compensarea unor rețele gravimetrice în care există atît stații de pendul, cît și stații de gravimetru static. Modelul general folosit în compensare cuprinde două tipuri de ecuații, corespunzătoare celor două categorii de aparate utilizate:

— pentru determinările efectuate cu pendulul, forma ecuațiilor corecțiilor este cea de tipul relațiilor (23-5). Astfel, pentru diferența de gravitate, măsurată între punctele a și b, cu pendulul P, corespunde ecuația:

$$v_{ab}^{P} = -\,\mathrm{d}x_a + \mathrm{d}x_b + l_{ab};\quad \text{ponderea } p_{ab}^{P}; \tag{23-8}$$

— pentru determinările efectuate cu gravimetrul static se are în vedere că alături de erorile comise în stațiile c și d, de exemplu, trebuie luate în considerație și erorile ce intervin între aceste stații, ca urmare a modificărilor de temperatură și presiune, a driftului instrumental etc. Prin urmare, se părăsește calea corectării determinărilor în teren pe baze empirice, prin utilizarea graficelor de temperatură și drift instrumental. Influențele complexe menționate anterior sînt cuprinse într-un factor de „etalonare", sau factor de „scară", specific fiecărui gravimetru utilizat. Astfel, pentru determinarea diferenței de gravitate, între stațiile c și d, cu gravimetrul G, corespunde următoarea ecuație inițială, în care intervine factorul de scară $1 + y^G$;

$$(1 + y^G)\cdot(\delta g_{cd}^{G} + v_{cd}^{G}) = (x_d^0 + \mathrm{d}x_d) - (x_c^0 + \mathrm{d}x_c). \tag{23-9}$$

Prin neglijarea termenilor de ord. 2 se obține:

$$v_{cd}^{G} = -\,\mathrm{d}x_c + \mathrm{d}x_d - \delta g\cdot y^G + l_{cd}^{G};\quad \text{ponderea } p_{cd}^{G}, \tag{23-10}$$

astfel încît modelul funcțional cuprinde necunoscutele suplimentare y^G care urmează să fie determinate în procesul compensării.

Metoda M. Serbetçi (1968) în care se dezvoltă, în limite foarte largi, forma ecuațiilor corecțiilor corespunzătoare determinărilor efectuate cu gravimetrul static, rezultînd un model funcțional-stochastic mult perfecționat. Se notează:

L_i — lectura de gravimetru în punctul i, în mgal;
t_i — momentul (timpul) la care se efectuează citirea;
v_i — corecția care trebuie determinată, ca urmare a erorilor în lectura L_i. Observațiilor L_i le corespund ponderile p_v;
$\overline{v}_{i,i+1}$ — corecție datorită abaterii driftului instrumental, între momentele i și $i+1$, de la legea de variație adoptată. Corecțiilor $\overline{v}$ le corespund ponderile $p_{\overline{v}}$;
δx_i — valoarea driftului instrumental, la momentul t_i. Pentru estimarea sa se presupune o lege de variație în timp de forma:

$$\delta_x = y_0 + y_1 (t - t_0) + y_2 (t - t_0)^2 + \ldots \tag{23-11}$$

unde t_0 este un moment origine oarecare.

Pentru diferența de gravitate între punctele *1* și *2* corespunde următoarea ecuație:

$$(L_2 + v_2 + \delta x_2 + \overline{v}_{1\text{-}2}) - (L_1 + v_1 + \delta x_1) = (x_2^0 + \mathrm{d}x_2) - (x_1^0 + \mathrm{d}x_1). \tag{23-12}$$

Ținîndu-se seamă și de relația (23-11) rezultă forma finală a ecuației în cadrul metodei *Serbetçi*:

$$-v_1 + v_2 + \overline{v}_{12} + \mathrm{d}x_1 - \mathrm{d}x_2 + y_1 (t_2 - t_1) + y_2 (t_2 - t_0)^2 + \omega_{12} = 0, \tag{23-13}$$

unde

$$\omega_{12} = (L_2 - L_1) - (x_2^0 - x_1^0). \tag{23-14}$$

După cum se observă, ecuația (23-13) este o ecuație de condiție complexă, a corecțiilor v și $\overline{v}$, care conține și necunoscutele suplimentare $\mathrm{d}x$, y_1 și y_2. La un astfel de model s-au făcut și referiri în 3.9.3.

23.2. PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR ÎN REȚELE DE NIVELMENT GEOMETRIC ȘI GRAVIMETRICE PRIN METODA OBSERVAȚIILOR CONDIȚIONATE

Metoda observațiilor condiționate aplicată la rețelele de nivelment este cunoscută și sub denumirea de *metoda poligoanelor* deoarece formarea ecuațiilor de condiție se face în funcție de poligoanele *reale și fictive* existente în rețea. Dacă F reprezintă numărul punctelor vechi, numărul poligoanelor fictive va fi $F - 1$. Numărul r total al ecuațiilor de condiție va fi egal cu numărul poligoanelor reale plus numărul poligoanelor fictive. În comparație cu metoda observațiilor indirecte, metoda observațiilor condiționate este avantajoasă, în cazul de față, atunci cînd:

$$r < u, \tag{23-15}$$

unde u = numărul punctelor noi în rețea, deoarece rezultă, evident, un număr mai mic de ecuații normale.

În continuare se vor avea în vedere rețelele de nivelment din 23.1.

23.2.1. ALGORITMUL DE CALCUL

Principiile de prelucrare sînt cele expuse în 9.1., 9.3. și, cu adaptările corespunzătoare, în cap. 22.

23.2.1.1. **Formele ecuațiilor de condiție.** Pentru poligoanele reale, de tipul poligonului I, rezultă:

$$(\Delta h_{13}^0 + v_{13}) - (\Delta h_{23}^0 + v_{23}) - (\Delta h_{12}^0 + v_{12}) = 0, \tag{23-16}$$

din care se obține imediat forma liniarizată:

$$v_{13} - v_{23} - v_{12} + \omega_1 = 0;\quad \omega_1 = \Delta h_{13}^0 - \Delta h_{23}^0 - \Delta h_{12}^0. \tag{23-17}$$

Este indicat ca la scrierea ecuațiilor de condiție să se păstreze un anumit sens (de exemplu sensul orar) în toate poligoanele. Termenul liber ω apare ca o „neînchidere" în poligon.

Pentru poligoanele fictive, de tipul poligonului IV (fig. 23-2), ecuația de condiție este de forma:

$$H_A + (\Delta h^0_{A4} + v_{A4}) + (\Delta h^0_{4B} + v_{4B}) = H_B, \qquad (23\text{-}18)$$

astfel încît:

$$v_{A4} + v_{4B} + \omega_4 = 0; \quad \omega_4 = (H_A + \Delta h^0_{A4} + \Delta h^0_{4B}) - H_B. \qquad (23\text{-}19)$$

Prin urmare ecuațiile liniarizate de condiție pentru figura 23-2 vor fi:

$$\begin{aligned}
&\text{Poligonul I} && v_{13} - v_{23} - v_{12} + \omega_I = 0;\\
&\text{Poligonul II} && v_{A1} + v_{12} + v_{24} - v_{A4} + \omega_{II} = 0;\\
&\text{Poligonul III} && v_{23} + v_{3B} - v_{4B} - v_{24} + \omega_{III} = 0;\\
&\text{Poligonul IV} && v_{A4} + v_{4B} + \omega_{IV} = 0.
\end{aligned} \qquad (23\text{-}20)$$

23.2.1.2. **Sistemul ecuațiilor normale.** Sistemul ecuațiilor normale este de forma (9-79), specific observațiilor independente, ponderate. Prima ecuație va fi:

$$(L_{A1} + L_{12} + L_{A4})\, k_I - L_{12}\, k_{II} - L_{23}\, k_{III} + \omega_I = 0. \qquad (23\text{-}21)$$

Se observă că sistemul de ecuații normale poate fi scris direct de pe schița rețelei, indiferent de configurația sa, fiecărui poligon (real și fictiv) corespunzîndu-i o ecuație normală constituită din următorii termeni:

— coeficientul corelatei de pe diagonala principală, corespunzător poligonului pentru care se scrie ecuația, este egal cu lungimea (în km) a perimetrului poligonului considerat;

— în ecuație mai intervin doar corelatele corespunzătoare poligoanelor cu care poligonul este în legătură (inclusiv poligonul fictiv), coeficienții respectivi fiind egali cu lungimile (în km) ale liniilor dintre poligoane;

— termenul liber este egal cu neînchiderea în poligon.

Sistemul ecuațiilor normale rezultat se pretează de asemenea *la rezolvări prin procedee iterative*, deoarece coeficientul de pe diagonala principală este cel puțin egal cu suma celorlalți coeficienți din ecuația considerată. În cazul concret vor rezulta:

$$\begin{aligned}
L_I\, k_I &- L_{12} k_{II} - L_{23} k_{III} + \omega_I = 0;\\
-L_{12} k_I &+ L_{II} k_{II} - L_{24} k_{III} - L_{A4} k_{IV} + \omega_{II} = 0;\\
-L_{23} k_I &- L_{24} k_{II} + L_{III} k_{III} - L_{4B} k_{IV} + \omega_{III} = 0;\\
&- L_{A4} k_{II} - L_{4B} k_{III} + L_{IV} k_{IV} + \omega_{IV} = 0.
\end{aligned} \qquad (23\text{-}22)$$

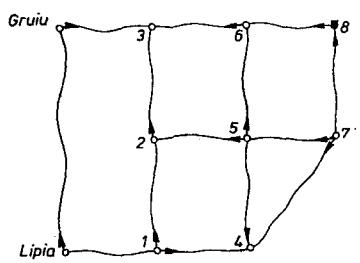


Fig. 23-3. Modificarea poziției punctului fix în rețeaua de nivelment geometric.

23.2.1.3. **Determinarea elementelor compensate și evaluarea preciziei.** Formulele utilizate au fost prezentate în 9.3.2. și 9.3.3., particularizările urmînd a se expune, mai edificator, în exemplificarea numerică prezentată în continuare.

23.2.2. EXEMPLU

Exemplul numeric se referă la aceeași rețea din figura 23-1, care a fost prelucrată în 23.1.2. prin metoda observațiilor indirecte (fig. 23-3), astfel

încît datele inițiale sînt conținute de tabelele 23-1 și 23-2. Ecuațiile de condiție sînt prezentate în tabelul 23-4, în care au fost trecute și funcțiile de pondere necesare determinării erorilor punctelor *5*, *8* și *G* din rețea.

Sistemul ecuațiilor normale este prezentat în tabelul 23-5, care conține și toate calculele pentru determinarea preciziei (coeficienții de pondere Q_{FF}, eroarea medie pătratică a unității de pondere s_0 exprimată în mm/km, erorile medii ale punctelor noi s_F, exprimate în mm, controale specifice).

Corecțiile v sînt determinate cu relația (9-78) în tabelul 23-4, unde s-a realizat și controlul specific metodei observațiilor condiționate — formula (9-81).

Rezultatele finale ale compensării sînt prezentate în tabelele 23-6 și 23-7 fiind identice cu cele care s-au obținut la metoda observațiilor indirecte.

23.3. PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR EXECUTATE ÎN REȚELELE DE NIVELMENT TRIGONOMETRIC

Așa cum s-a specificat în 17.2.1. și 17.2.5., nivelmentul trigonometric poate căpăta o multitudine de aplicații, care ar putea fi grupate astfel:

— determinarea diferențelor de nivel;

— determinarea coeficienților de refracție;

— determinări ale deviației verticalei și ondulațiilor geoidului.

Îmbinarea simultană, într-o singură rețea și ulterior într-o singură prelucrare a tuturor celor trei categorii de determinări menționate este greu de realizat. Se recomandă o grupare, de cel mult două asemenea determinări, urmînd ca prelucrarea să se desfășoare iterativ, în fiecare iterație urmărindu-se scopuri diferite, în raport de ceea ce s-a obținut anterior. În acest mod se elimină posibilitatea „supraparametrizării" modelului funcțional, prin includerea unui număr excesiv de necunoscute.

Avînd în vedere destinația lucrării de față, în cele ce urmează ne vom mărgini la îmbinarea primelor două categorii de determinări, urmînd ca analiza să cuprindă mai multe modele de calcul, pentru a oferi o bază de comparație.

23.3.1. FORME ALE MODELULUI DE PRELUCRARE

Pentru a ne apropia cît mai mult de situațiile întîlnite curent în producție, se va dezvolta prelucrarea observațiilor efectuate în rețelele de nivelment trigonometric în următoarele ipoteze:

— se cunosc unghiurile zenitale ζ^0 din determinări efectuate într-un singur sens (nivelment trigonometric unilateral) astfel încît formula care se va avea în vedere este (17-57);

— se cunosc (din determinări preliminarii) altitudinile provizorii H^0 ale punctelor din rețea și pentru cel puțin un punct altitudinea definitivă H(punct vechi);

— sînt determinate (eventual dintr-o prelucrare de sine stătătoare) distanțele D' dintre puncte, reduse la nivelul mării;

— înălțimile I și S se cunosc cu suficientă exactitate, astfel încît pot fi considerate fără erori.

Prelucrarea se va desfășura prin aplicarea metodei observațiilor indirecte.

Tabelul 23-4

Linia de nivelment	Ponderea p	Ecuația de condiție — Valoarea corelatelor k determinate în prelucrare: 1 $k_I = 0{,}1781$	2 $k_{II} = -0{,}1459$	3 $k_{III} = -0{,}0727$	4 $k_{IV} = -0{,}0162$	5 $k_V = 1{,}8994$	Funcții de pondere Q_{FF} pe altitudinile punctelor: 5	8	G	Sumă	Corecții v [mm]	Diferențe de nivel măsurate [m]	Diferențe de nivel compensate [m]
1–2	0,18	−1		+1			+1	+1		+2	−0,05	0,64993	0,64988
2–3	0,17	−1	+1							0	−0,05	0,42385	0,42380
6–3	0,28		−1							−1	0,05	0,72392	0,72397
5–6	0,17		−1		+1			+1		+1	0,02	0,78084	0,78086
5–4	0,18			+1		−1				0	−0,35	0,50151	0,50116
1–4	0,30			−1						−1	0,02	0,06999	0,07001
5–2	0,30		+1	−1			−1	−1		−2	−0,02	1,08105	1,08103
8–6	0,34				−1			−1		−2	0,01	0,78685	0,78686
7–8	0,27				−1					−1	0	4,08854	4,08854
7–4	0,37					+1				+1	0,71	4,59499	4,59570
7–5	0,33				+1	−1				0	−0,63	4,09517	4,09454
G–3	0,42	+1								+1	0,07	1,81247	1,81254
L–1	1,50	−1					+1	+1		+1	−0,28	1,03352	1,03324
L–G	1,56	+1							+1	+2	0,27	0,29411	0,29438
Suma		−1	0	0	0	−1	+1	+1	+1	+1 / +1			
Termen liber ω [mm]		−0,72	0,14	0,40	0,62	1,69							

$-[k\omega] = +3{,}99$ $\qquad [pvv] = 3{,}99$

Tabelul 23-5

k_I	k_{II}	k_{III}	k_{IV}	k_V	ω	Q_{FF}: 5	8	G	Sumă	Control
3,83	−0,17	−0,18	0	0	−0,72	−1,68	−1,68	1,56	0,96	
−1	0,0444	0,0470	0	0	0,1880	0,4386	0,4386	−0,4073	−0,2507	−0,2507
$k_I = 0{,}1781$	0,92	−0,30	−0,17	0	0,14	−0,30	−0,47	0	−0,35	
	0,9125	−0,3080	−0,17	0	0,1080	−0,3746	−0,5476	0,0693	−0,3074	−0,3074
	−1	0,3375	0,1863	0	−0,1184	0,4105	0,5968	−0,0759	0,3369	0,3368
	$k_{II} = -0{,}1459$	0,96	0	−0,18	0,40	0,48	0,48	0	1,66	
		0,8476	−0,0574	−0,18	0,4026	0,2746	0,2172	0,0967	1,6014	1,6013
		−1	0,0677	0,2124	−0,4750	−0,3240	−0,2563	−0,1141	−1,8893	−1,8893
		$k_{III} = -0{,}0727$	1,11	−0,33	0,62	0	0,51	0	1,74	
			1,0744	−0,3422	0,6674	−0,0512	0,4232	0,0195	1,7911	1,7911
			−1	0,3185	−0,6212	0,0477	−0,3939	−0,0181	−1,6671	−1,6670
			$k_{IV} = -0{,}0162$	0,88	−1,69	0	0	0	−1,32	
				0,7328	−1,3919	0,0420	0,1809	0,0267	−0,4094	−0,4095
				−1	1,8994	−0,0573	−0,2469	−0,0364	0,5587	0,5587
				$k_V = 1{,}8994$						

Verificare

$-\omega = +1{,}25$

$[(s-\omega)k] = +1{,}25$

$\left[\frac{ff}{p}\right]$

1,98	2,49	1,56

Q_{FF}^i

0,995490	1,161040	0,906973

$s_F^i = s_0\sqrt{Q_{FF}}$

0,82	0,88	0,78

$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm 0{,}82$

Tabelul 23-6

Linia de nivelment	Diferențe de nivel măsurate Δh^0 [m]	Corecții v [mm]	Diferențe de nivel compensate Δh [m]
1—2	0,64993	−0,04	0,64989
2—3	0,42385	−0,05	0,42379
6—3	0,72392	0,04	0,72396
5—6	0,78084	0,02	0,78086
5—4	0,50151	−0,35	0,50116
1—4	0,06999	0,02	0,07002
5—2	1,08105	−0,02	1,08103
8—6	0,78685	0,01	0,78685
7—8	4,08854	0	4,08854
7—4	4,59499	0,70	4,59569
7—5	4,09517	−0,63	4,09453
G—3	1,81247	0,07	1,81254
L—1	1,03352	−0,28	1,03324
L—G	0,29411	0,27	0,29438

Tavelul 23-7

Reperul de nivelment	Altitudini provizorii H^0 [m]	Necunoscute dx [mm]	Altitudini compensate H [m]
8	47,26181	—	47,26181
G	46,96011	−0,0259	46,96008
L	46,66600	−0,3038	46,66570
1	47,69880	0,1495	47,69895
2	48,34873	0,1049	48,34883
3	48,77258	0,0487	48,77262
4	47,76933	−0,3694	47,76896
5	47,26782	−0,0135	47,26780
6	48,04866	0,0071	48,04866
7	43,17327	−0,0051	43,17327

Modelul funcțional va cuprinde necunoscutele dx (pentru altitudini) și dy (pentru coeficienții de refracție):

$$H = H^0 + dx; \tag{23-23}$$

$$k = k^0 + dy. \tag{23-24}$$

Modelul stochastic este reprezentat de ecuații de forma:

$$\zeta_{ij} = \zeta^0_{ij} + v_{ij}, \tag{23-25}$$

precum și de condiția de minim:

$$[p_\zeta v_\zeta v_\zeta] \to \text{minim}. \tag{23-26}$$

În condițiile menționate, se obține următoarea ecuație prin dezvoltarea în serie a formulei (17-57) în ipoteza neglijării termenilor de ord. II și superiori:

$$v_{12} = a_{12}\,dx_1 - b_{12}\,dx_2 - b_{12}\,dy_1 + l_{12}, \tag{23-27}$$

unde:

$$a_{12} = 1/t_{12}; \tag{23-28}$$

$$t_{12} = \frac{D''}{\rho^{cc}\sin^2\zeta_1^0}\left[1 + \frac{1-k_1^0}{R}\,D''\operatorname{ctg}\zeta_1^0\right]; \tag{23-29}$$

$$D'' = D'\,(1 + H_m^0/R); \tag{23-30}$$

$$t_{12} \approx \frac{D''}{\rho^{cc}\sin^2\zeta_1^0}; \tag{23-31}$$

$$b_{12} = \frac{D''^2}{2\,R\,\sin^2\zeta_1^0}\cdot\frac{1}{100\,t_1}\rho^{cc}; \tag{23-32}$$

$$b_{12} \approx \rho^{cc}\frac{D''^2}{200\,R}; \tag{23-33}$$

$$l_{12} = \frac{1}{t_{12}}\left\{D''_{12}\operatorname{ctg}\zeta_1^0 + \frac{1-k_1^0}{2\,R\sin^2\zeta_1^0}\,D''^2_{12} - H_2^0 + H_1^0 + I_1 - S_2\right\}. \tag{23-34}$$

Observații. **1.** Coeficienții necunoscutelor ecuației (23-27) au fost astfel determinați, prin relațiile ulterioare, încît mărimea lor să fie relativ apropiată. De aceea este indicat ca distanțele D'' și razele de curbură R să fie exprimate în cm. În acest fel necunoscutele dx sînt exprimate tot în cm, astfel încît vor trebui împărțite la 100 înainte de a fi folosite în relația (23-23). Datorită relațiilor (23-32) și (23-33) și necunoscutele dy vor trebui împărțite la 100 înainte de a fi folosite în relația (23-24).

2. De cele mai multe ori este suficientă utilizarea formulelor (23-31) și respectiv (23-33) pentru calculul coeficienților necesari.

3. Așa cum se poate deduce și din formula (23-26) prelucrarea se desfășoară în ipoteza observațiilor independente, de precizii diferite. Ponderile pot fi evaluate printr-una din metodele examinate în 17.2.3. sau 20.4.2.1.2. În exemplul numeric ce se va prezenta în 23.3.2. ponderile aferente observațiilor zenitale vor fi estimate cu relația (20-38).

Modelul I de prelucrare. Prin ecuația (23-24) se introduce, în principiu, pentru fiecare măsurătoare de unghi zenital un coeficient de refracție propriu. Aceasta conduce la un exces de necunoscute în modelul funcțional, exces care nu va putea fi anihilat printr-un număr corespunzător de ecuații de forma (23-27) deoarece posibilitățile de măsurare sînt, evident, limitate într-o rețea dată. De aceea, un prim model de prelucrare posibil constă în acceptarea ipotezei că în timp cît se efectuează observațiile zenitale într-o stație, nu se produc modificări esențiale în valoarea coeficientului de refracție. În consecință, în acest model numărul necunoscutelor dy este egal cu numărul stațiilor, valoarea provizorie a coeficientului de refracție fiind $k^0 = 0{,}13$.

Modelul II de prelucrare. În acest model se introduce ipoteza acceptării unui singur coeficient de refracție pentru întreaga rețea. Aproximația pare prea mare, însă poate fi justificată în rețelele în care se dispune de un număr limitat de observații suplimentare $n-u$, ceea ce creează incertitudini la determinarea necunoscutelor care descriu modelul funcțional.

Modelul III de prelucrare. Se poate introduce o valoare constantă pentru coeficientul de refracție k, astfel încît modelul să nu mai conțină necunoscute dy. Desigur, rezultatele vor fi caracterizate printr-un grad mai mare de aproximație decît cele introduse de celelalte două modele.

Modelul IV de prelucrare. Este unul dintre modelele cele mai folosite în prezent, caracterizat prin numeroase aproximații. Aproximația cea mai mare rezidă din faptul că din măsurătorile de unghiuri zenitale *se calculează* diferențe de nivel Δh^0_{12}, cu relații de forma (17-58), care sînt prelucrate ca diferențe de nivel măsurate:

$$\Delta h_{12} = \Delta h^0_{12} + v_{12}, \tag{23-35}$$

$$[p_{\Delta h} v_{\Delta h} v_{\Delta h}] \rightarrow \text{minim}. \tag{23-36}$$

Modelul conține, suplimentar, următoarele aproximații:
— valoare constantă pentru coeficientul de refracție $k = 0{,}13$;
— se consideră $\sin^2 \zeta^0 \approx 1$ pentru toate situațiile.

Deoarece urmează a se prelucra diferențe de nivel, ponderile se estimează cu formula (17-23). Avînd în vedere numeroasele aproximații introduse, precum și dezvoltarea actuală a tehnicii de calcul în țara noastră, modelul examinat poate fi înlocuit cu unul din primele modele descrise anterior. Justificarea se va putea urmări și din exemplul numeric din 23.3.2. (tabelele 23-15 și 23-16).

Modelul V de prelucrare. În acest model se folosește relația (17-57) pentru calculul diferențelor de nivel Δh^0, care însă sînt prelucrate tot ca observații independente, ceea ce evident contrazice realitatea.

23.3.2. EXEMPLU

Exemplul numeric se referă la rețeaua de nivelment trigonometric reprezentată în figura 23-4, pentru care se cunosc datele inițiale din tabelele 23-8, 23-11 și măsurătorile din tabelul 23-9.

Prin calcule de transcalculări de coordonate, cunoscute de la *cursul de cartografie*, se determină latitudinile geodezice B și apoi razele medii *Gauss* R din tabelul 23-10. Prelucrarea după modelul I este reprezentată în tabelele 23-12, 23-13, 23-14, rezultatele finale fiind concentrate parțial în tabelul 23-14 [necunoscute dx, dy, corecții v și erorile medii ale fiecărei măsurători s — determinate cu relația (9-54)], precum și în tabelul 23-15, care concentrează și rezultatele obținute prin celelalte modele (altitudinile punctelor H și erorile acestora, coeficienții de refracție k și erorile acestora, eroarea medie a unității de pondere s_0 și eroarea medie *Helmert* generalizată pentru întreaga rețea $\bar{s}_x$). Diferențele de nivel compensate sînt trecute în tabelul 23-16, care are, de asemenea, un rol de concentrare a rezultatelor și prin celelalte modele de prelucrare.

Modelul II de prelucrare este prezentat în tabelul 23-17 (ecuațiile corecțiilor) și rezultatele în tabelele 23-15 și 23-16.

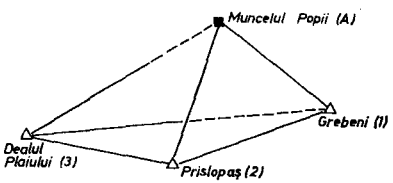


Fig. 23-4. Rețea de nivelment trigonometric geodezic.

Analog, modelul III de prelucrare este conținut în tabelele 23-18 și respectiv 23-15 și 23-16.

Datele inițiale pentru modelul IV de prelucrare *sînt calculate* în tabelul 23-19 (diferențele de nivel Δh^0), iar altitudinile provizorii noi, determinate pentru acest model de prelucrare, în tabelul 23-20. Prelucrarea diferențelor de nivel este prezentată în tabelele 23-21 (calculul

Tabelul 23-8

Denumirea punctului	Coordonate în proiecția stereografică 1970 x [m]	y [m]	Altitudini provizorii H^0 [m]	I [m]	S [m]
Muncelul Popii (*A*)	696 840,309	464 714,089	1 431,512	10,00	13,45
Grebeni (*1*)	695 089,594	468 786,483	1 595,216	1,30	5,72
Prislopaș (*2*)	692 204,240	464 163,777	1 202,604	1,30	6,65
Dealul Plaiului (*3*)	694 017,631	461 500,303	1 149,031	1,40	5,37

Tabelul 23-9

Punctul de stație	Punctul vizat	Unghiuri zenitale măsurate g	c	cc	Punctul de stație	Punctul vizat	Unghiuri zenitale măsurate g	c	cc
A	*1*	97	73	31	*1*	*A*	102	19	29
	2	103	18	34		*2*	104	53	92
2	*1*	95	38	79	*3*	*A*	95	64	37
	A	96	73	42		*1*	96	14	24
	3	100	99	25		*2*	98	84	87

Tabelul 23-10

Denumirea punctului	Latitudinea B °	′	″	Raza medie *Gauss* R [m]
A	47	46	12	6 380 435
1	47	45	16	6 380 477
2	47	43	42	6 380 798
3	47	44	40	6 380 786

Tabelul 23-11

Direcția	Distanțe în planul de proiecție D [m]	La nivelul mării D' [m]
A–*1*	4 432,764	4 431,713
A–*2*	4 668,616	4 667,652
1–*2*	5 449,282	5 448,087
2–*3*	3 222,186	3 221,592
3–*A*	4 277,374	4 276,509
3–*1*	7 364,613	7 363,029

termenilor liberi) și 23-22 (ecuațiile corecțiilor) fiind analogă cu cea descrisă în 23.1. Rezultatele prelucrării sînt prezentate în tabelele 23-15 și 23-16.

Analog, în modelul V, diferențele de nivel supuse prelucrării sînt preluate din tabelul 23-12, unde au fost determinate cu relația (17-57), iar altitudinile provizorii din tabelul 23-20. Ecuațiile corespondente sînt asemănătoare cu cele prezentate în tabelul 23-22, cu diferența că vor interveni termenii liberi din tabelul 23-23 și, ca urmare, vor rezulta corecțiile v din același tabel.

Rezultatele prelucrării sînt prezentate în tabelele 23-15 și 23-16.

Tabelul 23-12

Direcția	Distanța redusă la nivelul mării D' [m]	Unghiul zenital măsurat ζ° g	c	cc	D' ctg ζ°	Raza medie Gauss R [m]	$\frac{1-k^\circ}{2R\sin^2\zeta^\circ} D'^2$	I [m]	S [m]	Diferența de nivel calculată Δh° [m]
$A-1$	4 431,713	97	73	31	157,873	6 380 435	1,341	10,00	5,72	163,494
$A-2$	4 667,652	103	18	34	−233,599	6 380 435	1,489	10,00	6,65	−228,760
$1-A$	4 431,713	102	19	29	−152,715	6 380 477	1,341	1,34	13,45	−163,484
$1-2$	5 448,087	104	53	92	−389,117	6 380 477	2,034	1,34	6,65	−392,393
$2-1$	5 448,087	95	38	79	395,388	6 380 798	2,034	1,30	5,72	393,002
$2-A$	4 667,652	96	73	42	239,656	6 380 798	1,489	1,30	13,45	228,995
$2-3$	3 221,592	100	99	25	− 50,229	6 380 798	0,708	1,30	5,37	− 53,591
$3-A$	4 276,509	95	64	37	293,093	6 380 786	1,253	1,40	13,45	282,296
$3-1$	7 363,029	96	14	24	446,710	6 380 786	3,709	1,40	5,72	446,099
$3-2$	3 221,592	98	84	87	58,267	6 380 786	0,708	1,40	6,65	53,725 —

Tabelul 23-13

Direcția	Distanța redusă la nivelul mării D' (cm)	Unghiul zenital măsurat ζ° g	c	cc	R (m)	I (cm)	S (cm)	H_i° (cm)	H_j° (cm)	Δh° (cm)	$H_j^\circ - H_i^\circ$ (cm)	t $\left(\frac{\text{cm}}{\text{cc}}\right)$	a $\left(\frac{\text{cc}}{\text{cm}}\right)$	b' (cc)	l (cc)
$A-1$	443 171,3	97	73	31	6 380 435,00	1 000	572	143 151,2	159 521,6	16 349,4	16 370,4	0,697	1,435	2,211	−30,129
$A-2$	466 765,2	103	18	34	6 380 435,00	1 000	665	143 151,2	120 260,4	−22 876,3	−22 890,8	0,735	1,360	2,329	19,728
$1-A$	443 171,3	102	19	29	6 380 477,00	134	1 345	159 521,6	143 151,2	−16 348,4	−16 370,4	0,697	1,435	2,211	31,564
$1-2$	544 808,7	104	53	92	6 380 477,00	134	665	159 521,6	120 260,4	−39 239,3	−39 261,2	0,860	1,163	2,718	25,465
$2-1$	544 808,7	95	38	79	6 380 798,00	130	572	120 260,4	159 521,6	39 300,2	39 261,2	0,860	1,163	2,718	45,349
$2-A$	466 765,2	96	73	42	6 380 798,00	130	1 345	120 260,4	143 151,2	22 899,5	22 890,8	0,735	1,360	2,329	11,837
$2-3$	322 159,2	100	99	25	6 380 798,00	130	537	120 260,4	114 903,1	− 5 359,1	− 5 357,3	0,506	1,976	1,607	− 3,557
$3-A$	427 650,9	95	64	37	6 380 786,00	140	1 345	114 903,1	143 151,2	28 229,5	28 248,1	0,675	1,482	2,133	−27,555
$3-1$	736 302,9	96	14	24	6 380 786,00	140	572	114 903,1	159 521,6	14 609,9	44 618,5	1,161	0,861	3,673	− 7,407
$3-2$	322 159,2	98	84	87	6 380 786,00	140	665	114 903,1	120 260,4	5 372,5	5 357,3	0,506	1,976	1,607	30,039

Tabelul 23-14

Direcția	Ponderea p	Necunoscute: Altitudini dx_1	dx_2	dx_3	Coeficienți de refracție dy'_A	dy'_1	dy'_2	dy'_3	Termenul liber l [cm]	Sumă	Corecții v [cc]	Erori s [cc]
		−3,1607	25,1065	5,8617	−8,8784	4,7220	23,3411	−4,6167				
A−*1*	0,051	−1,435			−2,211				−30,129	−33,775	− 5,96	18,6
A−*2*	0,046		−1,360		−2,329				19,728	16,039	6,26	19,6
1−*A*	0,051	1,435				−2,211			31,564	30,788	16,59	18,6
1−*2*	0,034	1,163	−1,163			−2,718			25,465	22,747	−20,24	22,8
2−*1*	0,034	−1,163	1,163				−2,718		45,349	42,631	14,78	22,8
2−*A*	0,046		1,360				−2,329		11,837	10,868	− 8,38	19,6
2−*3*	0,096		1,976	−1,976			−1,607		− 3,557	− 5,164	− 3,04	13,6
3−*A*	0,055			1,482				−2,133	−27,555	−28,206	− 9,02	17,9
3−*1*	0,018	−0,861		0,861				−3,673	− 7,407	−11,080	17,32	31,3
3−*2*	0,096		−1,976	1,976				−1,607	30,039	28,432	− 0,57	13,6
Sumă	−	−0,861	0	2,343	−4,540	−4,929	−6,654	−7,413	95,334	73,280 / 73,280	−	−

Tabelul 23-15

Necunoscute \ Modelul		Modelul 1: Valoare [m]	Modelul 1: Eroare medie [m]	Modelul 2: Valoare [m]	Modelul 2: Eroare medie [m]	Modelul 3: Valoare [m]	Modelul 3: Eroare medie [m]	Modelul 4: Valoare [m]	Modelul 4: Eroare medie [m]	Modelul 5: Valoare [m]	Modelul 5: Eroare medie [m]
Necunoscute altitudini [m]	H_1	1 595,184	±0,141	1 595,106	±0,113	1 595,106	±0,121	1 595,169	±0,118	1 595,133	±0,119
	H_2	1 202,855	±0,11	1 202,669	±0,106	1 202,645	±0,106	1 202,554	±0,113	1 202,602	±0,114
	H_3	1 149,090	±0,118	1 149,051	±0,118	1 149,019	±0,112	1 148,965	±0,129	1 149,021	±0,131
Necunoscute refracție (coeficient)	k_A	0,041	±0,087	0,0464	±0,04						
	k_1	0,177	±0,094								
	k_2	0,363	±0,072								
	k_3	0,084	±0,072								
s_0		±4,2		±6,1		±6,2		±32,1		±32,5	
s_x		±0,07 m		±0,06 m		±0,07 m		±0,07 m		±0,07 m	

Tabelul 23-16

Direcția	Diferența de nivel compensată				
	Modelul 1 [m]	Modelul 2 [m]	Modelul 3 [m]	Modelul 4 [m]	Modelul 5 [m]
A—*1*	163,672	163,594	163,594	163,657	163,621
A—*2*	—228,657	—228,843	—228,867	—228,958	—228,910
1—*A*	—163,672	—163,594	—163,594	—163,657	—163,621
1—*2*	—392,329	—392,437	—392,461	—392,615	—392,531
2—*1*	392,329	392,437	392,461	392,615	392,531
2—*A*	228,657	228,843	228,867	—228,958	228,910
2—*3*	— 53,766	— 53,618	— 53,626	— 53,589	— 53,581
3—*A*	282,423	282,461	282,493	282,547	282,491
3—*1*	446,095	446,055	446,087	446,204	446,112
3—*2*	53,766	53,618	53,626	53,589	53,581

Tabelul 23-17

Direcția	Ponderea p	Necunoscute				Termenul liber [cm]	Sumă	Corecții v [m]	Erori s [cc]
		Altitudini			Coeficient de refracție y'_A				
		x_1	x_2	x_3					
		—11,0452	6,5070	2,0254	4,6393				
A—*1*	0,051	—1,435			—2,211	—30,129	—33,775	—24,54	26,9
A—*2*	0,046		—1,360		—2,329	19,728	16,039	0,48	28,3
1—*A*	0,051	1,435			—2,211	31,564	30,788	5,46	26,9
1—*2*	0,034	1,163	—1,163		—2,718	25,465	22,747	— 7,56	32,9
2—*1*	0,034	—1,163	1,163		—2,718	45,349	42,631	53,15	32,9
2—*A*	0,046		1,360		—2,329	11,837	10,868	9,88	28,3
2—*3*	0,096		1,976	—1,976	—1,607	— 3,557	— 5,164	— 2,16	19,6
3—*A*	0,055			1,482	—2,133	—27,555	—28,206	—34,45	25,9
3—*1*	0,018	—0,861		0,861	—3,673	— 7,407	—11,080	—13,19	45,2
3—*2*	0,096		—1,976	1,976	—1,607	30,039	28,432	13,73	19,6
Sumă	—	—0,861	0	2,343	—23,536	95,334	73,280 / 73,280	—	—

Tabelul 23-18

Direcția	Ponderea p	Necunoscute altitudini			Termenul liber l [cm]	Suma	Corecții v [cc]	Erori s [cc]
		x_1	x_2	x_3				
		—11,0504	4,0859	—1,2374				
A—*1*	0,051	—1,435			—30,129	—31,564	—14,27	27,6
A—*2*	0,046		—1,360		19,728	13,368	14,17	29,0
1—*A*	0,051	1,435			31,564	32,999	15,71	27,6
1—*2*	0,034	1,163	—1,163		25,465	25,465	7,86	33,8
2—*1*	0,034	—1,163	1,163		45,349	45,349	62,96	33,8
2—*A*	0,046		1,360		11,837	13,197	17,40	29,0
2—*3*	0,096		1,976	—1,976	— 3,557	— 3,557	6,97	20,1
3—*A*	0,055			1,482	—27,555	—26,073	—29,39	26,6
3—*1*	0,018	—0,861		0,861	— 7,407	— 7,407	1,04	46,4
3—*2*	0,096		—1,976	1,976	30,039	30,039	19,51	20,1
Sumă	—	—0,861	0	2,343	95,334	96,816 / 96,816	—	—

Tabelul 23-19

Direcția	Distanța redusă la nivelul mării D' [m]	Unghiul zenital măsurat ζ^g			D' ctg ζ^g	Raza medie *Gauss* R [m]	Coeficient de refracție fix k	$\frac{1-k}{2R} D'^2$	I [m]	S [m]	Diferența de nivel calculată Δh^o [m]
		g	c	cc							
A—*1*	4 432,764	97	73	31	157,910			1,340	10,0	5,72	163,530
A—*2*	4 668,616	103	18	34	—233,648			1,486	10,0	6,65	—228,812
1—*A*	4 432,764	102	19	29	—152,751			1,340	1,34	13,45	—163,521
1—*2*	5 449,282	104	53	92	—389,202			2,024	1,34	6,65	—392,488
2—*1*	5 449,282	95	38	79	395,475	6 380 624	0,13	2,024	1,30	5,72	393,079
2—*A*	4 668,616	96	73	42	239,706			1,486	1,30	13,45	229,042
2—*3*	3 222,186	100	99	25	— 50,238			0,708	1,30	5,37	—53,600
3—*A*	4 277,374	95	64	37	293,152			1,247	1,40	13,45	282,349
3—*1*	7 364,613	96	14	24	446,806			3,698	1,40	5,72	446,184
3—*2*	3 222,186	98	84	87	58,278			0,708	1,40	6,65	53,736

Tabelul 23-20

Denumirea punctului	Altitudinea provizorie H^o [m]
1	1 595,389
2	1 202,718
3	1 149,040

Tabelul 23-21

Direcţia	Altitudinea provizorie H_i° [m]	Altitudinea provizorie H_i° [m]	Diferenţa de nivel calculată Δk° [m]	Termenul liber l [m]	Ponderea p
A—*1*	1 595,389	1 431,512	163,530	0,347	2,256
A—*2*	1 202,718	1 431,512	—228,812	0,018	2,142
1—*A*	1 431,512	1 595,389	—163,521	—0,356	2,256
1—*2*	1 202,718	1 595,389	—392,488	—0,183	1,835
2—*1*	1 595,389	1 202,718	393,079	—0,408	1,835
2—*A*	1 431,512	1 202,718	229,042	—0,248	2,142
2—*3*	1 149,040	1 202,718	— 53,600	—0,078	3,103
3—*A*	1 431,512	1 149,040	282,349	0,123	2,338
3—*1*	1 595,389	1 149,040	446,184	0,165	1,358
3—*2*	1 202,718	1 149,040	53,736	—0,058	3,103

Tabelul 23-22

Direcţia	Ponderea p	Necunoscute x_1	x_2	x_3	Termenul liber l [m]	Sumă	Corecţii v [m]
		—0,220	—0,164	—0,075			
A—*1*	2,256	+1			0,347	1,347	0,127
A—*2*	2,142		+1		0,018	1,018	—0,146
1—*A*	2,256	—1			—0,356	—1,356	—0,136
1—*2*	1,835	—1	+1		—0,183	—0,183	—0,127
2—*1*	1,835	+1	—1		—0,408	—0,408	—0,464
2—*A*	2,142		—1		—0,248	—1,248	—0,084
2—*3*	3,103		—1	+1	—0,078	—0,078	0,011
3—*A*	2,338			—1	0,123	—0,877	0,198
3—*1*	1,358	+1		—1	0,165	0,165	0,020
3—*2*	3,103		+1	—1	—0,058	—0,058	—0,147
Suma	—	+1	0	—2	—0,678	—1,678 / —1,678	—

Tabelul 23-23

Direcţia	*A*—*1*	*A*—*2*	*1*—*A*	*1*—*2*	*2*—*1*	*2*—*A*	*2*—*3*	*3*—*A*	*3*—*1*	*3*—*2*
Termenul liber l [m]	0,210	—0,148	—0,220	—0,219	—0,390	—0,087	0,018	0,185	0,086	—0,152
Corecţia v [m]	0,127	—0,150	—0,137	—0,138	—0,471	—0,085	0,010	0,195	0,013	—0,144

Capitolul 24

UNELE PROBLEME ACTUALE ALE PRELUCRĂRII OBSERVAŢIILOR EFECTUATE ÎN REŢELELE GEODEZICE

În acest capitol vor fi abordate numai *unele* dintre problemele actuale ale prelucrării observaţiilor geodezice. Lista unor asemenea probleme, precum şi a soluţiilor propuse este extrem de mare, astfel încît selecţia acestora se impune, avînd drept criteriu în primul rînd frecvenţa lor de apariţie în activitatea geodezică actuală.

24.1. PRELUCRAREA OBSERVAŢIILOR ÎN REŢELELE GEODEZICE LIBERE

Definiţia reţelelor libere a fost dată în 8.3.[1], iar aspectele de principiu pe care le implică prelucrarea observaţiilor geodezice în reţelele libere au fost abordate în 10.1.1. În completare, se specifică faptul că *prelucrarea propriu-zisă* a măsurătorilor geodezice efectuate în reţelele libere ar fi posibilă, de exemplu, prin utilizarea metodei observaţiilor condiţionate (cap. 22 sau 23.2.). În acest caz, ecuaţiile interioare de condiţie ar conduce la *geometrizarea reţelei* geodezice, *dar nu şi la încadrarea sa într-un sistem de coordonate unitar*. În schimb, utilizarea algoritmului prezentat în cap. 21 sau 23.1 specific metodei clasice a observaţiilor indirecte, la prelucrarea măsurătorilor geodezice în reţele libere nu este posibilă deoarece determinantul sistemului ecuaţiilor normale este nul [v. relaţia (24-1)]. Desigur, încadrarea reţelei considerate într-un sistem de coordonate unitar este, în aceste condiţii, de asemenea nerezolvabilă.

Pentru obţinerea geometrizării reţelei libere prin metoda clasică a observaţiilor indirecte este necesară alegerea (arbitrară) unui număr necesar şi suficient de elemente fixe, determinat de numărul de grade de libertate care caracterizează reţeaua geodezică (v. tabelul 10-1), Aşa, de exemplu, în cazul reţelelor de nivelment este necesară atribuirea arbitrară a unei altitudini pentru unul dintre punctele reţelei. În cazul reţelelor de triangulaţie este necesară atribuirea a patru elemente fixe cum ar fi, de exemplu, coordonatele x, y pentru unul dintre punctele reţelei, o orientare, de asemenea arbitrară, către un punct din reţea şi cunoaşterea lungimii unei laturi. De cele mai multe ori cele patru elemente menţionate sînt reprezentate de coordonatele x, y pentru două puncte aflate în legătură directă. În reţelele de trilateraţie sînt necesare trei elemente, iar în reţelele tridimensionale şapte elemente fixe. *Alegerea arbitrară a acestor elemente fixe, strict necesare şi suficiente ca număr, nu influenţează rezultatele prelucrării care se referă la forma sau la geometria reţelei*, reflectată prin corecţiile $\mathbf{v}$ şi abaterea standard a unităţii de pondere s_0. Acestea vor fi aceleaşi ca în cazul aplicării metodei observaţiilor condiţionate avînd aceleaşi mărimi, *indiferent* de modalitatea de dispunere în reţea a elementelor fixe menţionate.

În schimb, alte rezultate ale compensării, prin care se poziţionează reţeaua dată în sistemul de coordonate (necunoscutele $\mathbf{x}$ şi erorile individuale $\mathbf{s}_x$ aferente) *vor diferi în funcţie de dispunerea elementelor fixe arbitrare în reţea.* Pentru exemplificarea celor afirmate, în tabelul 24-1 se prezintă rezultatele finale care s-au obţinut la prelucrarea unei reţele de triangulaţie (figura 24-1) în mai multe variante de prelucrare, care diferă prin modalitatea de alegere a celor două puncte fixe în reţea. Calculele intermediare fiind labo-

Tabelul 24-1

Punctul	Varianta de prelucrare									
	Varianta I					Varianta II				
	Coordonate		Precizia			Coodonate		Precizia		
	x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]	x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]
1	697 037,374	461 924,601	0,317	0,193	0,371	697 035,161	461 925,017	0,124	0,076	0,146
2	696 842,784	464 713,942	0,309	0,193	0,364	696 840,653	467 713,856	0,127	0,080	0,150
3	694 019,372	461 499,304	0,248	0,157	0,294	694 017,699	461 499,849	0,071	0,058	0,092
4	692 205,592	464 163,439	0,206	0,127	0,242	692 204,292	464 163,531	0,060	0,040	0,073
5	690 842,053	459 997,556	0,193	0,137	0,237	690 840,930	459 998,425	0,048	0,049	0,069
6	688 105,696	460 903,362	0,136	0,102	0,170	688 105,084	460 994,114	0,026	0,034	0,043
7	688 088,073	464 780,720	0,121	0,076	0,143	688 087,529	464 780,769	—	—	—
8	686 526,404	456 844,167	0,142	0,158	0,213	686 526,010	456 845,680	—	—	—
9	684 154,207	459 058,612	0,092	0,113	0,146	684 154,280	459 059,763	0,035	0,044	0,056
10	682 453,759	460 663,111	0,052	0,082	0,097	682 454,167	464 664,001	0,045	0,052	0,069
11	686 451,436	464 334,884	0,102	0,059	0,118	686 451,181	464 335,041	0,039	0,022	0,045
12	681 041,460	463,638,060	—	—	—	681 042,176	463 638,461	0,060	0,066	0,089
13	683 262,283	465 052,165	0,021	0,034	0,040	683 262,618	465 052,246	0,058	0,047	0,074
14	682 313,681	466 990,676	—	—	—	682 314,221	466 990,421	0,072	0,064	0,096
	$s_0 = 5^{cc},14$					$s_0 = 5^{cc},14$				

Tabelul 24-1 (continuare)

Punctul	Varianta de prelucrare									
	Varianta III					Varianta IV				
	Coordonate		Precizia			Coordonate		Precizia		
	x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]	x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]
1	697 035,277	461 925,037	—	—	—	697 035,244	461 925,098	0,052	0,031	0,060
2	696 840,649	467 713,897	—	—	—	696 840,699	464 714,007	0,052	0,044	0,068
3	694 017,802	461 499,736	0,061	0,038	0,072	694 017,708	461 499,885	0,033	0,023	0,041
4	692 204,263	464 163,369	0,079	0,056	0,097	692 204,225	464 163,615	0,039	0,024	0,046
5	690 841,063	459 998,163	0,116	0,083	0,142	690 840,874	459 998,387	0,046	0,025	0,053
6	688 105,151	460 903,745	0,165	0,096	0,191	688 104,948	460 904,068	0,035	0,023	0,042
7	688 087,431	464 780,439	0,164	0,105	0,195	688 087,431	464 780,439	0,039	0,022	0,045
8	686 526,232	456 845,202	0,216	0,176	0,278	686 525,878	456 845,512	0,037	0,048	0,060
9	684 154,384	459 059,208	0,261	0,156	0,304	684 154,062	459 059,626	0,034	0,037	0,050
10	682 454,185	460 663,390	0,297	0,158	0,336	682 453,887	460 663,885	0,029	0,033	0,044
11	686 450,085	464 334,638	0,198	0,118	0,230	686 450,963	464 335,065	0,038	0,020	0,043
12	681 042,049	463 637,777	0,328	0,177	0,373	681 041,825	463 638,364	0,033	0,037	0,049
13	683 262,459	465 051,714	0,276	0,161	0,319	683 262,310	465 052,252	0,033	0,028	0,043
14	682 313,969	466 989,870	0,300	0,200	0,361	682 313,867	466.990,466	0,039	0,053	0,066
	$s_0 = 5^{cc}$, 14					$s_0 = 5^{cc}$, 14				

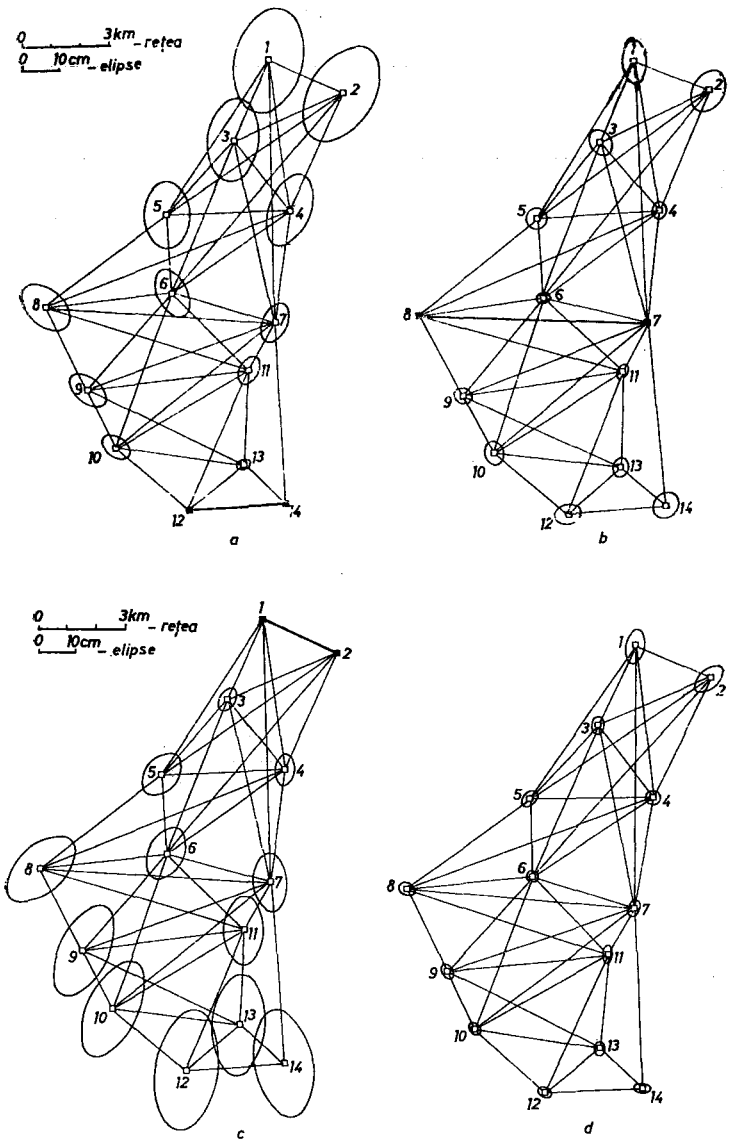


Fig. 24-1. Modificări survenite ca urmare a schimbării poziției punctelor fixe într-o rețea de triangulație:
a — punctele fixe: *12* și *14*; *b* — punctele fixe: *7* și *8*; *c* — punctele fixe: *1* și *2*; *d* — rețea liberă.

rioase, nu se mai prezintă detaliat aici. De menționat însă că pentru primele trei variante acestea se desfășoară ca în 21.5, iar în ultima variantă ca în 24.1.1. și respectiv 24.1.2.:

— alegerea punctelor fixe la capetele rețelei (fig. 24-1, *a* și respectiv 24-1, *c*), care au ca echivalent variantele I și III de prelucrare;

— alegerea punctelor fixe la mijlocul rețelei (fig. 24-1, *b*) — varianta II de prelucrare;

— prelucrare în rețea liberă (fig. 24-1, *c*) — varianta IV (fără puncte fixe).

Un exemplu similar a fost examinat și în 23.1.2., unde au rezultat două soluții diferite la prelucrarea rețelelor de nivelment, obținute prin schimbarea punctului fix. În cazul în care ca punct fix s-a introdus punctul *L* (fig. 23-1) rezultatele finale sînt cele din tabelele 23-2 și 23-3, iar atunci cînd s-a introdus punctul *8* (fig. 23-3) rezultatele sînt cele din tabelele 23-6 și 23-7.

Din ambele exemple menționate rezultă concluzia că alegerea arbitrară a poziției punctelor fixe poate conduce la soluții limită, puțin favorabile. De aceea, în asemenea situații este recomandat ca alegerea elementelor fixe să fie dirijată *spre mijlocul rețelei*, ceea ce uniformizează *parțial* propagarea erorilor în rețea — fig. 24-1, *b*, comparativ cu figura 24-1, *a* sau figura 24-1, *c*.

Soluții unice pentru problema prelucrării observațiilor geodezice în rețelele libere se pot obține prin condiții suplimentare celor expuse în cap. 9 și 21.

24.1.1. SOLUȚIA MEISSL-BJERHAMMAR-MITTERMAYER

În cazul rețelelor libere sistemul de ecuații normale specific prelucrărilor prin metoda observațiilor indirecte:

$$\mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{l}^* = \mathbf{0} \tag{9-38}$$

nu poate fi rezolvat direct deoarece determinantul matricei N este zero:

$$\det \mathbf{N} = \mathbf{0}. \tag{24-1}$$

Matricea **N** este singulară și nu poate fi inversată, *defectul (deficitul) matricei fiind egal cu numărul gradelor de libertate specific tipului de rețea care se prelucrează (tabelul 10-1)*.

Matricea inversă generalizată definită în cazul de față prin $(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}$ este *însă calculabilă*, astfel încît soluțiile sistemului (9-38) vor fi:

$$\mathbf{x} = -\,\mathbf{N}\,(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}\,\mathbf{l}^* \tag{24-2}$$

De remarcat că soluțiile x deduse din relația (24-2) satisfac condiția:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} \rightarrow \text{minim}. \tag{10-6}$$

Exprimînd soluțiile ca funcții de termenii liberi [v. relațiile (9-28)]:

$$\mathbf{x} = -\,\mathbf{N}\,(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}\,\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{l} = \mathbf{D}\mathbf{l} \tag{24-3}$$

și folosind legea de propagare a erorilor (9-46), rezultă formula de calcul a matricei de corelație a necunoscutelor în cazul rețelelor libere, notată în analogie cu (9-41):

$$\mathbf{Q}_x^l = \mathbf{D}\,\mathbf{D}^T = \mathbf{N}\,(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}\,\mathbf{N}\,(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}\,\mathbf{N}. \tag{24-4}$$

Termenii de pe diagonala principală din matricea $\mathbf{Q}_x^l$ vor fi folosiți la calculul erorilor individuale cu formule de forma (9-53).

Bjerhammar demonstrează că soluțiile $\mathbf{x}$ se pot obține și din relația

$$\mathbf{x} = -\mathbf{Q}_x^l \mathbf{l}^*, \tag{24-5}$$

care este, de fapt, o generalizare a relației (9-40). Rezultă o proprietate extrem de importantă a matricei $\mathbf{Q}_x^l$:

$$\text{urma } \mathbf{Q}_x^l \rightarrow \text{minim}, \tag{24-6}$$

care are drept consecință relația:

$$s_0^2 \sum (Q_{xx} + Q_{yy}) = \sum (s_x^2 + s_y^2) = \sum s_i^2 \rightarrow \text{minim}. \tag{10-7}$$

Prin aceasta, metoda de prelucrare devine extrem de atractivă pentru geodezie, în sensul că criteriul de precizie globală (10-7) este îndeplinit. Eroarea medie de determinare a poziției unui punct din rețea, care reflectă *precizia interioară a rețelei*, în ansamblul său, va fi:

$$\bar{s}_P = s_0 \sqrt{\frac{\text{urma } \mathbf{Q}_x^l}{2P}}, \tag{24-7}$$

unde cu P s-a notat numărul total de puncte din rețeaua geodezică considerată. În analogie cu această formulă s-a introdus relația (10-13) în cazul rețelelor geodezice constrînse sau fără constrîngeri, care constituie un criteriu de apreciere a preciziei globale. Eroarea medie a unității de pondere, în cazul prelucrării observațiilor în rețelele geodezice libere, se va determina cu o formulă analogă cu (9-44):

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u + d}}, \tag{24-8}$$

unde cu d s-a notat defectul matricei $\mathbf{N}$ (tabelul 10-1). Formulele (24-8) și (24-7) sînt estimatori ai preciziei *interioare a rețelei*, în concepția lui *Meissl* (1962).

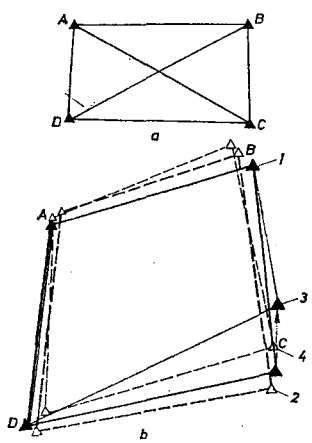
Revenind la exemplul de prelucrare prezentat prin figura 24-1, rezultatul obținut din prelucrarea observațiilor ca într-o rețea liberă este prezentat sugestiv în figura 24-1, *d*, din care se constată cu ușurință că *elipsele erorilor au mărimi minime și o repartizare uniformă în rețea*, în raport de celelalte rezolvări, reprezentate de figurile 24-1, *a*, *b*, *c*.

Algoritmul de calcul propus de Mittermayer va fi exemplificat numeric pe rețeaua din figura 24-2, *a*, avîndu-se în vedere observațiile unghiulare din tabelul 24-3. Pentru a oferi posibilitatea desprinderii unor concluzii, prelucrarea s-a desfășurat în mai multe variante:

— *varianta I de prelucrare*: au fost considerate puncte fixe punctele *A* și *B*, iar puncte noi punctele *C* și *D*, ale căror coordonate sînt trecute în tabelul 24-2. Prelucrarea s-a desfășurat după algoritmul descris în cap 21, obținîndu-se coordonatele din tabelul 24-16, care conține și rezultatele obținute în celelalte variante de prelucrare;

— *varianta II de prelucrare*: toate punctele rețelei (*A*, *B*, *C*, *D*) sînt considerate puncte noi, fiind aplicat algoritmul *Mittermayer*. Au fost considerate coordonate provizorii, cele prezentate în tabelul 24-2;

— *variantele III și IV de prelucrare* se bazează tot pe algoritmul *Mittermayer* și vor fi explicate în 24.1.3.



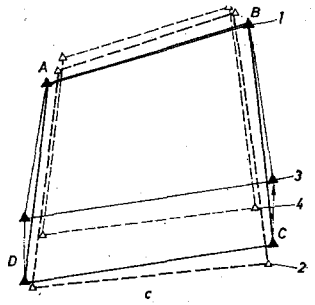


Fig. 24-2. Influența modificării coordonatelor provizorii asupra rezultatelor prelucrării observațiilor geodezice într-o rețea de triangulație liberă:
a — schema direcțiilor observate; *b* — modificări după schimbarea coordonatei provizorii x_C°; *c* — modificări după schimbarea coordonatelor provizorii x_C° și x_D°; *1* — poziția inițială a punctelor provizorii; *2* — poziția punctelor după prelucrare; *3* — poziția punctelor provizorii după modificarea corespondentă; *4* — poziția punctelor după prelucrare cu noile coordonate provizorii.

Tabelul 24-2

Punctul	Coordonate în proiecția stereografică 1970	
	x [m]	y [m]
A	216 482,551	110 789,732
B	217 728,222	114 779,437
C	213 700,584	115 303,872
D	212 554,630	110 354,624

Tabelul 24-3

Stația	Punctul vizat	Direcții centrate, reduse la planul de proiecție			Stația	Punctul vizat	Direcții centrate, reduse la planul de proiecție		
		g	c	cc			g	c	cc
A	*B*	103	38	25	*C*	*D*	97	63	87
	C	157	80	93		*A*	147	28	50
	D	229	67	20		*B*	203	88	09
B	*C*	0	00	00	*D*	*A*	0	00	00
	D	53	28	67		*B*	38	01	98
	A	88	97	69		*C*	78	49	19

Desfășurarea calculelor în varianta I de prelucrare conține o serie de calcule care sînt analoge cu cele prezentate în exemplul numeric din 21.5.3.: calculul coeficienților de direcție *a* și *b*, orientările provizorii θ^0, rezultînd ecuațiile corecțiilor din tabelul 24-4. Pentru a avea o legătură cu celelalte exemplificări numerice din acest paragraf, se prezintă principalele calcule din această variantă: ecuațiile transformate ale corecțiilor (tabelul 24-5), sistemul ecuațiilor normale (tabelul 24-6), rezolvarea ecuațiilor normale prin metoda *Gauss*, la care s-au anexat și calculele suplimentare pentru determinarea coeficienților de pondere Q din matricea $\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^{-1}$ [v. relația (9-41)].

Soluțiile pentru necunoscutele rezultate în această variantă de prelucrare vor fi notate în continuare cu $\bar{\mathbf{x}}$ și sînt trecute în tabelul 24-4, unde se află și corecțiile $\mathbf{v}$, împreună cu verificarea generală a prelucrării (ultimele coloane). Așa cum s-a mai specificat, soluțiile $\bar{\mathbf{x}}$ și erorile medii s_x,

Tabelul 24

Punctul de stație	Punctul vizat	Direcții centrate, reduse la planul de proiecție α^0_{ij} g	c	cc	Orientări din coordonate θ^0_{ij} g	c	cc	Unghi de orientare $z^0_i = \theta^0_{ij} - \alpha^0_{ij}$ g	c	cc	Punctul C dx −0,4280 dm	Punctul C dy 0,0664 dm	Punctul D dx −0,3045 dm	Punctul D dy −0,0863 dm	$^1_2x - ^1_fx = fs_f$ cc	p_{ij}	v_{ij} cc	dz_i cc	$d\theta_{ij}$ cc	Direcții compensate $\alpha^0_{ij} = \alpha_{ij} + v_{ij}$ g	c	cc	Controlul compensării $\theta^0_{ij} = \alpha^0_{ij} + z_i$ g	c	cc	Orientări 6 di coordonate definitive g	c	cc
A	B	103	38	23	80	73	39,13	377	35	14,13					0,08	0,5	−1,52			103	38	23,48	80	73	39,13	80	73	39,1
	C	157	80	93	135	16	37,02	377	35	14,02	−10,2209	− 6,2989			−0,03	0,5	2,34		3,97	157	80	95,34	135	16	10,99	135	16	10,9
	D	229	67	20	207	02	34,01	377	35	14,01			1,7736	−16,0111	−0,04	0,5	−0,80	1,60	0,84	229	67	19,20	207	02	34,85	207	02	34,9
	Σ/s							377	35	14,05	−10,2209	− 6,2989	1,7736	−16,0111	0,01	√6	0,02		4,81	377	35	15,65						
B	A	88	97	69	280	73	39,13	191	75	70,13					0,00	0,5	0,47	−0,47		88	97	69,47	280	73	39,13	280	73	39,1
	C	0	00	00	191	75	70,09	191	75	70,09	− 2,0238	−15,5428			−0,04	0,5	0,27		−0,16	0	00	00,27	191	75	69,93	191	75	69,8
	D	53	28	67	245	04	37,18	191	75	70,18			6,0782	− 7,1067	0,05	0,5	−0,72		−1,24	53	28	66,28	245	04	35,94	245	04	35,9
	Σ/s							191	75	70,13	− 2,0238	−15,5428	6,0782	− 7,1067	−0,01	√6	0,02		−1,40	191	75	69,66						
C	A	147	28	50	335	16	07,02	187	87	57,02					−3,00	0,5	−0,95		3,97	147	28	49,05	335	16	10,99	335	16	10,9
	B	203	88	09	391	75	70,09	187	87	61,09	−10,2209	− 6,2989			1,07	0,5	−1,01		−0,16	203	88	07,99	391	75	69,93	391	75	69,8
	D	97	63	87	285	51	48,95	187	87	61,95	− 2,0238	−15,5428			1,93	0,5	1,96	1,92	1,95	97	63	88,96	285	51	50,90	285	51	50,9
	Σ/s							187	87	60,02	−12,2085	2,8268	12,2085	− 2,8268	0,00	√6	0,00		5,76	187	87	61,94						
D	A	0	00	00	7	02	34,01	7	02	34,01					−0,37	0,5	−0,05		0,84	399	99	99,95	7	02	34,85	7	02	34,9
	B	38	01	98	45	04	37,18	7	02	39,01	−12,2085	2,8268	6,0782	− 7,1067	4,80	0,5	3,04		−1,24	38	02	01,04	45	04	35,94	45	04	35,9
	C	78	49	19	85	51	48,95	7	02	29,95			12,2085	− 2,8268	−4,43	0,5	−3,00	0,52	1,95	78	49	16,00	85	51	50,90	85	51	50,9
	Σ/s							7	02	34,38	−12,2085	2,8268	20,0603	−25,9446	0,00	√6	−0,01		1,55	7	02	34,90						

Tabelul 24-5

Ecuația	Ponderea	C dx	C dy	D dx	D dy	L (cc)	Sumă
$C-A$	1	−10,2209	− 6,2989			−1,515	−18,0348
$B-C$	1	− 2,0238	−15,5428			0,515	−17.0516
$A-D$	1			1,7736	−16,0111	−0,205	−14,4425
$B-D$	1			6,0782	− 7,1067	2,425	1,3965
$C-D$	1	−12,2085	− 2,8628	12,2085	− 2,8268	−1,250	−1,2500
Z_A	−1	− 4,1727	− 2,5715	0,7241	− 6,5365	0	−12,5566
Z_B	−1	− 0,8262	− 6,3453	2,4814	− 2,9013	0	− 7,5914
Z_C	−1	− 9,9830	− 7,7628	4,9841	− 1,1540	0	−13,9157
Z_D	−1	− 4,9841	1,1540	8,1896	−10,5918	0	− 6,2323
Σ		−44,4192	−34,5405	36,4395	−47,1282	− 0,030	−89,6784 / −89,6784

Tabelul 24-6

115,0145	−26,3920	−53,4018	−59,4719	29,7030	5,4518
					5,4518
	180,7773	81,3580	−39,9444	− 1,9952	193,8038
					193,8037
		90,5452	− 1,6776	− 0,8846	115,9392
					115,9392
			150,1900	−10,4180	38,6782
					38,6781

s_y, s_t sînt prezentate și în tabelul centralizator 21-16 (coloanele corespunzătoare variantei I).

Desfășurarea calculelor în varianta a II-a de prelucrare va fi prezentată în detaliu, deoarece în literatura de specialitate de la noi din țară nu a apărut, pînă în prezent, descrierea și analiza acestei metode de prelucrare a observațiilor în rețelele geodezice libere.

1. După parcurgerea calculelor intermediare (coeficienții de direcție a și b, orientările provizorii 0^0), se formează ecuațiile corecțiilor (tabelul 24-8), desigur în ipoteza nouă, a considerării tuturor punctelor rețelei ca puncte noi.

2. Se formează sistemul ecuațiilor transformate ale corecțiilor (tabelul 24-9) analog ca în exemplul numeric prezentat în 21.5.3.

3. Se calculează matricea sistemului ecuațiilor normale **N** (tabelul 24-10) și vectorul **l*** aferent din relația (9-38).

4. Se calculează matricea $\mathbf{N}\,\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$. Se elimină un număr de linii și de coloane din matricea $\mathbf{N}_1$ egal cu defectul matricei **N** (de obicei ultimele

Tabelul 24-7

dx_C	dy_C	dx_D	dy_D	L	Qxx_C	Qyy_C	Qxx_D	Qyy_D	s
115,0145	−26,3920	−53,4018	−57,4719	29,7030	−1	0	0	0	4,4518
−1	0,229467	0,464305	0,517082	− 0,258254	0,008695	0	0	0	−0,038706
		180,7773	−39,9444	− 1,9952	0	−1	0	0	192,8037
		174,721210	−53,590838	4,820658	−0,229467	−1	0	0	193,825340
		−1	0,306722	− 0,027591	0,001313	0,005723	0	0	−1,109340
			−1,6776	− 0,8846	0	0	−1	0	114,9392
			−8,094988	11,000033	−0,373549	0,395510	−1	0	40,346372
			0,210702	− 0,286317	0,009723	−0,010295	0,026029	0	−1,050164
			150,1900	−10,4180	0	0	0	−1	37,6781
			101,295030	8,737218	0,666172	−0,223387	−0,210702	−1	107,931570
			−1	− 0,086255	0,006577	0,002205	0,002080	0,009872	−1,065517

linii și respectiv ultimele coloane). În cazul concret examinat au fost eliminate 4 linii și respectiv 4 coloane, rezultînd matricea din tabelul 24-11 (matricea este simetrică față de diagonală).

5. Matricea astfel transformată se inversează (tabelul 24-12).

6. Matricea inversă obținută la punctul 5 se completează cu un număr de linii și de coloane egal cu defectul matricei **N**, avînd *toate elementele nule*. Această matrice este $(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}$ — tabelul 24-13.

7. *Soluțiile prelucrării* se obțin în ordine cu relațiile (24-3) pentru necunoscutele **x** [fiind trecute în tabelul 24-16 (Varianta II)] și respectiv (9-26) pentru corecțiile **v** (tabelul 24-8). Celelalte necunoscute d*z* ale prelucrării, precum și controlul final al compensării se realizează tot în tabelul 24-8, analog ca în exemplul numeric din 21.5.3.

8. *Evaluarea preciziei*. Eroarea medie a unității de pondere s_0 se calculează cu formula (24-8). Pentru calculul erorilor individuale se calculează inițial matricea $\mathbf{N}\,(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}$ — tabelul 24-14 și apoi matricea coeficienților de pondere $\mathbf{Q}_x^l$ cu relația (24-4) în tabelul 24-15. Erorile individuale se determină cu relația (9-53) folosind coeficienții de pondere de pe diagonala matricei $\mathbf{Q}_x^l$, iar elementele elipselor erorilor cu relațiile (9-59) — (9-61). Rezultatele se prezintă în tabelul 24-16 (Varianta II).

Control. Din utilizarea relației (24-5) rezultă aceleași soluții **x** care s-au obținut la punctul 7 de mai sus.

24.1.2. SOLUȚII HANSEN-HELMERT-WOLF

În mai multe lucrări prof. *Wolf* (1972, 1975, 1981 ș.a.) a expus modalități personale de tratare a prelucrării observațiilor în rețelele geodezice libere, care conduc la rezolvări originale, deși problematica a fost abordată cu mulți ani în urmă de cunoscuți matematicieni și geodezi *Hansen* (1867) și *Helmert* (1924).

Soluția 1

Vectorul necunoscutelor **x** definit cu relația (9-24) este descompus în două părți distincte:

$$\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{matrix} \right\|. \tag{24-9}$$

În vectorul $\mathbf{x}_1$ sînt cuprinse necunoscutele care intervin în mod obișnuit la prelucrarea observațiilor în rețelele geodezice în care se acceptă un număr strict necesar pentru evitarea singularității determinantului sistemului ecuațiilor normale, iar în vectorul $\mathbf{x}_2$ celelalte necunoscute. Așa cum s-a specificat și în tabelul 10-1, rezultă că vectorul $\mathbf{x}_2$ va cuprinde doar o necunoscută la prelucrarea observațiilor în rețelele libere de nivelment, 3 și respectiv 4 necunoscute în rețelele libere de triangulație și trilaterație ș.a.m.d.

Ca urmare, sistemul ecuațiilor corecțiilor (9-26) *poate fi transcris* sub forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}_1\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{l};\ \text{pondere}\ \mathbf{P}. \tag{24-10}$$

Dacă se notează:

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{l}, \tag{24-11}$$

sistemul (24-10) se poate scrie și sub forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}_1\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{l}_1;\ \ \mathbf{P}, \tag{24-12}$$

Tabelul 24-8

Punctul de stație	Punctul vizat	Direcții centrate reduse la planul de proiecție α°_{ij} g	c	cc	Orientări din coordonate θ°_{ij} g	c	cc	Unghi de orientare $z^{j}_{i} = \theta^{\circ}_{ij} - \alpha^{\circ}_{ij}$ g	c	cc	Punctul A d_x [dm]	Punctul A d_y [dm]	Punctul B d_x [dm]	Punctul B d_y [dm]	Punctul C d_x [dm]	Punctul C d_y [dm]
											0,0942	0,0839	0,0847	−0,1195	−0,1494	−0,0396
A	B	103	38	25	80	73	39,13	377	35	14,13	14,5393	− 4,5395	−14,5393	4,5395		
	C	157	80	93	135	16	07,02	377	35	14,02	10,2209	− 6,2989			−10,2209	− 6,2989
	D	229	67	20	207	02	34,01	377	35	14,01	− 1,7736	16,0111				
	Σ							377	35	14,05	22,9866	17,7705	−14,5393	4,5395	−10,2209	− 6,2989
	s															
B	A	88	97	69	280	73	39,13	191	75	70,13	14,5393	− 4,5395	−14,5393	4,5395		
	C	0	00	00	191	75	70,09	191	75	70,09			2,0238	15,5428	− 2,0238	−15,5428
	D	5:	28	57	24.	04	: :	191	75	70,18			− 6,0782	7,1067		
	Σ							191	75	70,13	14,5393	− 4,5393	−18,5937	27,1890	− 2,0238	−15,5428
	s															
C	A	147	28	50	335	16	07,02	187	87	57,02	10,2209	− 6,2989			−10,2209	− 6,6989
	B	203	88	09	391	75	70,02	187	87	61,09			2,0238	15,5428	− 2,0238	−15,5428
	D	97	63	87	285	51	48,95	187	87	61,95					−12,2089	2,8268
	Σ							187	87	60,02	10,2209	6,2989	2,0238	15,5428	−24,4532	−19,0149
	s															
D	A	0	00	00	7	02	34,01	7	02	34,01	− 1,7736	16,0111				
	B	38	01	98	45	04	37,18	7	02	39,18			− 6,0782	7,1067		
	C	78	49	19	85	51	48,95	7	02	29,95					−12,2085	2,8268
	Σ							7	02	34,38	− 1,7736	16,0111	− 6,0782	7,1067	−12,2085	2,8268
	s															

Punctul D d_x [dm]	Punctul D d_y [dm]	$z^{j}_{i} - z^{\circ}_{i}$ cc	p_{ij}	v_{ij} cc	dz_i cc	$d\theta_{ij}$ cc	Direcții compensate $\alpha_{ij} = \alpha^{\circ}_{ij} + v_{ij}$ g	c	cc	Controlul compensării $\theta_{ij} = \alpha_{ij} + z_i$ g	c	cc	Orientări θ din coordonate definitive g	c	cc
−0,0294	0,0652														
		0,08	0,5	−1,54		−0,79	103	38	23,46	80	73	38,34	80	73	38,38
		−0,03	0,5	2,35		3,21	157	80	95,35	135	16	10,23	135	16	10,16
1,7736	−16,0111	−0,04	0,5	−0,79	0,83	0,08	207	02	34,09	207	02	34,09	207	02	33,96
1,7736	−16,0111	0,01	$\sqrt{6}$	0,02		2,50	377	35	14,88						
		0,00	0,5	0,45		−0,79	88	97	69,45	280	73	38,34	280	73	38,38
		−0,04	0,5	0,29		−0,91	0	00	00,29	191	75	69,18	191	75	69,16
6,0782	− 7,1067	0,05	0,5	−0,72	−1,24	−2,01	53	28	66,28	245	04	35,17	245	04	35,16
6,0782	− 7,1067	0,01	$\sqrt{6}$	0,02		−3,71	191	75	68,89						
		−3,00	0,5	−0,95		3,21	147	28	49,05	335	16	10,23	335	16	10,16
		1,07	0,5	−1,00		−0,91	203	88	08,00	391	75	69,18	391	75	69,16
12,2089	− 2,8268	1,93	0,5	−1,96	1,16	1,19	77	63	88,96	285	51	50,13	285	51	50,13
12,2089	− 2,8268	0,00	$\sqrt{6}$	0,01		3,49	187	87	61,18						
1,7736	−16,0111	−0,37	0,5	−0,04		0,08	399	99	99,96	7	02	34,09	7	02	33,96
6,0782	− 7,1067	4,80	0,5	3,04		−2,01	38	02	01,04	45	04	35,17	45	04	35,16
12,2085	− 2,8268	−4,43	0,5	−2,99	−0,25	1,19	78	49	16,01	85	51	50,14	85	51	50,13
20,0603	−25,9446	0,00	$\sqrt{6}$	0,01		−0,74	7	02	34,13						

Tabelul 24-9

Ecuația	Pondere	A		B		C		D		L (cc)	Sumă
		dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy		
A-B	1	14,5393	−4,5395	−14,5393	4,5393					0,040	0,040
A-C	1	10,2209	6,2989			−10,2209	− 6,2989			−1,515	−1,515
A-D	1	−1,7736	16,0111					1,7736	−16,0111	−0,205	−0,205
B-C	1			2,0238	15,5428	− 2,0238	−15,5428			0,515	0,515
B-D	1			− 6,0782	7,1067			6,0782	− 7,1067	2,425	2,425
C-D	1					−12,2085	2,8268	12,2085	− 2,8268	−1,250	−1,250
Z_A	−1	9,3842	−7,2548	− 5,9356	1,8532	− 4,1727	− 2,5715	0,7241	− 6,5365	0	0,0000
Z_B	−1	5,9356	−1,8532	− 7,5908	11,0999	− 0,8262	− 6,3453	2,4814	− 2,9013	0	0,0001
Z_C	−1	4,1727	2,5715	0,8262	6,3453	− 9,9830	− 7,7628	4,9841	− 1,1540	0	0,0000
Z_D	−1	0,7241	6,5365	− 2,4814	2,9013	− 4,9841	1,1540	8,1896	−10,5918	0	0,0000
Σ		41,7550	32,2801	−33,7753	49,3887	−44,4192	−34,5405	36,4395	−47,1282	0,010	0,0101 / 0,0101

Tabelul 24-10

177,7734	−93,0957	−115,8787	−41,6504	−22,3582	30,6417	−39,5364	104,1039	−14,5395	−15,5401 / −14,5399
	211,2336	109,0906	−48,7626	22,6104	− 20,3606	−38,6053	−142,1102	−13,0067	−13,006 / −13,006
		152,7400	19,4722	−39,2544	− 85,6077	2,3931	− 42,9544	−14,2790	−14,288 / −14,278
			115,0145	63,2536	−120,4717	−41,0753	31,8649	25,4199	25,418 / 25,419
				137,3684	− 26,3920	−53,4018	− 59,4719	29,7030	29,703 / 29,703
					180,7773	81,3580	− 39,9444	− 1,9952	−1,994 / −1,994
						90,5452	− 1,6776	− 0,8846	−0,884 / −0,884
							150,1900	−10,4180	−10,417 / −10,417

Tabelul 24-11

69272,275	−61222,4968	−55578,1967	−11007,0713
	90176,4557	56411,7305	−10056,5705
		59757,6999	11519,1898
			44578,7998

Tabelul 24-12

6,850077 · 10^{-5}	2,293 944 · 10^{-5}	3,977 823 · 10^{-5}	1,180 992 · 10^{-5}
	4,530 323 · 10^{-5}	−2,577 744 · 10^{-5}	2,254 495 · 10^{-5}
		8,134 391 · 10^{-5}	−1,701 273 · 10^{-5}
			3,483 024 · 10^{-5}

Tabelul 24-13

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,850 077 · 10^{-5}	2,293 944 · 10^{-5}	3,977 823 · 10^{-5}	1,180 992 · 10^{-5}	0	0	0	0
2	2,293 944 · 10^{-5}	4,530 323 · 10^{-5}	−2,577 744 · 10^{-5}	2,254 495 · 10^{-5}	0	0	0	0
3	3,977 823 · 10^{-5}	−2,577 744 · 10^{-5}	8,134 391 · 10^{-5}	−1,701 273 · 10^{-5}	0	0	0	0
4	1,180 992 · 10^{-5}	2,254 495 · 10^{-5}	−1,701 273 · 10^{-5}	3,483 024 · 10^{-5}	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 24-14

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,940 714 · 10^{-3}	1,908 536 · 10^{-3}	7,537,681 · 10^{-4}	5,213 713 · 10^{-4}	0	0	0	0
2	2,232,001 · 10^{-3}	3,522 574 · 10^{-3}	5,887 724 · 10^{-4}	1,084 562 · 10^{-4}	0	0	0	0
3	8,703 891 · 10^{-4}	−1,214 282 · 10^{-3}	4,671 668 · 10^{-3}	−8,293 790 · 10^{-4}	0	0	0	0
4	−1,574 792 · 10^{-3}	−5,695 199 · 10^{-4}	−1,152 854 · 10^{-3}	2,862 060 · 10^{-3}	0	0	0	0
5	−1,827 335 · 10^{-3}	2,944 367 · 10^{-3}	−5,741 431 · 10^{-3}	3,116 666 · 10^{-3}	0	0	0	0
6	−3,196 138 · 10^{-3}	−7,287 982 · 10^{-4}	−3,170 338 · 10^{-3}	−2,777 860 · 10^{-3}	0	0	0	0
7	−3,983 761 · 10^{-3}	−3,643 616 · 10^{-3}	3,159 249 · 10^{-4}	−2,808 652 · 10^{-3}	0	0	0	0
8	2,538 941 · 10^{-3}	−2,224 319 · 10^{-3}	3,766 118 · 10^{-3}	−1,337 749 · 10^{-4}	0	0	0	0

Tabelul 24-15

0,263 181 · 10⁻²	0,116 464 · 10⁻²	−0,425 468 · 10⁻³	−0,126 437 · 10⁻²	−0,371 095 · 10⁻³	−0,530 016 · 10⁻³	−0,183 524 · 10⁻²	6,629 729 · 10⁻³
	0,217 594 · 10⁻²	0,472 878 · 10⁻³	−0,126 606 · 10⁻²	−0,220 532 · 10⁻³	−0,426 932 · 10⁻³	−0,141 698 · 10⁻²	−0,482 965 · 10⁻³
		0,170 186 · 10⁻²	−0,279 661 · 10⁻³	−0,160 078 · 10⁻²	−0,862 222 · 10⁻³	0,324 396 · 10⁻³	0,669 029 · 10⁻³
			0,179 905 · 10⁻³	0,112 979 · 10⁻²	−0,462 929 · 10⁻³	0,414 236 · 10⁻³	−0,700 681 · 10⁻⁴
				0,255 881 · 10⁻²	0,384 684 · 10⁻³	−0,586 933 · 10⁻³	−0,129 397 · 10⁻²
					0,168 424 · 10⁻²	0,100 754 · 10⁻³	0,794 414 · 10⁻³
						0,209 777 · 10⁻²	−0,478 188 · 10⁻⁵
							0,134 746 · 10⁻²

Tabelul 24-16

Punctul	Varianta de prelucrare	Varianta I					Varianta II					
		Coordonate		Precizia			Coordonate		Precizia			
		x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]	x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]
A		16 482,551	10 789,732	—	—	—	16 482,560	10 789,740	0,011	0,010	0,015
B		17 728,222	14 779,437	—	—	—	17 728,230	14 779,425	0,010	0,008	0,013
C		13 700,541	15 303,879	0,027	0,021	0,034	13 700,569	15 303,869	0,008	0,009	0,012
D		12 554,600	10 354,615	0,033	0,020	0,039	12 554,627	10 354,631	0,009	0,007	0,011
		$s_0 = 2^{cc},04$					$s_0 = 2^{cc},04$					
Punctul	Varianta de prelucrare	Varianta III					Varianta IV					
		Coordonate		Precizia			Coordonate		Precizia			
		x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]	x [m]	y [m]	s_x [m]	s_y [m]	s_t [m]
A		16 482,573	10 789,738	0,011	0,010	0,015	16 482,631	10 789,783	0,011	0,010	0,015
B		17 728,284	14 779,375	0,010	0,008	0,013	17 728,275	14 779,383	0,010	0,008	0,013
C		13 700,663	15 303,868	0,008	0,009	0,012	13 700,700	15 303,816	0,008	0,009	0,012
D		12 554,664	10 354,683	0,009	0,007	0,011	12 554,781	10 354,683	0,009	0,007	0,011
		$s_0 = 2^{cc},04$					$s_0 = 2^{cc},06$					

care poate fi rezolvat sub condiția de minim (9-31). Notînd, analog cu (9-36), (9-37):

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1 = \mathbf{N}_{11}; \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1^*; \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 = \mathbf{N}_{12},$$

soluțiile sistemului (24-12) vor fi:

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{N}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{l}_1^*, \tag{24-13}$$

adică:

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{x}_2 - \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \tag{24-14}$$

La sistemul (24-14) se adaugă identitatea:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{E} \mathbf{x}_2, \tag{24-15}$$

unde $\mathbf{E}$ este matricea unitate. Se obține astfel un sistem complex, constituit din relațiile (24-14) și respectiv (24-15), în care necunoscutele propriu-zise sînt considerate necunoscutele $\mathbf{x}_2$ din membrul drept. Necunoscutele din membrul stîng $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ îndeplinesc *temporar* rolul pe care îl au în mod obișnuit corecțiile $\mathbf{v}$, rezolvarea urmînd a se realiza sub *condiția suplimentară de minim* (10-6). Sistemul ecuațiilor normale rezultat în ipotezele menționate va avea forma:

$$(\mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} + \mathbf{E}) \mathbf{x}_2 + \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{0}. \tag{24-16}$$

Din acest sistem rezultă vectorul necunoscutelor $\mathbf{x}_2$, care se poate introduce apoi în (24-14) pentru a se calcula vectorul necunoscutelor $\mathbf{x}_1$.

Condiția de minim (10-6) a fost introdusă de *Helmert* și de aceea soluția la care ne-am referit pînă acum este denumită curent soluția *Helmert-Wolf*. Matricea de covariață a necunoscutelor $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ are o formă complicată, putînd fi urmărită în lucrarea originală (*Wolf* 1972). De fapt, întreaga rezolvare dată prin soluția descrisă mai înainte presupune un calcul matriceal laborios.

Soluția 2

Relativ recent, prof. *Wolf* (1981) propune o altă soluție, care se bazează pe o relație folosită de *Hansen* într-o lucrare publicată în anul 1867. Exemplificări și analize asupra algoritmului sînt date de *Öztürk* (1977).

Fie $\mathbf{x}$ vectorul necunoscutelor obținut prin prelucrarea observațiilor geodezice ca într-o rețea liberă și $\bar{\mathbf{x}}$ vectorul obținut din prelucrarea aceleiași rețele în ipoteza existenței unui număr strict necesar și suficient de elemente fixe. În exemplul numeric urmărit în acest capitol, vectorul $\mathbf{x}$ are echivalent în soluțiile din varianta II, iar vectorul $\bar{\mathbf{x}}$ în soluțiile din varianta I (tabelul 24-12). Cele două categorii de necunoscute sînt dependente printr-o transformare liniară care poate fi scrisă general sub forma:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \mathbf{t}. \tag{24-17}$$

Sistemul (24-17) se poate trata ca un „sistem de ecuații ale corecțiilor", necunoscutele $\mathbf{x}$ din membrul stîng avînd temporar rolul obișnuit al corecțiilor $\mathbf{v}$, iar necunoscutele propriu-zise fiind parametrii transformării $\mathbf{t}$. Acest raționament este posibil deoarece „corecțiilor" $\mathbf{x}$ le corespunde condiția de minim (10-6). Din această condiție rezultă relația de trecere la sistemul de ecuații normale:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{x} = 0, \tag{24-18}$$

asemănătoare cu relația (9-33). Sistemul ecuațiilor normale fiind:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C}\,\mathbf{t} + \mathbf{C}^T\bar{\mathbf{x}} = 0, \tag{24-19}$$

rezultă soluțiile:

$$\mathbf{t} = -(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\bar{\mathbf{x}}. \tag{24-20}$$

Aceste soluții introduse în (24-17) oferă o relație de legătură între vectorii $\mathbf{x}$ și $\bar{\mathbf{x}}$, prin care soluția prof. *Wolf* capătă o importanță deosebită:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{R})\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{x}}, \tag{24-21}$$

unde $\mathbf{E}$ este matricea unitate, iar $\mathbf{R}$ și $\mathbf{J}$ se determină cu relațiile

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^T = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T; \tag{24-22}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^T = \mathbf{E} - \mathbf{R}.$$

Pentru calculele de evaluare a preciziei, de determinare a erorilor individuale, se utilizează relațiile (9-45) — (9-46), aplicate în cazul concret examinat aici, determinat de formula (24-21). Rezultă pentru început

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{J}\,\mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x}}\,\mathbf{J}, \tag{24-23}$$

astfel încît erorile medii ale coordonatelor x și y se determină cu relațiile (9-58) și apoi erorile medii totale cu formula (9-63).

Estimatorii preciziei interioare a rețelei se determină cu relațiile (24-8) și (24-7), după ce în prealabil corecțiile $\mathbf{v}$ s-au calculat cu relațiile (9-26) prin utilizarea soluțiilor $\mathbf{x}$ obținute cu formula (24-21).

Apreciind că soluția 2 expusă mai înainte are o importanță deosebită și că poate căpăta o dezvoltare remarcabilă în viitor, în special datorită caracterului său iterativ, în continuare se va descrie algoritmul de calcul folosind același exemplu ca în algoritmul *Mittermayer*.

● O primă etapă a prelucrării este constituită de rezolvarea prezentată în *Varianta I* de calcul, care este cunoscută și aplicată frecvent în producție și cercetare. În această variantă se *alege arbitrar* numărul de elemente fixe, strict necesare și suficiente, la care s-au mai făcut referiri în acest paragraf. În cazul examinat, al rețelei de triangulație, au fost alese ca puncte fixe punctele A și B, rezultînd soluțiile din tabelul 24-16 (Varianta 1). Așa cum s-a menționat, soluțiile obținute în această primă etapă sînt notate cu $\bar{\mathbf{x}}$.

O b s e r v a ț i e. Soluțiile $\bar{\mathbf{x}}$ nu sînt invariante în raport de modalitatea de alegere a punctelor fixe, precum și în raport de modalitatea de determinare a valorilor provizorii ale necunoscutelor $\mathbf{x}^0$.

● Etapa a doua a calculelor începe prin determinarea matricei $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} \mathbf{C}_A \\ \mathbf{C}_B \\ \mathbf{C}_C \\ \mathbf{C}_D \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{C}_J = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -y_J & x_J \\ & & & \\ 0 & 1 & x_J & y_J \end{Vmatrix}; \quad J = A,B,C,D. \tag{24-24}$$

Coeficienții matricei $\mathbf{C}_J$ (tabelul 24-17) sînt astfel „pregătiți", încît să aibă valori apropiate de unitate (din coordonatele x și y din tabelul 24-2 a fost nlăturată cifra comună 210 000 și rezultatul s-a multiplicat cu 10^{-4}).

● Urmează o serie de calcule necesare deducerii necunoscutelor $\mathbf{t}$: sistemul ecuațiilor normale $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ (tabelul 24-18), rezolvarea acestui sistem și deducerea coeficienților necesari pentru calculul coeficienților $\mathbf{Q}_t = (\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}$ în tabelul 24-19. Soluțiile pentru vectorul $\mathbf{t}$ sînt prezentate în tabelul 24-17, împreună cu valorile necunoscutelor $\mathbf{x}$, în raport de necunoscutele $\bar{\mathbf{x}}$.

Se observă ușurința cu care se pot calcula necunoscutele $\mathbf{x}$, specifice prelucrării observațiilor în rețelele geodezice libere în raport de soluțiile $\bar{\mathbf{x}}$ obținute prin algoritmi obișnuiți, în rețele geodezice fără constrîngeri.

Valorile necunoscutelor $\mathbf{x}$ sînt egale cu cele obținute prin aplicarea algoritmului *Mittermayer*.

● Calculele de evaluare a preciziei sînt relativ laborioase:

— se formează matricea $(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}$ în tabelul 24-20 prin folosirea calculelor conținute în ultimele coloane ale tabelului 24-19, putîndu-se *efectua controlul* indicat de relația (24-20). Soluțiile care rezultă sînt identice cu cele obținute prin metoda *Gauss* în tabelul 24-19;

— se calculează în continuare matricele $(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T$ în tabelul 24-21, $\mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T$ în tabelul 24-22 și în final matricea $\mathbf{J}$ cu relația (24-22). Ca un control al acestor calcule se poate folosi relația:

$$\mathbf{x} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{x}}; \tag{24-21}$$

— se determină matricea $\mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x}}$ (tabelul 24-24) prin calculele intermediare prezentate în tabelul 24-7.

Se completează această matrice cu zero în liniile și coloanele aferente punctelor considerate fixe la determinarea soluțiilor $\mathbf{x}$, rezultînd matricea din tabelul 24-25. Matricea astfel formată se multiplică la dreapta cu matricea $\mathbf{J}$ (tabelul 24-26). Rezultatul se multiplică la stînga tot cu matricea $\mathbf{J}$, rezultînd matricea cofactorilor $\mathbf{Q}_{xx}$ din relația (24-23) și care se prezintă în tabelul (24-27). *De menționat* că această matrice este identică cu matricea specifică procedeului *Mittermayer* $\mathbf{Q}_x^I$ (tabelul 24-15) avînd același rol, reflectat de relația (24-5).

24.1.3. CONSIDERAȚII FINALE

● Metoda de calcul expusă prin *soluția a 2-a a lui Wolf* oferă posibilitatea eliminării (în etapa a doua) *parametrilor exteriori* rețelei geodezice considerate, prin care s-a definit poziționarea acesteia (în prima etapă) în sistemul de coordonate acceptat. În acest fel se înțelege mai profund sensul de *precizie interioară* a rețelei, care este determinată în funcție de precizia realizată la măsurare, precum și de forma rețelei considerate, fără a se mai apela la *factori exteriori*.

● În algoritmul *Mittermayer*, precum și în *soluția 1 a lui Wolf* eliminarea parametrilor exteriori se realizează în procesul de prelucrare propriu-zis, soluțiile fiind, evident identice.

● Rezultă că prin soluția a 2-a a lui Wolf se creează posibilitatea ca orice rețea *prelucrată deja, în ipoteza considerării unui număr strict necesar și suficient de elemente fixe*, să fie transformată într-o rețea liberă, obținîndu-se astfel soluții corespondente împreună cu estimarea preciziei interioare a rețelei.

● Relații de forma (24-18) au fost folosite de *Hansen* în anul 1867, la „rezolvarea generală a unor probleme de teoria probabilităților", pentru ridicarea gradelor de libertate în prelucrările în care numărul necunoscu-

Tabelul 24-17

Nr. crt.	Coeficienții matricei G				$\bar{x}$ [cm]	Suma	x [cm]
	$t_1 = 3{,}894557$	$t_2 = 2{,}019471$	$t_3 = -1{,}253092$	$t_4 = -4{,}732336$			
1	1	0	−0,078 973	0,648 255	0	1,569 282	0,9
2	0	1	0,648 255	0,078 973	0	1,727 228	0,8
3	1	0	−0,477 944	0,772 822	0	1,294 878	0,8
4	0	1	0,772 822	0,477 944	0	2,250 766	−1,2
5	1	0	−0,530 388	0,370 054	−4,3	−3,460 334	−1,5
6	0	1	0,370 054	0,530 388	0,7	2,600 442	−0,3
7	1	0	−0,035 462	0,255 460	−3,0	−1,780 002	−0,3
8	0	1	0,255 460	0,035 462	−0,9	0,390 922	0,6
Suma	4	4	0,923 824	3,169 358	−7,5	4,593182 / 4,593182	

Tabelul 24-18

4	0	−1,122 767	2,046 591	−7,3	−2,376 176
	4	2,046 591	1,122 767	−0,2	6,969 358
		1,736 924	0	2,416 178	5,076 926
			1,736 924	−2,018 256	2,888 026

Tabelul 24-19

	t_1	t_2	t_3	t_4	$\bar{x}$					Suma
	4	0	−1,122767	2,046591	−7,3	−1	0	0	0	−3,376176
	−1	0	0,280692	−0,511648	1,825	0,25	0	0	0	0,844044
$t_1 = 3{,}894557$		4	2,046591	1,122767	−0,2	0	−1	0	0	5,969358
		4	2,046591	1,122767	−0,2	0	−1	0	0	5,969358
		−1	−0,511648	−0,280692	0,05	0	0,25	0	0	−1,492340
$t_2 = 2{,}019471$			1,736924	0	2,416178	0	0	−1	0	4,076926
			0,374638	0	0,469456	−0,280692	0,511648	−1	0	0,075050
			−1	0	−1,253092	0,749235	−1,365713	2,669243	0	−0,200327
$t_3 = -1{,}253092$				1,736924	−2,018256	0	0	0	−1	1,888026
				0,374638	1,772913	0,511648	0,280692	0	−1	1,939889
				−1	−4,732336	−1,365713	−0,749235	0	2,669243	−5,178036

$t_4 = -4{,}732336$

Tabelul 24-20

1,159 069	0	0,749235	−1,365 713
	1,159069	−1,365713	−0,749 235
		2,669243	0
			2,669 243

Tabelul 24-21

0,214569	0,377841	−0,254476	−0,073709	0,256296	−0,447100	0,783615	0,142969
−0,377841	0,214569	0,073709	−0,254476	0,447100	0,256296	−0,142969	0,783615
0,538437	0,364437	−0,526514	0,697137	−0,666499	−0,377949	0,654578	−0,683828
0,364637	−0,538437	0,697137	0,526514	−0,377949	0,666499	−0,683828	−0,654578

Tabelul 24-22

0,408425	0	0,239027	0,212551	0,063924	0,014809	0,288626	−0,227360
	0,408425	−0,212551	0,239027	−0,014809	0,063924	0,227360	0,288626
		0,535931	0	0,282758	0,248623	−0,057714	−0,036072
			0,535931	−0,248623	0,282758	0,036072	−0,057714
				0,469937	0	0,183381	0,263434
					0,469937	−0,263434	0,183381
						0,585713	0
							0,585713

Tabelul 24-23

0,591575	0	−0,239027	−0,212551	−0,063924	−0,014809	−0,288626	0,227360
	0,591575	0,212551	−0,239027	0,014809	0,063924	−0,227360	−0,288626
		0,464069	0	−0,282758	−0,248623	0,057714	0,036072
			0,464069	0,248623	−0,282758	−0,036072	0,057714
				0,530063	0	−0,183381	−0,263434
					0,530063	0,263434	−0,183381
						0,414288	0
							0,414288

Tabelul 24-24

0,017010	−0,001063	0,011109	0,006577
	0,010287	−0,009830	0,002205
		0,026467	0,002080
			0,009872

Tabelul 24-25

0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0.	0	0
			0	0	0	0	0
				0,017010	−0,001063	0,011109	0,006577
					0,010287	−0,009830	0,002205
						0,026467	0,002080
							0,009872

Tabelul 24-26

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
−0,002783	−0,004104	−0,003667	0,004508	0,005247	0,001157	0,001203	−0,001561
0,003254	0,000925	−0,002745	−0,002691	0,000658	0,002459	−0,001168	−0,000693
−0,007731	−0,005825	0,000905	0,004707	0,000487	0,001380	0,006338	−0,000262
0,001191	−0,003366	−0,001932	0,001506	0,000504	−0,000094	0,000236	0,001959

Tabelul 24-27

0,002632	0,001165	−0,000425	−0,001264	−0,000371	−0,000530	−0,001835	0,000631
	0,002176	0,000473	−0,001266	−0,000221	−0,000427	−0,001417	−0,000484
		0,001702	−0,000279	−0,001601	−0,000862	0,000324	0,000669
			0,001799	0,001130	−0,000463	0,000414	−0,000070
				0,002559	0,000385	−0,000587	−0,001294
					0,001684	0,001007	−0,000794
						0,002098	−0,000005
							0,001347

telor este mai mare decît cel strict necesar (așa-numita „supraparametrizare" a modelului de calcul). Prin urmare numărul concret al relațiilor care intervin în sistemul (24-18) depinde de tipul rețelei geodezice, așa cum se menționează în tabelul 10-1. De reamintit, de asemenea, că relațiile (24-18) derivă din condiția de minim (10-6).

● În aceeași lucrare (*Wolf* 1981), în care se dezvoltă soluția 2, este examinată și posibilitatea estimării *preciziei interioare* (în concepția *Meissl* menționată în 24.1.1.) și în cazul *rețelelor constrînse*. Aceasta este, de fapt, o consecință a procesului iterativ menționat prin relațiile (24-21) — (24-23), constînd în estimarea preciziei necunoscutelor $\mathbf{x}$ în funcție de precizia, cunoscută, a necunoscutelor $\bar{\mathbf{x}}$.

● Se cunosc și alte metode de prelucrare a observațiilor în rețele geodezice libere, a căror expunere ar necesita un spațiu editorial mai extins. Rezultatele sînt însă aceleași, astfel încît algoritmii prezentați mai înainte pot satisface exigențele actuale.

● Metoda de prelucrare a observațiilor în rețele geodezice libere nu trebuie opusă metodelor expuse în capitolele 21, 22 și 23. În funcție de destinația rețelei se poate aplica metoda care se dovedește a fi mai adecvată.

● Este de subliniat faptul că la prelucrarea observațiilor geodezice în rețelele libere, coordonatele obținute după prelucrare *depind de valorile coordonatelor provizorii* (v. 10.1.1.). Pentru ilustrarea acestor modificări s-au prelucrat observațiile geodezice din rețeaua reprezentată în figura 24-2 în variantele III și IV, menționate la începutul 24.1.2.:

— *varianta III de prelucrare* s-a realizat prin modificarea coordonatei provizorii x_C^0 cu 20 cm, rezultînd, după prelucrare, *o rotație* a întregii rețele în raport de situația obținută cu coordonatele provizorii inițiale (fig. 24-2, *b*). S-au obținut alte coordonate x, y pentru punctele rețelei (tabelul 24-16), dar aceleași erori individuale;

— *varianta IV de prelucrare* s-a realizat prin modificarea coordonatelor provizorii x_C^0 și x_D^0, cu 20 cm, rezultînd după prelucrare *o translație* a întregii rețele în raport de situația inițială (fig. 24-2, *c*), precum și alte coordonate x, y (tabelul 24-16) dar aceleași erori individuale.

● În soluția a 2-a a lui *Wolf* modificările în coordonatele provizorii ale punctelor C și D nu influențează rezultatul prelucrării. Dar, nu trebuie omis faptul că întreaga prelucrare este condiționată de alegerea (arbitrară) a punctelor A și B ca puncte fixe în prima etapă de calcul. Evident, dacă poziția punctelor A și B ar fi modificată, atunci și rezultatele finale ar diferi în mod corespunzător.

24.2. PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR ÎN REȚELELE DE TRIANGULAȚIE-TRILATERAȚIE

Datorită dezvoltării înregistrate de aparatele electronice de măsurat distanțe (v. 18.3), în ultimii ani se constată o combinare a celor două metode principale de determinare a poziției planimetrice a punctelor geodezice: triangulația și trilateralia. Acest mod de lucru se înregistrează în special în rețelele geodezice locale, destinate urmăririi comportării construcțiilor masive sau determinării deplasărilor recente ale scoarței terestre etc., unde se solicită o precizie deosebit de ridicată în determinarea poziției punctelor rețelei geodezice. Combinarea judicioasă a calităților specifice fiecărei metode poate conduce efectiv la îndeplinirea acestui deziderat.

Trebuie menționată însă o *condiție inițială* și anume: *instrumentele de măsurat unghiuri și, respectiv, distanțe trebuie să facă parte din aceeași clasă de precizie*. În caz contrar, combinarea are efecte nesemnificative, rezultatele obținute nefiind pe măsura efortului depus.

24.2.1. CONSTITUIREA MODELULUI FUNCȚIONAL-STOCHASTIC

Avînd în vedere destinația unor asemenea lucrări, rețelele geodezice vor avea, în marea majoritate a cazurilor, o configurație complexă, ceea ce aproape că *impune ca prelucrarea să fie efectuată prin metoda observațiilor indirecte*. Aspectele teoretice și practice ale construirii modelului funcțional-stochastic în cadrul acestei metode au fost tratate în 9.1., 9.2. și cap. 21, astfel încît aici se vor face adaptările corespunzătoare, în funcție de particularitățile problemei abordate.

24.2.1.1. **Modelul funcțional.** Necunoscutele care intervin în modelul funcțional sînt:

— corecțiile dx, dy pentru coordonatele provizorii x°, y° ale punctelor noi;

— corecțiile dz pentru unghiurile de orientare provizorii z° ale stațiilor de teodolit.

Formele ecuațiilor corecțiilor depind de natura punctelor între care se efectuează măsurătorile și pot fi împărțite în două categorii principale:

— ecuații ale corecțiilor specifice direcțiilor centrate și reduse la planul de proiecție (21.4.1.);

— ecuații ale corecțiilor specifice distanțelor centrate și reduse la planul de proiecție (21.4.4.).

Din considerente de natură practică, mai ales cînd rezolvarea se efectuează la calculatoare de birou, este necesară aplicarea unor formule adecvate de calcul al coeficienților de direcție a și b, astfel încît mărimea acestora să oscileze în jurul cifrei 1.

Prelucrarea se poate efectua fie ca în rețelele geodezice cu sau fără constrîngeri (cap. 21), fie ca în rețelele geodezice libere (24.1.).

24.2.1.2. **Modelul stochastic.** Așa cum s-a menționat în 9.1., în mod curent modelul stochastic este determinat de două componente principale:

● Matricea cofactorilor $\mathbf{Q}_M$ a măsurătorilor sau matricea ponderilor $\mathbf{P}$ [relația (9-31)], derivate din matricea de varianță-covarianță $\mathbf{C}_M$ [relația (9-3)] prin formula (9-10).

● Condiția de minim (9-31) care coordonează întreaga prelucrare.

Dacă aspectele legate de formarea modelului funcțional sînt practic elucidate, existînd soluții deja consacrate în practica lucrărilor de prelucrare, constituirea modelului stochastic este încă o problemă discutată, cu soluții diverse, în funcție de mărimea și destinația rețelei. Problema centrală în aceste discuții este constituită de considerarea sau neglijarea coeficienților de corelație definiți prin relațiile (9-5) sau (9-11) dintre observațiile geodezice care intervin în prelucrare. Studii extinse (*Pelzer* 1980, *Niemeier* 1980 ș.a.) se referă în special la corelațiile existente între măsurătorile de distanțe, corelații declanșate de componente instrumentale sau de natură meteorologică, a căror expunere detaliată depășește cadrul manualului. Dar, nu de puține ori, asemenea studii sînt încheiate cu concluzii care nu sînt de natură să conducă la generalizarea procedeelor expuse, avînd în vedere

volumul mare de lucrări conexe, precum și influența relativ mică asupra rezultatelor. Tot printre aceste concluzii se poate întîlni și observația că determinarea incompletă sau puțin adecvată a corelațiilor dintre măsurători este, uneori, mai dăunătoare în prelucrare decît neconsiderarea unor astfel de „corelații".

Din aceste considerente, se poate afirma că *stadiului actual* în ceea ce privește formarea modelului stochastic îi corespund relațiile (9-14) — (9-16), prin care se introduce *ipoteza independenței observațiilor geodezice*. Este cert însă că dezvoltarea cercetărilor în această direcție va conduce, în viitorul nu prea îndepărtat, la soluții care vor înlocui ipoteza menționată cu relații care să reflecte mai exact realitatea și care să fie, în același timp, relativ simplu de aplicat.

În consecință, matricea ponderilor (9-16) va fi formată în funcție de informațiile avute la dispoziție înainte de începerea prelucrării. Soluția pentru care se va opta, și care va fi exemplificată numeric în 24.2.2., constă în utilizarea principiilor expuse la începutul 9.2.4.

Ponderile direcțiilor se vor determina cu relația:

$$p_\alpha = \frac{1}{(s'_\alpha)^2}, \tag{24-25}$$

unde (s'_α) este eroarea unei direcții compensată în stație. De menționat că în unele lucrări, la calculul ponderilor se utilizează eroarea s'_α a unei direcții măsurate, ceea ce nu ni se pare adecvat, întrucît la prelucrarea rețelei se folosesc direcții rezultate din compensarea în stație (15.3.2. și 15.4.2.). Avînd în vedere relația (15-37):

$$(s'_\alpha) = \frac{s'_\alpha}{\sqrt{t}}, \tag{15-37}$$

prin care se pune în evidență și rolul numărului de serii t la determinarea ponderilor, soluția adoptată prin formula (24-25) apare, odată în plus, ca justificată.

Ponderile distanțelor se vor determina cu relația:

$$p_D = \frac{1}{s'_{D_m}}, \tag{24-26}$$

unde s'_{D_m} este eroarea mediei aritmetice, calculată după metodologia folosită în 17.2.4., formulele (17-68) și (17-69). Justificarea soluției adoptate constă în faptul că în calculele de prelucrare se folosește o distanță medie, calculată dintr-un număr oarecare de măsurători individuale, număr care este variabil în funcție de condițiile concrete de efectuare a observațiilor — — condiții meteorologice, de relief etc.

O b s e r v a ț i i. 1. În sistemul de estimare a ponderilor descris mai sus, toate direcțiile compensate într-o stație vor avea o aceeași pondere. În schimb, fiecare distanță va fi caracterizată printr-o pondere proprie.

2. În cazul examinat, este recomandabil ca după terminarea prelucrării să se verifice estimarea ponderilor efectuată înainte de prelucrare. Se poate folosi procedeul descris în 20.4.3. sau un alt procedeu asemănător, avîndu-se în vedere faptul că în prelucrare intervin efectiv *2 grupe distincte* de măsurători.

În funcție de rezultatele obținute se poate itera prelucrarea cu *un nou raport al ponderilor celor 2 grupe de măsurători*.

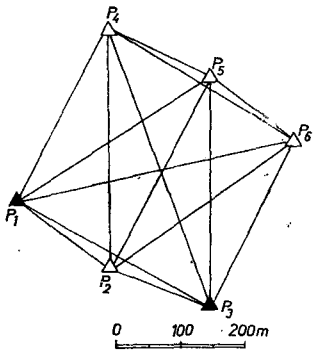


Fig. 24-3. Rețea de triangulație-trilateratie din *poligonul geodinamic Gruiu—Călărușani.*

24.2.1.3. **Determinarea elementelor compensate și evaluarea preciziei.** Formulele de determinare a elementelor compensate și pentru evaluarea preciziei sînt cele prezentate în 9.2.3. și 9.2.4. pentru rețele geodezice constrînse sau fără constrîngeri, precum și în 24.1. pentru rețele geodezice libere.

24.2.2. EXEMPLU

În exemplul numeric se va avea în vedere rețeaua de triangulație-trilateratie prezentată în figura 24-3, care face parte dintr-o rețea geodezică de dimensiuni mai mari (fig. 24-5) din *poligonul geodinamic Gruiu-Căldărușani*. Rețeaua a fost creată de cadre didactice și studenți din *secția de geodezie a Institutului de construcții din București* în colaborare cu specialiștii *Centrului de fizica Pămîntului și seismologie*. Măsurătorile geodezice repetate, începute după seismul din 4 martie 1977, au ca scop determinarea deplasărilor actuale ale scoarței terestre în această zonă seismic activă. Aceste studii se încadrează într-un program mai amplu de cercetare interdisciplinară pentru estimarea riscului seismic în țara noastră (v. și 24.3.6.).

Au fost măsurate toate direcțiile și distanțele posibile, pentru a avea un număr cît mai mare de observații suplimentare în raport de necunoscutele modelului funcțional (tabelele 24-28 și 24-29). De menționat că și distanțele au fost determinate în mod reciproc, uneori la intervale de 1...2 zile (tabelul 24-29), fiecare distanță fiind media unui număr diferit (3...6) de măsurători. Instrumentele folosite se încadrează în clasa instrumentelor de înaltă precizie: teodolitul *Kern DKM 3* și respectiv echipamentul *Kern-Mekometer 3000*, ai căror parametri funcționali au fost descriși în tabelele 14-2 și respectiv 18-4. Punctele geodezice sînt materializate prin pilaștri de adîncime (care variază între 25 și 35 m), cu posibilități de centrare forțată a instrumentelor și dispozitivelor de vizare. În acest fel se poate considera că erorile de centrare și de reducere sînt practic nule. De remarcat că lungimile din rețea sînt mai mici de 1 km.

Ponderile observațiilor au fost determinate cu formulele (24-25) și (24-26), fiind trecute în tabelele 24-28 și 24-29. Eroarea s'_{Dm} a fost exprimată în mm. 10.

Prelucrarea s-a efectuat în ipoteza considerării punctelor P_1 și P_3 ca puncte fixe, ale căror coordonate sînt prezentate în tabelul 24-30, împreună cu coordonatele provizorii ale celorlalte puncte din rețea.

Pentru a oferi posibilități de comparare a influenței combinării determinărilor, prelucrarea s-a efectuat în 4 variante.

Varianta I de prelucrare constă în prelucrarea separată a direcțiilor orizontale. De menționat următoarele deosebiri în raport cu exemplul numeric prezentat în 21.5.3.:

— coeficienții de direcție vor fi determinați cu formulele:

$$a_{ij} = -0{,}063662 \sin \theta^0_{ij}/(D^0_{ij})_{km}\,;\quad b_{ij} = 0{,}063662 \cos \theta^0_{ij}/(D^0_{ij})_{km} \qquad (24\text{-}27)$$

[a se compara cu formulele (21-15)].

Tabelul 24-28

Punctul de stație	Punctul vizat	Direcții compensate în stație, centrate și reduse la plan g	c	cc	s'_α [cc]	Ponderea p_α	Punctul de stație	Punctul vizat	Direcții compensate în stație, centrate și reduse la plan g	c	cc	s'_α [cc]	Ponderea p_α
P_1	P_6	0	00	00,0	1,05	0,907	P_4	P_3	0	00	00,0	1,02	0,961
	P_5	22	03	49,1				P_6	41	84	87,2		
	P_4	56	44	11,8				P_5	43	90	56,9		
	P_2	356	28	89,6				P_1	345	24	79,3		
	P_3	356	40	55,4				P_2	379	04	60,8		
P_2	P_6	0	00	00,0	1,25	0,640	P_5	P_1	0	00	00,0	1,30	0,592
	P_5	34	04	36,3				P_2	34	11	04,7		
	P_4	68	13	74,4				P_3	67	70	83,4		
	P_1	134	18	71,5				P_6	128	82	95,1		
	P_3	334	42	27,0				P_4	333	06	39,6		
P_3	P_4	0	00	00,0	1,17	0,730	P_6	P_5	0	00	00,0	1,40	0,510
	P_1	45	21	20,8				P_4	2	17	66,3		
	P_2	45	33	10,6				P_1	49	13	48,2		
	P_6	346	04	95,0				P_2	71	23	68,5		
	P_5	378	55	03,4				P_3	106	37	80,4		

Tabelul 24-29

Punctul de stație	Punctul vizat	Distanța centrată și redusă la plan [m]	$s'_{D^0_m}$ [mm.10]	Pondere p_D	Punctul de stație	Punctul vizat	Distanța centrată și redusă la plan [m]	$s'_{D^0_m}$ [mm·10]	Pondere p_D
P_1	P_2	177,8088	0,495	4,087	P_4	P_1	302,4184	0,992	1,017
	P_6	449,0329	0,543	3,394		P_2	351,1839	1,204	0,690
	P_5	348,2776	1,229	0,662		P_3	463,8458	0,447	5,000
	P_4	302,4192	0,885	1,277		P_6	348,4563	0,615	2,646
P_2	P_1	177,8085	1,823	0,301		P_5	179,2355	0,422	5,618
	P_3	173,7299	1,167	0,735	P_5	P_4	179,2347	0,577	3,000
	P_6	331,2806	0,715	1,956		P_1	348,2765	0,422	5,618
	P_5	299,0677	2,428	0,170		P_2	299,0678	0,563	3,158
	P_4	351,1831	1,506	0,441		P_3	344,9696	0,792	1,592
P_3	P_6	284,0398	1,046	0,914		P_6	169,4128	0,601	2,768
	P_5	344,9703	0,615	2,646	P_6	P_5	169,4136	0,989	1,022
	P_4	463,8445	1,308	0,584		P_4	348,4555	1,078	0,861
	P_2	173,7280	0,833	1,440		P_1	449,0321	3,674	0,074
						P_2	331,2786	0,792	1,592
						P_3	284,0405	0,955	1,097

Tabelul 24-30

Punctul	x [m]	y [m]	Punctul	x [m]	y [m]
P_1	8356,1930	8714,9310	P_2	8511,0770	8627,6056
P_3	8662,7228	8542,8352	P_4	8504,0922	8978,7174
			P_5	8658,5472	8887,7853
			P_6	8798,5066	8792,3249

În acest fel, corecţiile dx şi dy rezultate din compensare vor fi exprimate în mm·10. Metoda este indicată pentru distanţe scurte, de ordinul a 1 km, pentru a evita coeficienţi de direcţie exagerat de mari;

— ecuaţiile au ponderi diferite, astfel încît nu se pot aplica simplificările care au intervenit în 21.5.3. unde *toate* direcţiile au avut ponderea egală cu 1/2. Această deosebire aduce anumite modificări în modalitatea concretă de aplicare a regulilor de echivalenţă *Schreiber*. În tabelul 24-31 se prezintă ecuaţiile netransformate, pentru direcţii, cu toate calculele finale ale prelucrării în această variantă. Liniile din tabel desenate îngroşat conţin ecuaţiile sumă, de ponderi $p_S = -1/[p]$.

În tabelul 24-32 au fost prezentate ecuaţiile transformate, rezultînd *toate* aceste ecuaţii cu ponderi $\neq 1$. Dacă prelucrarea se efectuează la un calculator electronic, acest fapt nu constituie un impediment, putîndu-se lucra în continuare cu aceste ponderi. Dacă însă rezolvarea se realizează la un calculator de birou, este indicat să se aplice în continuare regula a 3-a de echivalenţă, rezultînd o nouă formă a ecuaţiilor transformate (tabelul 24-33) care au, de această dată, ponderi $+1$ sau -1 (pentru ecuaţiile sumă). În acest mod, apreciem că există avantaje de ordin practic la formarea ecuaţiilor normale.

În continuare, calculele decurg ca în exemplul numeric prezentat în 21.5.3., rezultatele fiind concentrate în tabelele 24-38 şi 24-39.

Varianta a II-a de prelucrare constă în prelucrarea separată a distanţelor. Calculul coeficienţilor corespondenţi ai ecuaţiilor corecţiilor este prezentat în tabelul 24-34 [formulele (21-41) — (21-42)], iar ecuaţiile, scrise în baza relaţiilor (21-41) — (21-43), sînt concentrate în tabelul 24-35. Deoarece distanţele au fost determinate reciproc, rezultă perechi de ecuaţii de corecţii în care coeficienţii necunoscutelor sînt aceiaşi. Diferă, desigur, termenul liber şi ponderea ecuaţiei. Prin urmare, se poate aplica în continuare regula a 2-a de echivalenţă rezultînd ecuaţiile din tabelul 24-36. Atunci cînd rezolvarea se realizează la un calculator de birou se poate aplica şi regula a 3-a de echivalenţă (tabelul 24-37). Formarea sistemului ecuaţiilor normale, deducerea soluţiilor compensării şi estimarea preciziei se desfăşoară similar ca în exemplele numerice prezentate în cap. 21, rezultatele fiind concentrate în tabelele 24-38 şi 24-39.

Varianta a III-a de prelucrare este în fond varianta de prelucrare în bloc a observaţiilor efectuate în reţeaua de triangulaţie-trilateraţie. Din punctul de vedere al desfăşurării calculelor, varianta se caracterizează prin aceea că sistemul ecuaţiilor normale se formează prin *considerarea simultană* a ecuaţiilor corecţiilor din tabelele 24-33 şi, respectiv, 24-35, 24-36 sau 24-37. Calculele decurg apoi în mod obişnuit, rezultatele fiind prezentate în tabelele 24-38 şi 24-39.

Varianta a IV-a de prelucrare foloseşte rezultatele obţinute în varianta a III-a de prelucrare calculînd coeficienţii de pondere globali pentru cele două grupe de măsurători (20.4.3.). Au rezultat:

$$[p_\alpha v_\alpha v_\alpha] = 64{,}4357; \quad [p_D v_D v_D] = 18{,}1742; \quad n_\alpha = 30; \quad n_D = 28,$$

astfel încît [v. relaţia (20-40)]:

$$P_\alpha : P_D = 1 : 3{,}309. \qquad (24\text{-}28)$$

Alegînd $P_\alpha = 1$, rezultă $P_D = 3{,}309$, cu care se multiplică ponderile distanţelor (tabelele 24-29 şi respectiv 24-35, 24-36 sau 24-37). În continuare

Punctul de staţie	Punctul vizat	Direcţii centrate şi reduse			Orientări din coordonate			Unghi de orientare			Punctul P_2		Punctul P_4		Punctul P_5		Punctul P_6		l	p	v	ds	$d\theta$	Direcţii compensate			Controlul compensării					
																											Orientări 0_{ij}			Orientări din coordonate definitive		
											dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy													
											−1,93123	−42,10693	+21,97946	−39,75800	+22,59015	−55,85059	−17,37456	−80,97697													
		g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc														g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc
P_1	P_6	0	00	00,00	11	02	76,283	11	02	76,283							−0,02444	+0,13965	+2,407	0,907	+0,20		−10,87	0	00	00,20	11	02	65,41	11	02	65,41
	P_5	22	03	49,10	33	06	26,395	11	02	77,295					−0,09072	+0,15869			+3,419	0,907	+3,419		−10,89	22	03	50,30	33	06	15,51	33	06	15,51
	P_4	56	44	11,80	67	46	84,609	11	02	72,809			−0,18362	+0,10295					−1,067	0,907	−0,51	−8,67	−8,11	56	44	11,29	67	46	76,50	67	46	76,50
	P_2	356	28	89,60	367	31	68,785	11	02	79,185	+0,17584	+0,31189							+5,309	0,907	+0,51		−13,46	356	28	90,11	367	31	55,32	367	31	55,32
	P_3	356	40	55,40	367	43	19,209	11	02	63,809									−10,067	0,907	−1,40		0,00	356	40	54,00	367	43	19,21	367	43	19,21
	Σ							11	02	73,876	+0,15949	+0,28288	−0,16658	+0,09338	−0,08228	+0,14393	−0,02217	+0,12666		−0,221											
P_2	P_6	0	00	00,00	33	12	89,233	33	12	89,233	+0,09555	−0,16673					−0,09555	+0,16673	+2,293	0,640	+0,29		−5,01	0	00	00,29	33	12	84,23	33	12	84,23
	P_5	34	04	36,30	67	17	26,420	33	12	90,120	+0,18519	−0,10497			−0,18519	+0,10497			+3,180	0,640	+0,20		−5,98	34	04	36,50	67	17	20,44	67	17	20,44
	P_4	68	13	74,40	101	26	62,849	33	12	88,449	+0,18124	+0,00361	−0,18124	−0,00361					+1,509	0,640	+0,16	−3,00	−4,34	68	13	74,56	101	26	58,50	101	26	58,50
	P_1	134	18	71,50	167	31	68,785	33	12	97,285	+0,17584	+0,31189							10,345	0,640	−0,12		−13,46	134	18	71,38	167	31	55,32	167	31	55,32
	P_3	334	42	27,00	367	54	96,612	33	12	69,612	−0,17880	−0,31986							−17,328	0,640	−0,53		+13,80	334	42	26,47	367	55	10,41	367	55	10,41
	Σ							33	12	86,940	+0,29377	−0,17668	−0,11599	−0,00231	−0,11852	+0,06718	−0,06115	+0,10671		−0,312											
P_3	P_4	0	00	00,00	122	21	99,593	122	21	99,593			−0,12897	−0,04694					+1,454	0,730	−0,23		−0,97	399	99	99,78	122	21	98,62	122	21	98,62
	P_1	45	21	20,80	167	43	19,209	122	21	98,409									+0,270	0,730	−0,44		0,00	45	21	20,36	167	43	19,21	167	43	19,21
	P_2	45	33	10,60	167	54	96,612	122	21	86,012	−0,17880	−0,31986							-12,127	0,730	+0,97	+0,71	+13,80	45	33	11,57	167	55	10,41	167	55	10,41
	P_6	346	04	95,00	68	26	99,212	122	22	04,312							−0,19686	+0,10714	+6,073	0,730	+0,11		−5,26	346	04	95,11	68	26	93,96	68	26	93,96
	P_5	378	55	03,40	100	77	05,867	122	22	02,467					−0,18453	−0,00223			+4,328	0,730	−0,42		−4,04	378	55	02,98	100	77	01,83	100	77	01,83
	Σ							122	21	98,139	−0,13052	−0,23350	−0,09415	−0,03427	−0,13471	−0,00163	−0,14371	+0,07821		−0,274											
P_4	P_3	0	00	00,00	322	21	99,593	322	21	99,593			−0,12897	−0,04694					−3,485	0,961	+1,23		−0,97	0	00	01,23	322	21	98,62	322	21	98,62
	P_6	41	84	87,20	364	06	91,931	322	22	04,731			−0,09773	−0,15436			+0,09773	+0,15436	+1,653	0,961	−2,86		−10,20	41	84	84,34	364	06	81,73	364	06	81,73
	P_5	43	90	56,90	366	12	60,606	322	22	03,706			−0,18020	−0,30608	+0,18020	+0,30608			+0,628	0,961	+1,51	−5,69	−4,81	43	90	58,41	366	12	55,80	366	12	55,80
	P_1	345	24	79,30	267	46	84,609	322	22	05,309			−0,18362	+0,10295					+2,231	0,961	−0,19		−8,11	345	24	79,11	267	46	76,50	267	46	76,50
	P_2	379	04	60,80	301	26	62,849	322	22	02,049	+0,18124	+0,00361	−0,18124	−0,00361					−1,029	0,961	+0,31		−4,34	379	04	61,11	301	26	58,50	301	26	58,50
	Σ							322	22	03,078	+0,17417	+0,00347	−0,74166	−0,39213	+0,17317	+0,29414	+0,09392	+0,14834		−0,208											
P_5	P_1	0	00	00,00	233	06	26,395	233	06	26,395					−0,05072	+0,15869			+0,982	0,592	−1,51		−10,89	399	99	98,49	233	06	15,51	233	06	15,51
	P_2	34	11	04,70	267	17	26,420	233	06	21,720	+0,18519	−0,10497			−0,18519	−0,10497			−3,693	0,592	−1,28		−5,98	34	11	03,42	267	17	20,44	267	17	20,44
	P_3	67	70	83,40	300	77	05,867	233	06	22,467					−0,18453	−0,00223			−2,946	0,592	+1,41	−8,40	−4,04	67	70	84,81	300	77	01,83	300	77	01,83
	P_6	128	82	95,10	361	89	30,578	233	06	35,478					−0,21174	−0,31044	+0,21174	+0,31044	+10,065	0,592	+2,20		−16,26	128	82	97,30	361	89	14,32	361	89	14,32
	P_4	333	06	39,60	166	12	60,606	233	06	21,006			−0,18020	−0,30608	+0,18020	+0,30608			−4,407	0,592	−0,82		−4,81	333	06	38,78	166	12	55,80	166	12	55,80
	Σ							233	06	25,413	+0,10963	−0,06214	−0,10668	−0,18120	−0,29125	+0,15219	+0,12535	+0,18378		−0,338											
P_6	P_5	0	00	00,00	161	89	30,578	161	89	30,578					−0,21174	−0,31044	+0,21174	[0,31044	+5,811	0,510	−0,93		−16,26	399	99	99,07	161	89	14,32	161	89	14,32
	P_4	2	17	66,30	164	06	91,931	161	89	25,631			−0,09773	−0,15436			+0,09773	+0,15436	+0,864	0,510	+0,18		−10,20	2	17	66,48	164	06	81,73	164	06	81,73
	P_1	49	13	48,20	211	02	76,283	161	89	28,083							−0,02440	+0,13965	+3,316	0,510	+1,96	−9,52	−10,87	49	13	50,16	211	02	65,41	211	02	65,41
	P_2	71	23	68,50	233	12	89,233	161	89	20,733	+0,09555	−0,16673					−0,09555	+0,16673	−4,034	0,510	+0,43		−5,01	71	23	68,98	233	12	84,23	233	12	84,23
	P_3	106	37	80,40	268	26	99,212	161	89	18,812							−0,19686	+0,10714	−5,955	0,510	−1,69		−5,26	106	37	78,71	268	26	93,96	268	26	93,96
	Σ							161	89	24,767	+0,04873	−0,08503	−0,04984	−0,07872	−0,10799	−0,15832	−0,00376	+0,44794		−0,392											

Tabelul 24-32

Ecuația	Punctul P_2		Punctul P_4		Punctul P_5		Punctul P_6		Ponderea p	L	S
	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy			
1—6							−0,02444	+0,13965	1,417	+2,734	+2,84921
1—5					−0,09072	+0,15869			1,499	+2,457	+2,52497
1—4			−0,18362	+0,10295					1,868	+0,630	+0,54933
1—2	+0,17584	+0,31189							1,547	+7,392	+7,87973
2—6	+0,09555	−0,16673					−0,09555	+0,16673	1,150	−0,513	−0,51300
2—5	+0,18519	−0,10497			−0,18519	+0,10497			1,232	−0,123	−0,12300
2—4	+0,18124	+0,00361	−0,18124	−0,00361					1,601	−0,014	−0,01400
2—3	−0,17880	−0,31986							1,370	−14,557	−15,05566
3—4			−0,12897	−0,04694					1,691	−1,353	−1,52891
3—6							−0,19686	+0,10714	1,240	+1,126	+1,03628
3—5					−0,18453	−0,00223			1,322	+1,071	+0,88424
4—6			−0,09773	−0,15436			+0,09773	+0,15436	1,471	+1,379	+1,37900
4—5			−0,18020	−0,30608	+0,18020	+0,30608			1,553	−1,291	−1,29100
5—6					−0,21174	−0,31044	+0,21174	+0,31044	1,102	+8,096	+8,09600
Z_1	+0,15949	+0,28288	−0,16658	+0,09338	−0,08228	+0,14393	−0,02217	+0,12666	−0,221		+0,53531
Z_2	+0,29377	−0,17668	−0,11599	−0,00231	−0,11852	+0,06718	−0,06115	+0,10671	−0,312		−0,00699
Z_3	−0,13052	−0,23350	−0,09415	−0,03427	−0,13471	−0,00163	−0,14371	+0,07821	−0,274		−0,69428
Z_4	+0,17417	+0,00347	−0,74166	−0,39213	+0,17317	+0,29414	+0,09392	+0,14834	−0,208		−0,24658
Z_5	+0,10963	−0,06214	−0,10668	−0,18120	−0,29125	+0,15219	+0,12535	+0,18378	−0,338		−0,07032
Z_6	+0,04873	−0,08503	−0,04984	−0,07872	−0,10799	−0,15832	−0,00376	+0,44794	−0,392		+0,1301
	+1,11429	−0,54706	−2,04666	−1,00329	−1,05356	+0,75456	−0,01890	+1,98295		+7,034	+ 6,20334 / + 6,20334

Tabelul 24-33

Ecuația	Ponderea (p)	Punctul P_2	Punctul P_4	Punctul P_5	Punctul P_6	L	S
1−6	1				−0,02909	+0,16624	+3,39165
1−5	1			−0,11107	+0,19429		+3,09142
1−4	1		−0,25096	+0,14071			+0,75085
1−2	1	+0,21871	+0,38792				+9,80073
2−6	1	+0,10247	−0,17880		−0,10247	+0,17880	−0,55010
2−5	1	+0,20555	−0,11651	−0,20555	+0,11651		−0,13650
2−4	1	+0,22932	+0,00457	−0,22932			−0,01770
2−3	1	−0,20928	−0,37439				−17,66217
3−4	1		−0,16771	−0,06104			−1,98815
3−6	1						+1,15400
3−5	1			−0,21217	−0,00256		+1,01667
4−6	1		−0,11853	−0,18722			+1,67250
4−5	1		−0,22456	−0,38144	+0,22456		−1,60880
5−6	1				−0,22228		+8,49890
Z_1	−1	+0,07498	−0,07831	+0,04390	−0,03868		+0,25165
Z_2	−1	+0,16409	−0,06479	−0,00129	−0,06620		−0,00392
Z_3	−1	−0,06832	−0,04928	−0,01794	−0,07051		−0,36342
Z_4	−1	+0,07943	−0,33825	−0,17884	+0,07898		−0,11247
Z_5	−1	+0,06374	−0,06202	−0,10535	−0,16933		−0,04088
Z_6	−1	+0,03051	−0,03120	−0,04929	−0,06761		+0,00815
		+0,89120	−0,45294	−1,61493	−0,85986	+7,8636	+7,15241 / +7,15241

Tabelul 24-34

Punctul	Coordonate x [m]	Coordonate y [m]	Distanța calculată D^o / Orientare provizorie θ^o	$a = \cos\theta^o$	$b = \sin\theta^o$
P_1	8 356,1930	8 714,9310	177,80545	0,8711	−0,4911
P_2	8 511,0770	8 627,6056			
Δ	154,8840	−87,3254	367.31.68,79		
P_1	8 356,1930	8 714,9310	302,41931	0,4891	0,8723
P_4	8 504,0922	8 978,7174			
Δ	147,8992	263,7860	67.46.84,61		
P_1	8 356,1930	8 714,9310	348,27672	0,8681	0,4963
P_5	8 658,5472	8 887,7853			
Δ	302,3542	172,8543	33.06.26,40		
P_1	8 356,1930	8 714,9310	449,03356	0,9850	0,1724
P_6	8 798,5066	8 792,3249			
Δ	442,3136	77,3939	11.02.76,28		
P_2	8 511,0770	8 627,6056	173,73103	0,8729	−0,4879
P_3	8 662,7228	8 542,8352			
Δ	151,6458	−84,7704	367.54.99,61		
P_2	8 511,0770	8 627,6056	351,18127	0,0199	0,9998
P_4	8 504,0922	8 978,7174			
Δ	−6,9848	351,1118	101.26.62,85		
P_2	8 511,0770	8 627,6056	299,06678	0,4931	0,8700
P_5	8 658,5472	8 887,7853			
Δ	147,4702	260,1797	67.17.26,42		
P_2	8 511,0770	8 627,6056	331,28269	0,8676	0,4972
P_6	8 798,5066	8 792,3249			
Δ	287,4296	164,7193	33.12.89,23		
P_3	8 662,7228	8 542,8352	463,85015	−0,3420	0,9397
P_4	8 504,0922	8 978,7174			
Δ	−158,6306	435,8822	122.21.99,59		
P_3	8 662,7228	8 542,8352	344,97537	−0,0121	0,9999
P_5	8 658,5472	8 887,7853			
Δ	−4,1756	344,9501	100.77.05,87		
P_3	8 662,7228	8 542,8352	248,04639	0,4780	0,8783
P_6	8 798,5066	8 792,3249			
Δ	135,7838	249,4897	68.26.99,21		
P_4	8 504,0922	8 978,7174	179,23447	0,8617	−0,5073
P_5	8 658,5472	8 887,7853			
Δ	154,4550	−90,9321	366.12.60,61		
P_4	8 504,0922	8 978,7174	348,45660	0,8449	−0,5439
P_6	8 798,5066	8 792,3249			
Δ	294,4144	−186,3925	364.06.91,93		
P_5	8 658,5472	8 887,7853	169,41464	0,8261	−0,5.635
P_6	8 798,5066	8 792,3249			
Δ	139,9594	−95,4604	361.89.30,88		

Tabelul 24-35

De la	la	Distanțe calculate din coordonate provizorii D^o [m]	Distanțe măsurate și reduse la planul de proiecție D^* [m]	Punctul P_2		Punctul P_4		Punctul P_5		Punctul P_6		Termenul liber $D^o - D^*$ [mm·10]	Controlul compensării			
				dx 10,7880	dy −47,4521	dx 38,9484	dy −29,987	dx 33,2657	dy −53,7718	dx 1,06376	dy −76,4653		Ponderi p_D	Corecții v_D [mm·10]	Distanța compensată $D^* + v_D$ [m]	Distanța calculată din coordonate finale [m]
P_1	P_2	177,80545	177,8088	0,8711	−0,4911							−33,5	4,087	− 0,80	177,8087	177,8087
	P_6	449,03356	449,0329							0,9850	0,1742	6,6	3,394	− 5,53	449,0324	449,0324
	P_5	348,27672	348,2776					0,8681	0,4963			− 8,8	0,662	− 6,61	348,2769	348,2769
	P_4	302,41931	302,4192			0,4891	0,8723					1,1	1,277	− 6,01	302,4186	302,4186
P_2	P_1	177,80545	177,8085	0,8711	−0,4911							−30,5	0,301	+ 2,20	177,8087	177,8087
	P_3	173,73103	173,7299	−0,8729	+0,4879							11,3	0,735	−21,27	173,7278	173,7278
	P_6	331,28269	331,2806	−0,8676	−0,4972					0,8676	0,4972	20,9	1,956	− 1,96	331,2804	331,2807
	P_5	299,06678	299,0677	−0,4931	−0,8700			0,4931	0,8700			− 9,2	0,170	− 3,61	299,0673	299,0673
	P_4	351,18127	351,1831	0,0199	−0,9998	−0,0199	0,9998					−18,3	0,441	− 1,40	351,1830	351,1829
P_3	P_6	284,04639	284,0398							0,8780	0,8783	65,9	0,914	− 0,75	284,0397	284,0398
	P_5	334,97537	344,9703					−0,0121	0,9999			50,7	2,646	− 3,47	344,9700	344,9699
	P_4	463,85015	463,8445			−0,3420	0,9397					56,5	0,584	15,00	463,8460	463,8460
	P_2	173,73103	173,7280	−0,8729	+0,4879							30,3	1,440	− 2,27	173,7278	173,7278
P_4	P_1	302,41931	302,4184			0,4891	0,8723					9,1	1,017	1,99	302,4186	302,4186
	P_2	351,18127	351,1839	+0,0199	−0,9998	−0,0199	0,9998					−26,3	0,690	− 9,40	351,1830	351,1829
	P_3	463,85015	463,8458			−0,3420	0,9397					43,5	5,000	− 2,00	463,8460	463,8460
	P_6	348,45660	348,4563			−0,8449	0,5349			0,8449	−0,5349	3,0	2,646	− 4,15	348,4559	348,4559
	P_5	179,23447	179,2355			−0,8617	0,5073	0,8617	−0,5073			−10,3	5,618	− 3,13	179,2352	179,2352
P_5	P_4	179,23447	179,2347			−0,8617	0,5073	0,8617	−0,5073			− 2,3	3,000	4,87	179,2352	179,2352
	P_1	348,27672	348,2765					0,8681	0,4963			2,2	5,618	4,39	348,2769	348,2769
	P_2	299,06678	299,0678	−0,4931	−0,8700			0,4931	0,8700			−10,2	3,158	− 4,61	299,0673	299,0673
	P_3	344,97537	344,9696					−0,0121	0,9999			57,7	1,592	3,53	344,9700	344,9699
	P_6	169,41464	169,4128					−0,8261	+0,5635	+0,8261	−0,5635	18,4	2,768	4,59	169,4133	169,4132
P_6	P_5	169,41464	169,4136					−0,8261	0,5635	0,8261	−0,5635	10,4	1,022	− 3,41	169,4133	169,4132
	P_4	348,45660	348,4555			−0,8449	0,5349			0,8449	−0,5349	11,0	0,861	3,85	348,4559	348,4559
	P_1	449,03356	449,0321							0,9850	0,1724	14,6	0,074	2,47	449,0323	449,0324
	P_2	331,28269	331,2786	−0,8676	−0,4972					0,8676	0,4972	40,9	1,592	18,04	331,2804	331,2804
	P_3	284,04639	284,0404							0,4780	0,8783	58,9	1,097	− 7,75	284,0397	284,0398

Tabelul 24-36

De la	la	Punctul P_2		Punctul P_4		Punctul P_5		Punctul P_6		Termenul liber [mm·10]	Ponderea
		dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy		
P_1	P_2	0,8711	0,4911							−33,9	4,388
	P_6							0,9850	0,1724	6,8	3,468
	P_5					0,8681	0,4963			1,0	6,280
	P_4			0,4891	0,8723					4,6	2,294
P_2	P_3	−0,8729	0,4879							23,9	2,175
	P_6	−0,8676	−0,4972					0,8676	0,4972	29,9	3,548
	P_5	−0,4931	−0,8700			0,4931	0,8700			−10,1	3,328
	P_4	0,0199	−0,9998	−0,0199	0,9998					−23,2	1,131
P_3	P_6							0,4780	0,8783	62,1	2,011
	P_5					−0,0121	0,9999			53,3	4,238
	P_4			−0,3420	0,9397					44,9	5,584
P_4	P_6			−0,8449	0,5349			0,8449	−0,5349	5,0	3,507
	P_5			−0,8617	0,5073	0,8617	−0,5073			− 7,5	8,618
P_5	P_6					−0,8261	0,5635	0,8261	−0,5635	16,2	3,790

Tabelul 2 -37

De la	la	Punctul P_2 dx	Punctul P_2 dy	Punctul P_4 dx	Punctul P_4 dy	Punctul P_5 dx	Punctul P_5 dy	Punctul P_6 dx	Punctul P_6 dy	Termenul liber [mm·10]	Condiția
P_1	P_2	+1,8247	−1,0287							−71,0	1
	P_6							+1,8343	+0,3211	12,7	1
	P_5					+2,1755	+1,2437			2,5	1
	P_4			+0,7408	+0,3212					7,0	1
P_2	P_3	−1,2873	+0,7195							35,2	1
	P_6	−1,6342	−0,9365					+1,6342	+0,9365	56,3	1
	P_5	−0,8996	−1,5871			+0,8996	+1,5871			−18,4	1
	P_4	+0,0212	−1,0633	−0,0212	+1,0633					−24,7	1
P_3	P_6							+0,6679	+1,2455	88,1	1
	P_5					−0,0249	+2,0584			109,7	1
	P_4			−0,8082	+2,2206					106,1	1
P_4	P_6			−1,5822	+1,0017			+1,5822	−1,0017	9,4	1
	P_5			−2,5296	+1,4893	+2,5296	−1,4893			−22,0	1
P_5	P_6					−1,6082	+1,0970	+1,6082	−1,0970	31,5	1

Tabelul 24-38

Punctul de stație	Punctul vizat	Varianta I v_α [cc]	Varianta I v_D [mm]	Varianta II v_α [cc]	Varianta II v_D [mm]	Varianta III v_α [cc]	Varianta III v_D [mm]	Varianta IV v_α [cc]	Varianta IV v_D [mm]
P_1	P_6	+0,20	—	—	−0,55	+0,78	−0,57	+0,78	−0,56
	P_5	+1,20	—	—	−0,66	+0,95	−0,65	+0,96	−0,65
	P_4	−0,51	—	—	−0,60	−2,19	−0,63	−2,23	−0,61
	P_2	+0,51	—	—	−0,08	+1,45	−0,06	+1,46	−0,05
	P_3	−1,40	—	—	—	−0,98	—	−0,99	—
P_2	P_6	+0,29	—	—	−0,20	+1,10	−0,22	+1,11	−0,21
	P_5	+0,20	—	—	−0,36	+1,10	−0,33	+1,10	−0,34
	P_4	+0,16	—	—	−0,14	−0,91	−0,14	−0,93	−0,13
	P_1	−0,12	—	—	+0,22	+0,07	+0,24	+0,09	+0,25
	P_3	−0,53	—	—	−0,13	−1,37	−2,15	−1,38	−2,16
P_3	P_4	−0,22	—	—	+1,50	−1,18	+1,49	−1,20	+1,49
	P_1	−0,44	—	—	—	+1,21	—	+1,22	—
	P_2	+0,97	—	—	−0,23	+2,10	−0,25	+2,10	−0,26
	P_6	+0,11	—	—	−0,08	−1,37	−0,09	−1,38	−0,08
	P_5	−0,42	—	—	−0,35	−0,75	−0,32	−0,74	−0,34
P_4	P_3	+1,23	—	—	+0,20	+0,52	+0,19	+0,53	+0,19
	P_6	−2,86	—	—	−0,42	−1,64	−0,41	−1,61	−0,41
	P_5	+1,51	—	—	−0,31	+0,09	−0,31	+0,01	−0,32
	P_1	−0,19	—	—	+0,20	−0,41	+0,17	−0,40	+0,19
	P_2	+0,31	—	—	−0,94	+1,45	−0,97	+1,47	−0,93
P_5	P_1	−1,51	—	—	+0,44	−1,65	+0,45	−1,67	+0,45
	P_2	−1,28	—	—	−0,46	+0,44	−0,42	+0,45	−0,44
	P_3	+1,41	—	—	+0,35	−0,09	+0,38	−0,08	+0,36
	P_6	+2,20	—	—	+0,46	+4,93	+0,46	+5,04	+0,46
	P_1	−0,82	—	—	+0,49	−3,64	+0,49	−3,75	+0,48
P_6	P_5	−0,93	—	—	−0,34	+1,36	−0,34	+1,44	−0,33
	P_4	+0,18	—	—	+0,39	−0,43	+0,39	−0,46	+0,39
	P_1	+1,96	—	—	+0,25	+2,17	+0,23	+2,16	+0,24
	P_2	+0,48	—	—	+1,80	+1,68	+1,78	+1,67	+1,79
	P_3	−1,69	—	—	−0,78	−4,77	−0,80	−4,81	−0,78
s_0		±1,31		± 0,10		± 0,07		± 0,11	

Tabelul 24-39

Punct nou	Varianta I					Varianta II				
	x [m]	s_x [mm]	y [m]	s_y [mm]	s_t [mm]	x [m]	s_x [mm]	y [m]	s_y [mm]	s_t [mm]
P_2	8 511,0768	0,51	8 627,6014	0,33	0,61	,0781	,34	,6009	,43	,55
P_4	8 504,0944	0,64	8 978,7134	0,70	0,95	,0961	,57	,7144	,36	,67
P_5	8 658,5495	0,71	8 887,7797	0,66	0,97	,5505	,39	,7799	,36	,53
P_6	8 798,5049	0,70	8 792,3168	0,72	1,00	,5067	,37	,3173	,57	,68
$\bar{s}_t$ (mm)	±0,63					±0,43				

Punct nou	Varianta III					Varianta IV				
	x [m]	s_x [mm]	y [m]	s_y [mm]	s_t [mm]	x [m]	s_x [mm]	y [m]	s_y [mm]	s_t [mm]
P_2	,0781	,25	,6008	,29	,38	,0781	,23	,6008	,28	,36
P_4	,0961	,39	,7144	,24	,46	,0961	,36	,7144	,23	,43
P_5	,5505	,26	,7799	,25	,36	,5505	,25	,7799	,23	,34
P_6	,5067	,25	,3172	,39	,46	,5067	,23	,3172	,37	,44
$\bar{s}_t$ (mm)	±0,30					±0,28				

se realizează o nouă iterație a variantei a III-a cu aceste noi ponderi pentru distanțe, obținîndu-se rezultatele care au fost prezentate concentrat în tabelele 24-38 și 24-39.

Concluziile privind influența modificărilor aduse prin fiecare variantă pot fi trase de cititor examinînd rezultatele, precum și parametrul de apreciere globală a preciziei, reflectat de eroarea medie totală $\bar{s}_t$ de determinare a poziției unui punct nou din rețea. Acest parametru, care diferă desigur de la o variantă de prelucrare la alta (tabelul 24-39), a fost calculat cu relația (10-13).

De menționat că eroarea medie a unității de pondere s_0 este exprimată adimensional, în sistemul de lucru folosit de noi, astfel încît poate constitui, de asemenea, un indicator de precizie globală (tabelul 24-38), așa cum s-a tratat în 10.2.2.

24.3. PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR GEODEZICE REPETATE

24.3.1. CONSIDERAȚII PRELIMINARII

Multitudinea aspectelor pe care le implică prelucrarea observațiilor geodezice repetate impune precizarea preliminară a unor definiții, limite și ipoteze de calcul.

● Observații geodezice repetate sînt necesare pentru urmărirea în timp a poziției unei rețele de puncte geodezice. Pornind de la premisa că *aceste puncte sînt materializate cu grija necesară*, modificările coordonatelor punctelor geodezice pot fi asimilate cu modificările suportului pe care acestea sînt amplasate: construcții masive, terenuri supuse unor alunecări, mișcări crustale recente în zone active seismic ș.a.m.d.

● Problematica determinării deplasărilor recente ale scoarței terestre este extrem de complexă, distingîndu-se procedee diverse, în funcție de mărimea zonei studiate, care încep cu utilizarea triangulației sau trilaterației în rețele geodezice locale și se încheie, de exemplu, cu utilizarea sateliților artificiali ai Pămîntului sau metode astronomo-geodezice adecvate desfășurate pe suprafața unor țări, continente sau chiar a întregului Glob. O astfel de problematică ar depăși cadrul unui manual universitar și poate fi urmărită de cititorul interesat în lucrări mai dezvoltate (*Ghițău* 1970, *Dragomir* ș.a. 1977, pg. 569—640 ș.a.).

De aceea, ne propunem să examinăm în continuare unele *posibilități de prelucrare a observațiilor geodezice repetate efectuate în zone de mică extindere, cu caracter local.*

● Se vor avea în vedere, în special, măsurători unghiulare și de lungimi (*în rețele planimetrice*) sau măsurători de diferențe de nivel (*în rețele altimetrice*).

Măsurătorile unghiulare și de distanțe sînt reduse la suprafața de referință, iar măsurătorile nivelitice la sistemul de altitudini oficial (cap. 4). Se va presupune, de asemenea, cunoscută matricea ponderilor $\mathbf{P}$ a măsurătorilor, derivată eventual din matricea de covarianță $\mathbf{C}_M$ prin relațiile (9-13) și (9-9).

● *Prelucrarea se va desfășura separat, pe cele două tipuri de rețele*, urmărindu-se determinarea separată a poziției planimetrice și respectiv a poziției altimetrice a punctelor din rețea. De menționat că nu de puține ori se mărește determinarea numai a poziției altimetrice, respectiv planimetrice, în funcție de posibilitățile tehnice și materiale avute la dispoziție.

● *Configurația rețelei nu este aceeași* în toate perioadele de măsurători, înregistrîndu-se eventuale modificări în timp, atît în ceea ce privește numărul de puncte din rețea (apar puncte noi în funcție de necesități, dispar unele puncte din motive diverse), cît și a numărului de măsurători.

● *Una dintre problemele centrale ale determinărilor geodezice repetate constă în asigurarea unei precizii satisfăcătoare scopului urmărit*: evaluarea deplasărilor punctelor care formează rețeaua geodezică și, implicit, a suportului pe care este amplasată această rețea. Astfel, dacă deplasarea în timp a unui punct P, situat pe suprafața terestră, poate fi determinată prin metode geodezice, cu eroarea medie s_{Δ_P}, se poate vorbi despre o modificare a poziției acestui punct cu o mărime Δ_P, între două perioade de determinări, numai atunci cînd:

$$|\Delta P| > t_k \cdot |s_{\Delta_P}|, \tag{24-29}$$

unde coeficientul $t_k = t(S, f)$ depinde de siguranța statistică S cu care se operează (de obicei $S = 95\%$) și de numărul de observații suplimentare f existent în rețeaua geodezică în cele două serii de determinări. În funcție de S și f, din tabelele *repartiției Student* se poate extrage coeficientul t_k (pentru cele mai frecvente cazuri întîlnite în practică t_k este cuprins între 2 și 3).

Prin urmare, modelele de calcul au ca obiective, la fel de importante, atît determinarea deplasărilor punctelor rețelei, cît și estimarea preciziei acestor deplasări.

● Prelucrarea se poate desfășura fie ca în rețele geodezice cu sau fără constrîngeri (capitolele 21, 22, 23), fie ca în rețele geodezice libere (24.1.). *Se preferă ca metodă de prelucrare metoda observațiilor indirecte*, care are avantaje certe în cazul rețelelor geodezice cu configurații complexe, în special în ceea ce privește posibilitatea de programare a calculelor spre rezolvare la calculatoare electronice.

● Literatura de specialitate în domeniul prelucrării măsurătorilor geodezice repetate oferă suficient de multe soluții, astfel încît cele care se vor prezenta în continuare nu epuizează lista acestora, ci pot fi *mai ușor încadrate* în concepția generală a manualului.

24.3.2. PRELUCRAREA SEPARATĂ, PE PERIOADE DE DETERMINĂRI

Fie T_0, T_1, ..., T_q momentele (de timp) centrale, specifice celor q perioade de determinări geodezice. Pentru fiecare perioadă se poate forma sistemul ecuațiilor de forma (9-26):

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{l}_i; \quad \text{Ponderea } \mathbf{P}_i; \quad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{24-30}$$

Sistemul (24-30) nu introduce restricții în ceea ce privește natura măsurătorilor (planimetrice sau de nivelment). Deoarece s-a emis *ipoteza deplasărilor în timp a punctelor rețelei* și, prin urmare, a existenței unor q grupe de soluții pentru vectorul necunoscutelor $\mathbf{x}$, ecuațiile (24-30) nu prezintă *legături între grupe*, ci doar *în interiorul fiecărei grupe*. Prin urmare, *rezolvarea în bloc este lipsită de sens*, sistemul ecuațiilor normale (9-38) corespondent fiind format din q părți distincte, fără legături:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{N}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{N}_q \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_q \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \mathbf{l}_1^* \\ \mathbf{l}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{l}_q^* \end{Vmatrix} = 0. \tag{24-31}$$

Din rezolvarea separată a fiecărei grupe de măsurători rezultă soluțiile x_i, corecțiile v_i și estimatorii de precizie $\mathbf{s}_{0_i}$, $\mathbf{s}_{x_i}$, $\bar{\mathbf{s}}_{x_i}$.

Observații. 1. Prin diferențe **d** de forma:

$$\mathbf{d}_{i,\,i+1} = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \tag{24-32}$$

se pot calcula *deplasările* în lungul axelor de coordonate (x și y în cazul rețelelor planimetrice, H în cazul rețelelor nivelitice), în intervalul de timp T_i și T_{i+1}.

2. Erorile deplasărilor (24-23) *nu pot fi însă riguros determinate*. Afirmația se bazează pe faptul că soluțiile **x** sînt mărimi corelate, nu numai în interiorul fiecărei grupe de măsurători (unde factorii de corelație sînt în primul rînd derivați din procesul de măsurare, apoi din legăturile funcționale din modelul folosit ș.a.m.d.), ci și între grupele de măsurători (prin factorii care generează deplasarea propriu-zisă a punctelor). Ca urmare, deplasările pot fi ordonate în vectorul:

$$\mathbf{d}^T = \| \mathbf{d}_{12}^T; \quad \mathbf{d}_{23}^T; \ldots; \mathbf{d}_{q-1,q}^T \|, \tag{24-33}$$

cărora le corespunde matricea de corelație Q^d. Elementele acestei matrice se calculează cu relațiile:

$$Q^d_{(i,\,i+1),\,(i,\,i+1)} = Q_{ii} - 2\,Q_{i,\,i+1} + Q_{i+1,\,i+1}; \tag{24-34}$$

$$Q^d_{(i,i+1),\,(k,\,k+1)} = Q_{ik} - Q_{i+1,\,k} - Q_{i,\,k+1} + Q_{i+1,\,k+1}. \tag{24-35}$$

Din rezolvările separate ale celor q grupe se deduc matricele inverse $\mathbf{N}_1^{-1}$, $\mathbf{N}_2^{-1}$, ..., $\mathbf{N}_q^{-1}$ din care se pot extrage numai cofactorii interni din fiecare grupă Q_{ii} și respectiv $Q_{i+1,\,i+1}$. *Lipsește posibilitatea determinării cofactorilor dreptunghiulari* de formula $Q_{i,\,i+1}$, deoarece grupele nu au legături funcționale. Ca urmare, în aceste situații cofactorii Q^d ar putea fi „evaluați" doar parțial și, în consecință erorile deplasărilor **d**, de forma:

$$s_{d_{i,\,i+1}} = s_0 \sqrt{Q^d_{i,\,i+1}}, \tag{24-36}$$

nu pot fi estimate riguros.

3. Cercetări de natură statistică (*Koch* 1976, 1978, *Pelzer* 1980, *Niemeier* 1980) pot evidenția, și chiar localiza, zonele sau punctele în care au loc deplasări în timp, prin calcule care se desfășoară iterativ, în funcție de rezultatele obținute după prelucrarea separată. Expunerea acestor procedee ar necesita abordarea și a altor capitole de *teoria erorilor* sau *statistică matematică*, ceea ce evident depășește cadrul manualului.

24.3.3. PRELUCRAREA ÎN BLOC A MĂSURĂTORILOR PRIN INTRODUCEREA UNOR PARAMETRI SUPLIMENTARI

Introducerea unor parametri suplimentari în prelucrare este justificată prin faptul că fenomenul deplasărilor punctelor rețelei este continuu, inclusiv în interiorul perioadelor de timp în care au loc măsurătorile propriu-zise. Ca urmare, se poate scrie, sub formă generală, că oricare din coordonatele punctelor (reperilor) din rețea sînt funcții de timp:

$$C = C(t); \qquad C = x, y, H. \tag{24-37}$$

O primă funcție posibilă se obține din acceptarea unei variații liniare, continue și uniforme (linia continuă *2* din figura 24-4):

$$\bar{C}_k^R = (C_0^R) + \mathrm{d}C^R + \dot{C}^R\,\Delta t_{ok}, \tag{24-38}$$

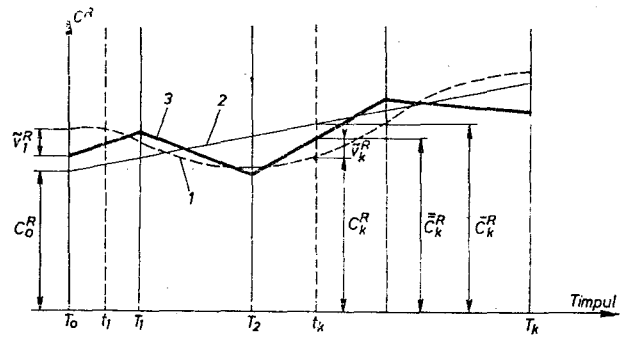


Fig. 24-4. Variația în timp a coordonatei C^P ($C = x, y, H$) a punctului P:
1 — variația reală; *2, 3* — variații liniare, de natură sistemică; $\tilde{v}$ — variații de natură întîmplătoare.

unde:

— (C_0^R) este o valoare provizorie a coordonatei C a reperului R, astfel încît C_0^R va reprezenta coordonata probabilă (în accepțiunea metodei celor mai mici pătrate) a reperului considerat la momentul central inițial T_0:

$$C_0^R = (C_0^R) + \mathrm{d}C^R; \tag{24-39}$$

— $\overline{C}_k^R$ este valoarea coordonatei la momentul de măsurare t_k, în ipoteza variației liniare acceptate;

— $\dot{C}^R$ este componenta vitezei de deplasare a punctului în sensul axei de coordonate considerate:

$$\dot{C}^R = \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\right)_R; \tag{24-40}$$

— Δt_{ok} este intervalul de timp:

$$\Delta t_{ok} = t_k - T_0. \tag{24-41}$$

În situații în care se dispune de un număr mai mare de perioade de determinări, modelul poate fi dezvoltat (*Wolf* 1963 *a*, *Jacobs*, 1965, *Ghițău* 1970 ș.a.):

$$\dot{C}^R = \dot{C}_{0\text{-}I}^R + \dot{C}_{I\text{-}II}^R + \ldots, \tag{24-42}$$

$$\overline{\overline{C}}_k^R = (C_0^R) + \mathrm{d}C^R + \Sigma\, \dot{C}^R\, \Delta t. \tag{24-43}$$

Modelului (24-42) — (24-43) îi corespunde linia frîntă, îngroșată din figura 24-4.

Un model general (*Ghițău* 1970) este obținut prin introducerea în variația coordonatei punctului C și a unor elemente de natură întîmplătoare $\tilde{v}$:

$$C_k^R = (C_0^R) + \mathrm{d}C^R + \Sigma\, \dot{C}^R\, \Delta t + \tilde{v}_k^R. \tag{24-44}$$

Se înțelege că parametrii, de natură funcțională $\dot{C}$, precum și mărimile $\tilde{v}$, de natură stochastică, urmează a se determina prin prelucrare, care se va desfășura sub condiția de minim:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}\, \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{\tilde{v}}\, \tilde{\mathbf{v}} \to \text{minim}. \tag{24-45}$$

O b s e r v a ț i i. **1.** Vitezele de deplasare ale punctelor rețelei geodezice, prin componentele lor pe axele de coordonate ale sistemului în care se face prelucrarea, sînt cuprinse în modelul funcțional ca necunoscute. Ca urmare, mărimea lor, precum și cofactorii necesari la calculul preciziei sînt *rezultate directe* ale prelucrării. Prin aceasta există posibilitatea efectivă de determinare nu numai a deplasărilor **d** [relația (24-32)], ci și a erorilor corespondente (24-36), deoarece toți coeficienții de pondere necesari în formulele (24-34) și (24-35) sînt conținuți în matricea inversă a *sistemului global* aferent $\mathbf{N}^{-1}$.

2. Formele ecuațiilor corecțiilor sînt mai complexe în raport cu cele examinate pînă în prezent: 21.4.1. — pentru direcții orizontale, 21.4.4. — pentru distanțe și 23.1.1.1. — pentru diferențe de nivel. Ele se obțin însă relativ simplu, prin înlocuirea relațiilor de tipul (9-22) cu una din relațiile adoptate (24-38), (24-43) sau (24-44).

Spre exemplificare, se va trata pe scurt situația specifică rețelelor de nivelment, în cazul adoptării modelului (24-38). Rezultă la momentul t_k de măsurare, între reperii PR:

$$H_k^R - H_k^P = h_k^{PR}, \tag{24-46}$$

unde:

$$H_k^R = (H_0^R) + \mathrm{d}H^R + \dot{H}^R\, \Delta t_{ok};$$
$$H_k^P = (H_0^P) + \mathrm{d}H^P + \dot{H}^P\, \Delta t_{ok}; \tag{24-47}$$

$$h_k^{PR} = (h_k^{PR}) + v_k^{PR}, \tag{24-48}$$

(h_k^{PR}) fiind diferența de nivel măsurată și redusă la sistemul de altitudini oficial (cap. 4), iar v_k^{PR} corecția corespondentă. Rezultă ecuația:

$$v_k^{PR} = -\mathrm{d}H^P + \mathrm{d}H^R - \Delta t_{ok} \cdot \dot{H}^P - \Delta t_{ok}\, \dot{H}^R + l_k^{PR}; \tag{24-49}$$

$$l_k^{PR} = [(H_0^R) - (H_0^P)] - (h_k^{PR}). \tag{24-50}$$

3. În cazul în care se constată că vitezele de deplasare $\dot{C}$, prin componentele lor, nu manifestă salturi, ci, dimpotrivă, variații care pot fi exprimate printr-o funcție de timp și spațiu, *se poate introduce, într-o nouă iterație*, o prelucrare a acestora

$$\dot{C}_{i,\,i+1}^R + v_{\dot{C}_{i,\,i+1}} = k_{000}^R + k_{001}^R \cdot \Delta T_i + k_{100}^R \cdot x^R + k_{010}^R \cdot y^R + k_{002}^R\, \Delta T_i^2 +$$
$$+ k_{200}^R\, (x^R)^2 + k_{101}^R \cdot x^R\, \Delta T_i + k_{011}^R \cdot y^R\, \Delta T_i + \ldots \tag{24-51}$$

Noii parametri k urmează a fi determinați *într-o nouă prelucrare*, prin utilizarea modelului:

$$\mathbf{v}_{\dot{C}} = \mathbf{B}\,\mathbf{k} + \dot{\mathbf{C}}, \tag{24-52}$$

unde matricea **B** este de forma (în cazul rețelelor planimetrice):

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & \Delta T_1 & x_1 & y_1 & \Delta T_1^2 & \ldots \\ 1 & \Delta T_1 & x_2 & y_2 & \Delta T_1^2 & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 1 & \Delta T_2 & x_1 & y_1 & \Delta T_2^2 & \ldots \\ 1 & \Delta T_2 & x_2 & y_2 & \Delta T_2^2 & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \end{Vmatrix}, \tag{24-53}$$

iar $\Delta T_i = T_i - T_0$.

4. Formele concrete pe care le iau ecuațiile corecțiilor, detalii privind modalitatea de determinare a matricei ponderilor corecțiilor $\tilde{\mathbf{v}}$, precum și exemplificări numerice se pot urmări în lucrări de cercetare din acest domeniu (*Jacobs* 1965, *Ghițău* 1970, *Dragomir* ș.a. 1977, *Ghițău—Wolf* 1983 ș.a.).

24.3.4. PRELUCRAREA ÎN BLOC A MĂSURĂTORILOR ÎN IPOTEZA DEPLASĂRILOR RELATIVE

În numeroase situații este posibilă delimitarea zonei studiate în două părți, ceea ce echivalează cu *acceptarea ipotezei deplasărilor relative ale unei părți din rețea în raport de cealaltă parte*. În acest fel vectorul general **x** al necunoscutelor va fi împărțit în următoarele componente:

— $\mathbf{x}_r$, care va cuprinde necunoscutele corespondente punctelor situate în partea considerată „stabilă". În această parte a rețelei se vor afla și eventualele puncte fixe din rețea, care nu primesc corecții prin prelucrare;

— $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$, în care se includ celelalte necunoscute din modelul funcțional, corespondente punctelor situate în partea „mobilă" a rețelei, în cele q perioade de determinări.

De menționat că noțiunile de „stabil" și „mobil" au *un sens relativ*, deoarece prin modelul de calcul adoptat ne-am propus tocmai determinarea unor deplasări relative. Astfel de situații se întîlnesc, de exemplu, în teritorii în care există *microplăci tectonice active*. Ambele plăci sînt caracterizate prin deplasări proprii, uneori în sensuri diferite, alteori în același sens însă cu mărimi diferite. Și în domeniul tehnic-ingineresc se poate realiza o astfel de delimitare, între o zonă „stabilă" și alta „mobilă".

Ipotezele introduse urmează a se verifica în partea finală a prelucrării, prin calcule de evaluare a semnificațiilor statistice pentru mărimea parametrilor introduși.

În ipoteza adoptată, *ansamblul ecuațiilor corecțiilor* (24-30) din cele q perioade de determinări poate fi scris sub următoarea formă:

$$\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_q \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{B}_{r1} & \mathbf{B}'_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B}_{r2} & 0 & \mathbf{B}'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \\ \mathbf{B}_{rq} & 0 & 0 & & \mathbf{B}'_q \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_q \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_q \end{Vmatrix}. \qquad (24\text{-}54)$$

Prin urmare, fiecărei matrice $\mathbf{B}_i$ din (24-30) îi corespunde următoarea împărțire:

$$\mathbf{B}_i = \| \mathbf{B}_{ri},\ \mathbf{B}'_i \|, \qquad (24\text{-}55)$$

în funcție de modalitatea efectivă de separare în cele două părți a zonei cercetate.

Prelucrarea în bloc este posibilă, *elementul de legătură* între perioadele de determinări fiind vectorul necunoscutelor $\mathbf{x}_r$, care este comun tuturor grupelor de ecuații de corecții.

În continuare, prelucrarea se desfășoară în mod obișnuit, așa cum s-a descris în 9.2. și cap. 21 sau, eventual, 24.1.

După determinarea soluțiilor $\mathbf{x}$ se pot calcula deplasările $\mathbf{d}$ cu relațiile (24-32), (24-33) a căror precizie poate fi estimată cu formulele (24-34) — — (24-36) deoarece se dispune de toate elementele necesare. Observațiile făcute la încheierea 24.3.3. sînt, în mod corespunzător, valabile și în cazul acestui model de prelucrare.

O b s e r v a ț i e. Aspectele suplimentare pe care le implică prelucrarea observațiilor geodezice repetate în zone active seismic, cum ar fi: determinarea vitezelor și accelerațiilor caracteristice mișcărilor punctelor (precum și variații ale acestora), determinarea parametrilor de translații relative t_x, t_y, t_H, a modificărilor relative de scară t_m, a rotației relative t_R, a parametrilor de deformație, sînt tratate într-o lucrare recentă (*Ghițău* și *Wolf* 1983).

24.3.5. VERIFICAREA STATISTICĂ A IPOTEZELOR

După încheierea operațiilor de calcul, rezultatele obținute sînt supuse unei analize statistice, în urma căreia se pot obține îmbunătățiri ale structurii modelului funcțional-stochastic și, ca urmare, se poate efectua o nouă prelucrare, cu un model perfecționat. Analiza cuprinde toți parametrii introduși în modelul funcțional, precum și rezultatele obținute.

Prezentarea criteriilor statistice folosite și metodologia de utilizare depășește cadrul manualului, putînd fi urmărită de cititorul interesat în lucrări de cercetare în domeniul examinat ((*Ghițău* 1970, *Dragomir* ș.a. 1977, *Ghițău-Wolf* 1983 ș.a.).

Apare astfel necesitatea prelucrării în trepte, prin utilizarea unor modele funcțional-stochastice din ce în ce mai perfecționate ca structură, materialul informațional inițial, reprezentat de volumul de măsurători, rămînînd însă același.

În fiecare treaptă nouă este cercetat și raportul ponderilor diferitelor grupe de măsurători avute la dispoziție, atît pe categorii de observații geodezice (direcții azimutale, distanțe, diferențe de nivel etc.), cît și pe diferite perioade de determinări, după metodologia prezentată în varianta a IV-a de prelucrare din 24.2.2. sau după altă metodologie adecvată.

24.3.6. EXEMPLIFICARE DE PRELUCRARE

Prezentarea în detaliu a unor exemplificări de prelucrare a observațiilor geodezice repetate ar necesita un spațiu extrem de dezvoltat, care depășește cadrul unui manual universitar. Pentru exemplificarea desfășurării prelucrării se va prezenta structura modelului funcțional-stochastic în varianta descrisă în § 24.3.4, pentru rețeaua geodezică din poligonul geodinamic *Gruiu-Căldărușani*, stadiul 1981 (fig. 24-5).

În stadiul menționat, au fost efectuate 6 perioade de observații geodezice repetate, repartizate în anii 1979—1980—1981, în perioade de vară și respectiv de toamnă tîrzie-iarnă (diferențe de temperatură pînă la 30°C).

Prelucrarea, ale cărei rezultate sînt prezentate în figura 24-5, are la bază un număr total de 499 observații geodezice și anume:

— 453 direcții determinate cu teodolitul *Kern DKM-3*;

— 168 distanțe măsurate cu instrumentul *Kern Mekometer-3000*.

Modelul funcțional a fost format cu următoarele tipuri de necunoscute:

— punctele *1*, *2* și *3* din rețea au fost considerate „mobile", fiind caracterizate în fiecare perioadă de măsurători prin alte coordonate plane ($3 \times 2 \times 6 = 36$ necunoscute);

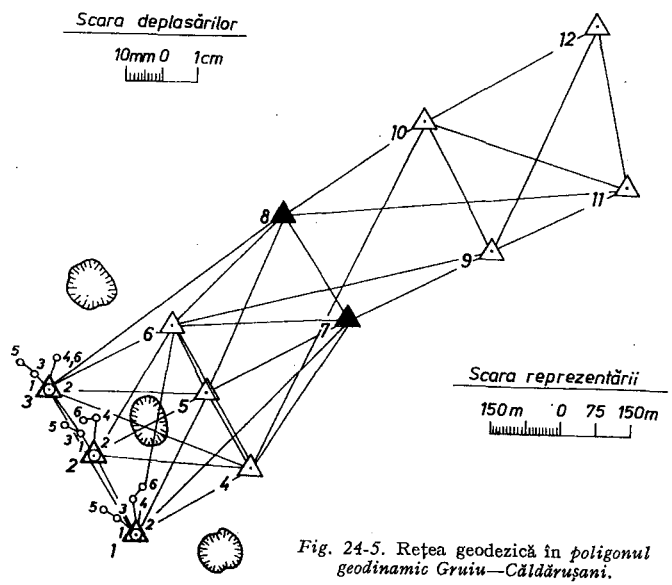


Fig. 24-5. Rețea geodezică în *poligonul geodinamic Gruiu—Căldărușani.*

— punctele *4, 5, 6, 9, 10, 11* și *12* au fost considerate puncte „variabile" pe ansamblul celor 6 perioade de determinări, participînd în model cu cîte 2 necunoscute ($7 \times 2 = 14$ necunoscute);

— punctele *7* și *8* au fost acceptate ca fixe, în acest stadiu al prelucrării;

— pentru toate cele 14 puncte și pentru fiecare serie de observații unghiulare au fost introduse necunoscute de orientare a stațiilor ($12 \times 6 = 72$).

Din cele de mai sus rezultă: $n = 621$ = numărul de măsurători; $u = 122$ = numărul de necunoscute; $n - u = 499$.

Prelucrarea s-a desfășurat prin utilizarea modelului funcțional-stochastic prezentat în detaliu în 24.2.2. Rezultatele obținute sînt concentrate grafic în figura 24-5 sub forma *deplasărilor relative* ale grupului de puncte *1, 2, 3* (care se constituie într-un bloc al zonei cercetate) în raport de celălalt grup de puncte *4, 5, ..., 12* (care se constituie într-un alt bloc al zonei cercetate). Pozițiile punctelor „mobile" pentru perioadele de vară au fost notate cu *1—3—5*, iar pentru perioadele de toamnă cu *2—4—6*.

În tabelul 24-40 se prezintă rezultatele sintetice ale studiului întreprins, în stadiul menționat al anului 1981, urmînd ca pe măsura efectuării unor noi determinări, precum și prin îmbunătățirea modelului funcțional-stochastic, să se obțină rezultate mai sigure în legătură cu deplasarea relativă a celor două blocuri din zona cercetată. Aceste studii vor fi utile specialiștilor din cadrul *Centrului de fizica Pămîntului și seismologie* în cercetările de estimare a riscului seismic în țara noastră.

Tabelul 24—40

Punctul	Deplasări Δ [mm/an]		Erori s_Δ [mm/an]		Coeficientul *Student*	
	vară	toamnă	vară	toamnă	$t_{vară}$	$t_{toamnă}$
1	3,3	3,7	1,6	1,5	2,1	2,5
2	4,0	2,8	1,4	1,4	2,8	2,0
3	3,7	2,8	1,5	1,5	2,5	1,9

24.4. NOȚIUNI DE PRELUCRARE A OBSERVAȚIILOR ÎN REȚELELE GEODEZICE TRIDIMENSIONALE

Noțiunea de *rețea geodezică tridimensională* ar putea apărea, la o primă examinare, drept pleonasm. Aparența este justificată de faptul că în geodezie se lucrează frecvent cu 3 coordonate, în sensul că fiecare punct geodezic este reprezentat în evidențe, de regulă, prin 3 coordonate. Este necesar însă de remarcat că aceste 3 coordonate *sînt raportate în mod curent la suprafețe de referință diferite*, fiind, în fapt, determinate *complet independent*:

— pe de o parte, coordonatele x, y în planul de proiecție sau coordonatele B, L pe elipsoidul de referință (așa-numita *problemă planimetrică*);

— pe de altă parte, altitudinea H, determinată într-un sistem de altitudini oarecare (așa-numita *problemă altimetrică* — cap 4).

Noțiunea de *geodezie tridimensională* elimină această separare, păstrînd unitatea sistemului de referință la rezolvarea problemei de *poziționare în spațiu* a punctelor geodezice. Cu alte cuvinte, prelucrarea are ca rezultat determinarea, într-un sistem unitar, a poziției în spațiu cu trei dimensiuni a rețelei geodezice. Un alt specific al prelucrării constă în faptul că în rețelele geodezice tridimensionale se are în vedere *ansamblul tuturor măsurătorilor geodezice posibile*, raportate desigur la sistemul de referință unitar adoptat.

24.4.1. SISTEME DE COORDONATE UTILIZATE ÎN GEODEZIA TRIDIMENSIONALĂ

Sistemele de coordonate care intervin în mod frecvent în geodezia tridimensională au fost definite în 2.1.1., și 2.3.2.. Pentru rețele geodezice de dimensiuni mai mici, se recomandă utilizarea sistemului cartezian astronomic local (descris în 2.1.1.2).

Originea acestui sistem este punctul considerat, pe suprafața Pămîntului (denumit și topocentru), iar axele de coordonate sînt orientate în raport de verticala locului și respectiv direcția nordului astronomic. Spre deosebire de 2.1.1.2., unde axele sistemului cartezian astronomic local au fost notate $X_a Y_a Z_a$ (fig. 2-3), aici se vor nota xyz, pentru a putea avea posibilitatea utilizării unor indici inferiori suplimentari (fig. 24-6) și a le deosebi de notațiile consacrate pentru axele de coordonate ale sistemului cartezian global geocentric XYZ.

Se vor avea în vedere măsurătorile $D°$, α, $\zeta°$ definite în 2.1.1., care constituie, în același timp, coordonate polare astronomice locale. Legătura dintre măsurătorile propriu-zise și coordonatele carteziene astronomice locale este dată de relațiile (2-10). Punctul P fiind origine în sistemul astronomic local, coordonatele punctului observat R (fig. 2-3) vor fi notate $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^T = \| x_R;\ y_R;\ z_R \|, \qquad (24\text{-}56)$$

reprezentînd, prin urmare, și diferența dintre coordonatele punctelor R și P în sistemul local considerat. Diferența dintre coordonatele acelorași puncte în sistemul cartezian global geocentric va fi notată cu $\mathbf{X}$, fiind:

$$\mathbf{X}^T = \| X_R - X_P;\ Y_R - Y_P;\ Z_R - Z_P \|. \qquad (24\text{-}57)$$

Legătura dintre cele două categorii de diferențe de coordonate poate fi exprimată sub formă generală (*Iacob* 1957, pg. 569):

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\,\mathbf{X}, \qquad (24\text{-}58)$$

unde:

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (24\text{-}59)$$

Cu $(\varepsilon_{11};\ \varepsilon_{12};\ \varepsilon_{13})$, $(\varepsilon_{21};\ \varepsilon_{22};\ \varepsilon_{23})$ și respectiv $(\varepsilon_{31};\ \varepsilon_{32},;\ \varepsilon_{33})$ s-au notat cosinușii directori ai versorilor sistemului $Pxyz$ în raport de sistemul $OXYZ$, adică proiecțiile versorilor respectivi pe axele de coordonate X, Y și Z. Pentru a exprima mai simplu aceste elemente, se translatează sistemul $Pxyz$ în sis-

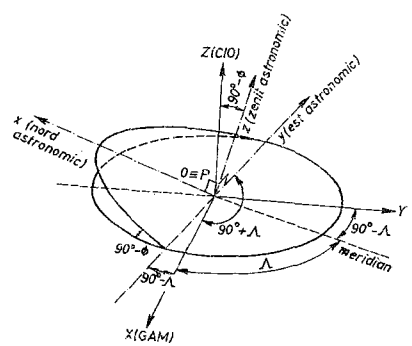


Fig. 24-6. Sisteme de coordonate utilizate în geodezia tridimensională.

temul $OXYZ$, astfel încît $P \equiv 0$ (fig. 24-6). Planul orizontal xoy se intersectează cu planul meridianului astronomic XOY după axa y și, ca urmare, versorul acestei axe este perpendicular pe axa Z. Axele Z și z formează unghiul $90°-\Phi$, iar axele X și Y unghiul $90°-\Lambda$. În aceste condiții, relația (24-56) devine:

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} -\sin\Phi_P \cos\Lambda_P & -\sin\Phi_P \sin\Lambda_P & \cos\Phi_P \\ -\sin\Lambda_P & \cos\Lambda_P & 0 \\ \cos\Phi_P \cos\Lambda_P & \cos\Phi_P \sin\Lambda_P & \sin\Phi_P \end{Vmatrix} \cdot \mathbf{X}. \quad (24\text{-}60)$$

Pentru calculele care vor urma este necesară *evaluarea aproximativă* a coordonatelor carteziene global geocentrice (XYZ) în raport de coordonatele geodezice (B, L) și altitudinile elipsoidale H^E. Caracterul aproximativ al acestei evaluări va fi semnalat în continuare prin indicele „zero" amplasat deasupra mărimilor considerate. În această etapă a prelucrării, drept coordonate $\mathring{B}, \mathring{L}, \mathring{H}^E$ pot fi considerate valorile obținute în rețelele geodezice de stat, de triangulație și respectiv de nivelment. Astfel, revenind la figura 2-3 se poate scrie:

$$\begin{aligned} \mathring{X}_P &= (\mathring{N}_P + \mathring{H}^E_P) \cos \mathring{B}_P \cos \mathring{L}_P; \\ \mathring{Y}_P &= (\mathring{N}_P + \mathring{H}^E_P) \cos \mathring{B}_P \sin \mathring{L}_P; \\ \mathring{Z}_P &= [\mathring{N}_P (1-e^2) + \mathring{H}^E_P] \sin \mathring{B}_P. \end{aligned} \quad (24\text{-}61)$$

în care:

$\mathring{N}_P$ este marea normală, calculabilă în punctul P cu formula (6-79);
e — prima excentricitate (numerică) determinată prin relația (2-54);
$\mathring{H}^E_P$ — altitudinea elipsoidică, definită prin una din relațiile (4-37).

24.4.2. FORMULE DE BAZĂ ÎN GEODEZIA TRIDIMENSIONALĂ

Experiența a arătat că prelucrarea observațiilor geodezice în rețele tridimensionale se poate efectua, cu avantajele cunoscute, prin metoda observațiilor indirecte. O parte a parametrilor care vor interveni în modelul funcțional (și care va fi prezentat în 24.4.3) este constituită de coordonatele (provizorii) sau aproximative $\mathring{x}_P, \mathring{y}_P, \mathring{z}_P$, care pot fi determinate cu formulele (24-60) în funcție de coordonatele aproximative calculate cu formulele (24-61) în sistemul global geocentric.

Așa cum este cunoscut, în ecuațiile corecțiilor care vor fi de forma generală (9-26) vor interveni termeni liberi, determinați cu relația (9-28) prin care se exprimă, în fapt, mărimile măsurate în funcție de parametrii folosiți în modelul funcțional. În cazul de față acestea sînt: $\mathring{D}^0$, $\mathring{\zeta}^0$ și $\mathring{\alpha}$.

Distanța înclinată, în spațiu, între punctele P și R se poate determina, provizoriu, în funcție de coordonatele aproximative ale acestor puncte în sistemul local utilizat:

$$\mathring{D}^0_{PR} = \sqrt{(\mathring{x}_R - \mathring{x}_P)^2 + (\mathring{y}_R - \mathring{y}_P)^2 + (\mathring{z}_R - \mathring{z}_P)^2}. \quad (24\text{-}62)$$

Din relațiile (24-60) și (2-10) se pot exprima cu ușurință în continuare:

Unghiul zenital calculat din parametrii modelului funcțional:

$$\cos \mathring{\zeta}^0_{PR} = \frac{(\mathring{x}_R - \mathring{x}_P)\cos\mathring{\Phi}_P \cos\mathring{\Lambda}_P + (\mathring{y}_R - \mathring{y}_P)\cos\mathring{\Phi}_P \sin\mathring{\Lambda}_P + (\mathring{z}_R - \mathring{z}_P)\sin\mathring{\Phi}_P}{\mathring{D}^0_{PR}}; \quad (24\text{-}63)$$

Azimutul calculat între cele două puncte:

$$\operatorname{tg} \mathring{\alpha}_{PR} = \frac{(\mathring{y}_R - \mathring{y}_P)\cos\mathring{\Lambda}_P - (\mathring{x}_R - \mathring{x}_P)\sin\mathring{\Lambda}_P}{(\mathring{z}_R - \mathring{z}_P)\cos\mathring{\Phi}_P - (\mathring{x}_R - \mathring{x}_P)\sin\mathring{\Phi}_P \cos\mathring{\Lambda}_P - (\mathring{y}_R - \mathring{y}_P)\sin\mathring{\Phi}_P \sin\mathring{\Lambda}_P}. \quad (24\text{-}64)$$

În continuare, pentru constituirea elementelor componente ale modelului funcțional stochastic ar fi necesară determinarea diferențialelor totale ale expresiilor (24-62) — (24-64), notate dD^0, $d\zeta^0$ și respectiv $d\alpha$, în care intervin elementele diferențiale ale parametrilor din aceste relații: dx, dy, dz, $d\Phi$ și $d\Lambda$. Calculele sînt laborioase și pot fi urmărite în lucrări mai extinse (*Wolf* 1963, *b*, *Dragomir* ș.a. pg. 410). Pentru exemplificare se prezintă numai expresia pentru dD, care se poate deduce mai simplu:

$$dD_{PR} = \frac{\mathring{x}_R - \mathring{x}_P}{\mathring{D}_{PR}}(dx_R - dx_P) + \frac{\mathring{y}_R - \mathring{y}_P}{\mathring{D}_{PR}}(dy_R - dy_P) + \frac{\mathring{z}_R - \mathring{z}_P}{\mathring{D}_{PR}}(dz_R - dz_P). \quad (24\text{-}65)$$

24.4.3. CONSTITUIREA MODELULUI FUNCȚIONAL-STOCHASTIC LA PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR ÎN REȚELELE GEODEZICE TRIDIMENSIONALE

24.4.3.1. Parametrii (necunoscutele) modelului funcțional. Necunoscutele care intervin în modelul funcțional pot fi grupate în următoarele categorii:

— necunoscutele x, y, z, de poziție în sistemul de coordonate cartezian local astronomic, în care se efectuează prelucrarea;

— necunoscutele Φ, Λ, prin care se determină poziția verticalei locului în punctul considerat;

— măsurătorile de distanțe D^0 și de unghiuri zenitale ζ^0 reclamă introducerea unor noi necunoscute, și anume coeficienții de refracție k. Aceste necunoscute pot fi, la rîndul lor, individualizate pe fiecare măsurătoare (ceea ce poate crea o supraparametrizare a modelului funcțional), sau pe fiecare punct de stație, sau pe o anumită zonă (a se vedea în acest sens și 23.3.);

— măsurătorile de direcții impun introducerea necunoscutei de orientare a stației (notată aici cu o).

Recapitulînd, rezultă că la prelucrarea observațiilor în rețelele geodezice tridimensionale, pentru fiecare punct de stație este necesară introducerea unui număr de 7 necunoscute în modelul funcțional. În funcție de mărimea zonei considerate, pe care se află amplasată rețeaua geodezică, pot interveni anumite simplificări din acest punct de vedere. Astfel, de exemplu, pentru zone de mai mici dimensiuni se poate, uneori, introduce ipoteza paralelismului verticalelor locului, ceea ce ar simplifica desigur modelul funcțional. Ipoteza nu este însă întotdeauna justificată.

24.4.3.2. **Formele ecuațiilor corecțiilor.** Măsurătorile M^0, efectuate în rețelele geodezice tridimensionale, pot fi exprimate prin intermediul formulelor de bază examinate în 24.4.2., în funcție de parametrii modelului funcțional.

Se obțin astfel relații de forma:

$$M_i = M_i^0 + v_i = f_i\ (x,\ y,\ z,\ \Phi,\ \Lambda,\ o,\ k); \qquad (24\text{-}66)$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Așa cum s-a anticipat deja, pentru parametrii utilizați se introduc valori aproximative, provizorii, astfel că prin prelucrare se urmărește determinarea mărimilor care corectează aceste valori provizorii:

$$\begin{aligned} x &= \mathring{x} + \mathrm{d}x; \quad \Phi = \mathring{\Phi} + \mathrm{d}\Phi; \quad o = \mathring{o} + \mathrm{d}o; \\ y &= \mathring{y} + \mathrm{d}y; \quad \Lambda = \mathring{\Lambda} + \mathrm{d}\Lambda; \quad k = \mathring{k} + \mathrm{d}k; \\ z &= \mathring{z} + \mathrm{d}z. \end{aligned} \qquad (24\text{-}67)$$

În continuare, se poate realiza o dezvoltare în serie a expresiilor (24-66) rezultînd ecuații de corecții, *specifice fiecărui gen de măsurători*, a căror formă este complexă, putînd fi preluate de cititorul interesat din lucrări de specialitate (*Wolf* 1963 b, *Dragomir* ș.a. pg. 414).

24.4.4. POSIBILITĂȚI DE DESFĂȘURARE A PRELUCRĂRII

Examinarea de principiu a posibilităților de desfășurare, în continuare, a prelucrării, permite schițarea sumară a drumului parcurs de la apariția lucrării lui *H. Bruns* în anul 1878 și pînă în perioada modernă, în ceea ce privește fundamentul teoriilor de prelucrare a observațiilor geodezice.

24.4.4.1. **Rezolvare în bloc.** Ecuațiile corecțiilor rezultate în 24.4.3.2. pot fi grupate sub forma cunoscută:

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{l}; \quad \text{pondere } \mathbf{P}, \qquad (24\text{-}68)$$

putînd fi *rezolvate în bloc*, după metodele cunoscute, prezentate în manual în 9.2., cap. 21 ș.a., rezultînd valorile parametrilor $\mathbf{x}$ și ale erorilor acestora $\mathbf{s}_x$, corecțiile $\mathbf{v}$ ș.a.m.d.

24.4.4.2. **Prelucrarea pe două grupe: poziție-înălțime.** Ecuațiile (24-68) pot fi împărțite, deocamdată *pur formal*, în două grupe:

In prima grupă (denumită și *grupa de poziție*) sînt cuprinse ecuațiile corecțiilor corespondente pentru: direcții azimutale, distanțe măsurate cu aparate electromagnetice, azimute Laplace și eventualele longitudini astronomice, ceea ce corespunde *în geodezia clasică* calculelor de coordonate elipsoidice B, L, pe elipsoidul de referință.

In grupa a doua (denumită și *grupa de înălțime*) sînt cuprinse ecuațiile corecțiilor corespondente pentru: nivelment geometric (împreună cu măsurările gravimetrice necesare pentru calculul altitudinilor elipsoidice), unghiuri zenitale, determinări gravimetrice de cea mai înaltă precizie și determinări de latitudini astronomice, ceea ce corespunde calculelor obișnuite de altitudini H.

Această separare, care se produce în mod *efectiv în geodezia clasică*, aici are doar un rol *formal*, deoarece cele două grupe de ecuații vor conține necunoscute comune, de legătură.

În acest fel ecuațiile (24-68) se pot scrie sub forma:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{matrix} \right\| \text{ ponderi } \begin{matrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{matrix}, \qquad (24\text{-}69)$$

ceea ce evident nu modifică rezolvarea.

Se notează în continuare:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_1; \qquad (24\text{-}70)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{w}_2, \qquad (24\text{-}71)$$

unde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{B}_1'\mathbf{x}_2 + \mathbf{l}_1; \qquad (24\text{-}72)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{B}_2'\mathbf{x}_1 + \mathbf{l}_2. \qquad (24\text{-}73)$$

Prin separarea (24-70) — (24-71) s-a creat o nouă grupare, în care, *aparent*, ecuațiile dintr-o grupă nu au elemente comune cu cele din cealaltă grupă. *In realitate* legătura există, prin relațiile (24-72) și (24-73).

Datorită dificultăților mari generate de implicațiile introducerii în modelul funcțional a necunoscutelor care reprezintă refracția atmosferică, precum și datorită complexității formelor ecuațiilor corecțiilor specifice prelucrărilor în geodezia tridimensională, *geodezia denumită „clasică" a fost nevoită să accepte în fapt împărțirea reflectată de relațiile (24-70) — (24-71).* Și în prezent aceste dificultăți persistă și, de aceea, prelucrarea observațiilor în rețele geodezice tridimensionale, prezentată în acest paragraf doar prin principiile sale, are încă o aplicabilitate extrem de restrînsă, fiind cunoscute exemplificări doar pentru rețele cu caracter experimental, pe suprafețe de mică întindere.

Rezolvarea corectă a grupării (24-70) — (24-73) se poate realiza *în mod iterativ*, în fiecare etapă aducîndu-se corectivele necesare calculării termenilor liberi, conform relațiilor (24-72) — (24-73). Calculele sînt extrem de complexe și presupun, printre altele, și determinări iterative ale deviațiilor verticalelor, ale profilului geoidului ș.a.m.d. (v. partea I).

24.4.4.3. **Metoda reducerii.** În lucrări anterioare (*Ghițău* 1976, *Dragomir* ș.a. 1977 pg. 596) s-a propus o metodă denumită *metoda reducerii* în care *măsurătorile M^0 sînt reduse în prealabil la normala la elipsoid* obținîndu-se mărimile M', care se prelucrează în continuare, pentru obținerea valorilor probabile M. Principial, rezultatele obținute trebuie să fie identice. Această ipoteză este realizabilă numai atunci cînd se dispune de determinări de deviații ale verticalelor, precum și de anomalii ale înălțimii suficient de precise, astfel încît erorile de reducere să fie de același ordin cu erorile de măsurare. Din punctul de vedere al volumului de calcule, metoda reducerii este mai avantajoasă, deoarece modelul funcțional cuprinde mai puține necunoscute.

De accentuat că metoda presupune *calcule tot la nivelul terenului*, adică reducerea menționată are cu totul alt sens, în comparație cu reducerea efectuată curent în prezent, care înseamnă proiectarea măsurătorilor pe suprafața de referință (20.2). *Concepția actuală de prelucrare* a observațiilor

geodezice se bazează, cu puținele excepții menționate, pe această separare, și pe prelucrarea observațiilor pe suprafețe de referință deosebite: planul de proiecție sau elipsoidul de referință pentru grupa de poziție și geoidul sau cvasigeoidul pentru grupa de înălțime.

Deci, o direcție cu implicații de structură în dezvoltarea geodeziei va fi dată în viitor de soluții practice în rezolvarea generalizată a prelucrărilor în geodezia tridimensională. În stadiul actual, unul dintre impedimentele existente cîndva în aplicarea generală a metodei, și anume cel derivat din volumul de calcule, precum și din complexitatea modelului funcțional-stochastic, este în linii mari depășit. Rămîne însă, din păcate, și în prezent, un al doilea impediment, cel datorat refracției atmosferice, pentru care soluțiile propuse pînă în prezent nu au satisfăcut decît parțial. Viitorul va oferi probabil soluții acceptabile și pentru această problemă capitală în domeniul prelucrării observațiilor efectuate în rețelele geodezice.

ANEXE

Anexa 1

Soluția generală a ecuației diferențiale (1–97) denumită funcție *Legendre*, este:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n, \qquad \text{(A 1–1)}$$

unde:

$$t = \cos \theta. \qquad \text{(A 1–2)}$$

Cazul particular $m = o$ (P_{no} se notează obișnuit P_n) conduce către *polinoamele Legendre* numite și *funcții Legendre de prima speță*:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \qquad \text{(A 1–3)}$$

Relația (A 1–3) a fost dedusă de *Olinde-Rodrigues*. Pentru $m \neq 0$, funcțiile *Legendre* P_{nm} (cos θ) se numesc *funcții asociate Legendre*.

Se observă modalitatea de exprimare a funcțiilor asociate în raport de polinoamele *Legendre*:

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}. \qquad \text{(A 1–4)}$$

Prezentăm cîteva rezultate:

$$P_0 (\cos \theta) = 1;$$

$$P_1 (\cos \theta) = \cos \theta;$$

$$P_2 (\cos \theta) = \frac{2}{3} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4};$$

$$P_3 (\cos \theta) = \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta = \frac{1}{8} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta);$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(A 1–5)}$$

$$P_{11} (\cos \theta) = \sin \theta;$$

$$P_{21} (\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2} \sin 2\theta;$$

$$P_{22} (\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\theta).$$

Prin particularizare dacă se formează polinoamele *Legendre* cu expresia (1-108) se obține:

$$P_1(\cos\psi) = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(L'-L); \qquad \text{(A 1–6)}$$

$$P_2(\cos\psi) = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2\theta\cos^2\theta' + 3\cos\theta\cos\theta'\sin\theta\sin\theta'\cos(L-L') +$$

$$+ \frac{3}{2}\sin^2\theta\sin^2\theta' + \frac{1}{2}[1+\cos 2(L-L')] - \frac{1}{2} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) + 3\cos\theta\cos\theta'\sin\theta\sin\theta'\cos(L-L') +$$

$$+ \frac{3}{4}\sin^2\theta\sin^2\theta'\cos 2(L-L'), \qquad \text{(A 1–7)}$$

ş.a.m.d.

Aceste expresii pot fi scrise concentrat și generalizator sub forma:

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta)\,P_{nm}(\cos\theta')\cos m(L-L'). \qquad \text{(A 1–8)}$$

Anexa 2

Într-un triunghi sferic cu vîrfurile (și unghiurile) A, B, C, respectiv laturile a, b, c se pot scrie următoarele formule de bază ale trigonometriei sferice:

– formula sinusurilor:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}; \qquad \text{(A 2–1)}$$

– formula cosinusului unei laturi:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A; \qquad \text{(A 2–2)}$$

– formula cosinusului unui unghi:

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a; \qquad \text{(A 2–3)}$$

– formula produsului sinusului unei laturi cu cosinusul unghiului adiacent (formula celor cinci elemente):

$$\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A; \qquad \text{(A 2–4)}$$

– formula produsului sinusului unghiului cu cosinusul unei laturi adiacente:

$$\sin A\cos b = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a; \qquad \text{(A 2–5)}$$

– formula cotangentelor (formula celor patru elemente):

$$\operatorname{ctg} a\sin b = \cos b\cos C + \sin C\operatorname{ctg} A. \qquad \text{(A 2–6)}$$

Rezolvarea triunghiului sferic dreptunghic

Dacă $A = 90°$ și a este ipotenuza triunghiului sferic dreptunghic, se formează un triunghi convențional astfel:

– în locul catetelor b și c se consideră complementele lor: $90° - b$ și $90° - c$;

– unghiul A nu se ia în considerație.

Se pot aplica următoarele reguli de rezolvare:

– cosinusul unui element este egal cu produsul sinusurilor elementelor opuse, de exemplu:

$$\cos a = \cos b\cos c \qquad \text{(A 2–7)}$$

$$\cos B = \cos b\sin C \quad \text{etc.}$$

– cosinusul unui element este egal cu produsul cotangentelor elementelor alăturate, de exemplu:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C \qquad \text{(A 2–8)}$$

$$\cos B = \operatorname{ctg} a\operatorname{tg} c \quad \text{etc.}$$

Anexa 3

În numeroase calcule care intervin în geodezie se folosește sistemul de coordonate carteziene global geocentric, reprezentat în figura 1-9 și care poate fi definit după cum urmează:

● Originea sistemului de coordonate O este amplasată în centrul de masă al Pămîntului.

● Axa Z coincide cu *axa medie de rotație a Pămîntului.*

Polul de rotație (punctul în care axa de rotație întîlnește suprafața terestră) efectuează o mișcare de rotație descrisă de o spirală neregulată cu perioada de aproximativ 437 zile.

Axa instantanee de rotație nu coincide cu axa principală de inerție (axa de figură). Datorită deformațiilor elastice ale Globului, deplasărilor maselor pe suprafața și în interiorul său, acțiunii perturbatoare exercitată de Lună și Soare asupra mișcării de rotație (inclusiv asupra vitezei de rotație) a Pămîntului, axa de rotație nu ocupă o poziție fixă.

Prin determinările pe care le efectuează, astronomia poate *repera* o mișcare relativă a *polului instantaneu de rotație* în raport cu *Originea Convențională Internațională* (notat uzual *CIO*). Această origine este definită prin următoarele *latitudini inițiale*:

Mizusawa (Japonia)	+39°08′03″,602
Kitab (U.R.S.S.)	1″,850
Carloforte (Italia)	8″,941
Gaithersburg (S.U.A.)	13″,202
Ukiah (S.U.A.)	12″,096

Cele 5 latitudini au fost obținute ca medii aritmetice ale determinărilor efectuate între anii 1900 – 1905, excepție făcînd observatorul *Kitab*, pentru care perioada considerată a fost 1935 – 1940. Astfel, *polul mediu* definit în acest mod de către *Asociația Internațională de Astronomie* și însușit de *Asociația Internațională de Geodezie* în anul 1960 are o semnificație pur convențională.

Una din problemele fundamentale ale astronomiei moderne constă în determinarea coordonatelor x, y ale polului instantaneu de rotație în raport cu originea convențională, problemă de care se ocupă *Serviciul Internațional al Mișcării Polului* (cu sediul la *Mizusawa*).

● Axa X este situată în *meridianul astronomic mediu al punctului Greenwich* (notat uzual *GAM*).

Anexa 4

În geodezie unghiurile se exprimă fie în gradația sexagesimală, fie în gradația centezimală.

Din egalitățile $\alpha^\circ/\alpha^{rad} = 180°/\pi = 200^g/\pi$ se obține:

$$\alpha^\circ = \rho^\circ\cdot\alpha^{rad} = 57°,29578\cdot\alpha^{rad};\ \alpha^g = \rho^g\cdot\alpha^{rad} = 63^g,66198\cdot\alpha^{rad}$$

$$\alpha' = \rho'\cdot\alpha^{rad} = 3437',7468\cdot\alpha^{rad};\ \alpha^c = \rho^c\cdot\alpha^{rad} = 6366^c,198\cdot\alpha^{rad}$$

$$\alpha'' = \rho''\cdot\alpha^{rad} = 206264'',806\cdot\alpha^{rad};\ \alpha^{cc} = \rho^{cc}\cdot\alpha^{rad} = 636619^{cc},8\cdot\alpha^{rad}$$

Sînt utile uneori și egalitățile:

$\rho^g/\rho^\circ = 1,111\,111\,111\,111;\ \rho^c/\rho' = 1,851\,851\,851;\ \rho^{cc}/\rho'' = 3,086\,319\,753\,086.$

În geodezie se utilizează curent următoarele serii:

Seria Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

Seria Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

Ca aplicații ale acestor serii se obțin:

Serii trigonometrice

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + h \cdot \cos x_0 - \frac{h^2}{2} \sin x_0 - \frac{h^3}{6} \cos x_0 + \dots$$

$$\cos(x_0 + h) = \cos x_0 - h \cdot \sin x_0 - \frac{h^2}{2} \cos x_0 + \frac{h^3}{6} \sin x_0 + \dots$$

$$\sin x'' = \frac{x''}{\rho''} - \frac{1}{3!}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^5 - \dots$$

$$\cos x'' = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \dots$$

Serii binominale

$$(|x| < 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1) - (m-n+1)}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \frac{35}{128} x^4 + \dots$$

Anexa 6

Statistica matematică oferă diverse metode privind estimarea calității măsurătorilor, a rezultatelor obținute din prelucrarea acestora, precum și de verificare a unor ipoteze emise la alcătuirea modelului funcțional-stochastic de prelucrare. Utilizarea în manual a acestor metode a fost redusă la strictul necesar, în funcție de cunoștințele pe care le au studenții secției de geodezie în acest domeniu, ca urmare a actualei structuri a planului de învățământ.

În completare la metodele de evaluare a ponderilor măsurătorilor geodezice, deci de determinare a modelului stochastic al prelucrării (v. 20.4), se prezintă o metodă bazată pe utilizarea testului statistic de omogenitate *Bartlett* (*Wolf* 1979, *Pelzer* 1980 ș.a.).

Se consideră m grupe de măsurători ($m > 2$), caracterizate prin *varianțele empirice* $s_{i0}'^2$ și respectiv prin *numărul gradelor de libertate* r_i:

$$E(s_{0i}'^2) = \sigma_i^2;\ i = 1, 2, \dots, m. \qquad (A\ 6-1)$$

Se testează omogenitatea măsurătorilor, din punctul de vedere al preciziei, în scopul unei eventuale partajări a măsurătorilor în grupe de precizii inegale. Se verifică prin urmare dacă varianțele empirice corespund aceleiași populații, respectiv dacă estimează aceeași mărime.

$$\begin{aligned} &\textit{Ipoteza nulă } H_0: && \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma^2; \\ &\textit{Ipoteza alternativă } H_a: && \sigma_k^2 \neq \sigma^2. \end{aligned} \qquad (A\ 6-2)$$

Fără a expune în detaliu argumentarea teoretică a testului *Bartlett*, care poate fi urmărită în lucrări de statistică matematică, se prezintă în continuare algoritmul de calcul specific metodei:

– se formează suma tuturor gradelor de libertate:

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_m, \qquad (A\ 6-3)$$

precum și media ponderată a varianțelor empirice $s_{0i}'^2$:

$$s_0'^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} r_i\, s_{0i}'^2; \qquad (A\ 6-4)$$

– se determină un coeficient c:

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right), \qquad (A\ 6-5)$$

cu care se calculează *mărimea testului* B:

$$B = \frac{1}{c} \left(r \ln (s_0'^2) - \sum_{i=1}^{m} r_i \ln (s_{0i}'^2) \right). \qquad (A\ 6-6)$$

Bartlett a demonstrat că pentru grade de libertate nu foarte mici ($r_i \geq 10$), mărimea B este aproximată satisfăcător prin distribuția χ^2, determinată pentru $(m-1)$ grade de libertate și un *prag de semnificație* (*de încredere*) α ales după necesități (de regulă $\alpha = 0{,}05$):

$$\begin{aligned} &B \leq \chi^2_{m-1;\,\alpha-1} && \text{: ipoteza nulă nu poate fi respinsă;} \\ &B > \chi^2_{m-1;\,\alpha-1} && \text{: ipoteza nulă poate fi respinsă.} \end{aligned} \qquad (A\ 6-7)$$

Testul Bartlett poate fi aplicat *în mai multe situații* care intervin la prelucrarea observațiilor geodezice, cum ar fi:

– prelucrarea observațiilor unghiulare în rețelele de triangulație, unde cele m grupe de măsurători sînt constituite de observațiile rezultate la compensarea în stație;

– prelucrarea observațiilor geodezice repetate, unde cele m grupe de măsurători sînt constituite de observațiile efectuate în perioadele corespondente de măsurători.

Exemplu

Pentru exemplificarea aplicării testului *Bartlett* la prima situație menționată, se va relua exemplul prezentat în 24.2, urmărindu-se o comparare cu rezultatele obținute la determinarea ponderilor direcțiilor măsurate cu formula (24-5) și prezentate în tabelul 24-28 (v. și figura 24-3).

● În tabelul A 6 se prezintă datele inițiale în exemplul considerat. Varianțele empirice $s_{0i}'^2$ fiind determinate cu relația (15–32), numărul gradelor de libertate r_i se calculează cu:

$$r_i = (n_i - 1)(t_i - 1). \qquad (A\ 6-8)$$

● *Mărimile auxiliare* indicate prin relațiile (A 6—3), (A 6—4) și (A 6—5) sînt: $r = 100$; $s_0'^2 = 7{,}34$; $c = 1{,}0246$.

Mărimea testului, calculată cu formula (A 6—6) este: $B = 1{,}390$. Compararea cu valoarea extrasă din tabelele distribuției χ^2 pentru:

$$\chi^2_{m-1;\ 1-\alpha} = \chi^2_{5;\ 0{,}95} = 11{,}071,$$

determină acceptarea ipotezei nule (A 6—7), adică acceptarea omogenității observațiilor, cele șase mărimi s_{0i}^2 făcînd parte din aceeași populație.

Observații. 1. În situația în care ipoteza nulă ar fi trebuit respinsă, ar fi fost necesară partajarea stației k pentru care $s_{0k}'^2$ ar fi avut valoarea maximă și estimarea ar fi urmat același algoritm, pentru $m - 1$ stații ș.a.m.d.

2. În finalul acestei etape se determină o nouă medie ponderată a varianțelor empirice, notată s'^2, cu formula (A 6—4), în care sînt incluse numai valorile care satisfac ipoteza nulă. În cazul concret examinat, nu mai este necesară o determinare suplimentară, astfel încît:

$$s'^2 = s_0'^2, \tag{A 6—9}$$

rezultatul fiind trecut în coloana 5 a tabelului A 6.

3. Pentru situația considerată în observația 1, adică pentru stația partajată în raport de celelalte $m - 1$ stații, în coloana 5 a tabelului A 6 ar fi fost trecută valoarea inițială $s_{0k}'^2$ (preluată din coloana 4 a aceluiași tabel).

4. În cazul în care este necesară partajarea celor m stații în două sau în mai multe grupe, testarea se va face desigur separat pe fiecare grupă, în baza algoritmului descris, rezultînd două, respectiv mai multe valori pentru s'^2: $s_I'^2$, $s_{II}'^2$, ...

5. În continuare se determină varianța mediei pentru o serie, în fiecare punct de stație, notată s_i^2 cu relația:

$$s_i^2 = \frac{s'^2}{t_i}, \tag{A 6—10}$$

6. Ponderea observațiilor în stația i se determină cu formula:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{s_i^2}, \tag{A 6—11}$$

dedusă din relația de definiție (9-17). Pentru cazul examinat s-a acceptat $\sigma_0^2 = 1{,}22$. Rezultatele finale din coloana 7 a tabelului A 6 pot fi comparate cu rezultatele prezentate în tabelul 24-28 (coloanele cu ponderile p_α).

Tabelul A 6

Punctul de stație (i)	Numărul de direcții n_i	Numărul de serii t_i	Numărul de grade de libertate r_i	Varianțe empirice $s_{0i}'^2$	Media ponderată a varianțelor empirice s'^2	Varianța mediei pentru o serie s_i^2	Ponderea observațiilor în stație p_i
0	1	2	3	4	5	6	7
1	5	6	20	6,60	7,34	1,22	1
2	5	4	12	6,25	7,34	1,84	0,54
3	5	6	20	8,21	7,34	1,22	1
4	5	6	20	6,24	7,34	1,22	1
5	5	4	12	6,76	7,34	1,84	0,54
6	5	5	16	9,80	7,34	1,46	0,68

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

Arabelos, D. *„Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung, dargestellt am Testgebiet Griechenland."* WAFVUH Nr. 98, 1980.

Asplund, L. *„Über einige Methoden für die Ausgleichung grosser Dreiecksnetze"*. Dissertation, Stockholm, 1954.

Atudorei, M. *„Măsurători geodezice prin unde"*. Litografie, ICB, 1981.

Augath, W. *„Optimierungskriterien und deren Auswirkung in Netzen der Landesvermessung"*. În GNLI, Stuttgart, pp. 479—498, 1980.

Baarda, W. *„S-Transformations and Criterion Matrices"*. Netherlands Geodetic Comission, Vol. 5, No. 1, Delft, 1973.

Baarda, W. *„Reliability and Precision of Networks"*. In Band I, Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, 1976.

Baarda, W. *„Measures for the Accuracy of Geodetic Networks"*. Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron, 1977.

Bagratuni, G. V. *„Kurs sferoidiceskoi geodezii"*. Geodezizdat, Moskva, 1962.

Benning, W. *„Der Schreibersche Satz über die günstigste Gewichtsverteilung in Basisvergrößerungsnetzen im Lichte der Linearen Programmierung"*. Dissertation, Bonn, 1971.

Boltz, H. *„Entwickelungs-Verfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate."* Druck und Verlag von P. Stankievicz Buchdruckerei GMBH, 1923.

Botez, M. *„Curs de teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1961.

Botez, M., Oprescu, N., Costăchel, A. *„Începuturile și dezvoltarea învățămîntului și tehnicii măsurătorilor terestre în țara noastră."* BsIc, nr. 1, 1968.

Botez, M. *„Geodezie"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1969.

Botezatu, R. *„Metode geofizice de cercetare a subsolului"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.

Botezatu, R., Ștefănescu, R. *„Rețeaua gravimetrică a RPR. Reduceri de cîmp normal după formula internațională pentru teritoriul RPR"*. În SSG vol. II, 1963.

Bruns, H. *„Die Figur der Erde, ein Beitrag zur europäischen Gradmessung"*. Berlin, 1878.

Calistru, V., Munteanu, C. *„Cartografie matematică, întocmire și editare"*. Litografie, ICB, 1975.

Constantinescu, L., Botezatu, R. *„Rețeaua gravimetrică a R.P. Române* II. *Reducerea efectului de variație diurnă a gravității pentru teritoriul R.P. Române"*. În PG vol. II, 1963.

Constantinescu, L., Botezatu, R., Calotă, C., Ștefănescu, V., Romanescu, D., Paucă, M., Gohn, E. *„Prospecțiuni geofizice"*. Editura Tehnică, București, 1964.

Deumlich, F. *„Instrumentenkunde der Vermessungstechnik"*. 7 Auflage. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1980 .

Diaconu, I. *„Harta cvasigeoidului pe teritoriul R.S. România"*. Comunicare științifică, Direcția topografică militară, București, 1975.

Dragomir, V. *„Rețele geodezice derivate"*. SG, tema nr. 7, 1978.
Dragomir, V., Ghiță u, D., Mihăilescu, M., Rotaru, M. *„Teoria figurii Pământului"*. Editura Tehnică, București, 1977.
Drăghici, M., Buşe, I. *„Aplicarea corecțiilor gravimetrice în nivelmentul de ordinul zero al R.S. România"*. În „Analele Institutului de geodezie, fotogrammetrie, cartografie și organizarea teritoriului", Vol. I, Redacția de propagandă tehnică și agricolă, București, 1979.
Drăghici, M., Toader, I. *„Probleme legate de determinarea nivelului mediu al Mării Negre"*. Comunicare științifică, București, 1974.
Eremeev, V.F., Jurkina, M.I. *„Theorie der Höhen im Gravitationsfeld der Erde"*. În „Arbeiten aus dem Vermessungs-und Kartenwesen der DDR". Band 32, Kombinat Geodäsie und Kartographie, Leipzig, 1974.
Filimon, R. ș.a. *„Topografie generală"*. Editura Tehnică, București, 1958.
Fotescu, N. *„Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate"*. Litografie, ICB, 1975.
Fotescu, N. *„Contribuții privind optimizarea construcției rețelelor geodezice"*. Teză de doctorat, ICB, 1979.
Gauss, C.,F. *„Theoria Motus Corporum Coelestium"*. Perthes u. Besser, Hamburg, 1809.
Gauss, C. F. *„Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate"*. Börsch u. Simon, Berlin, 1889.
Ghiță u, D. *„Modellbildung und Rechenpraxis bei der nivellitischen Bestimmung säkularer Landhebungen"*. Teză de doctorat, Bonn, 1970 a.
Ghiță u, D. *„Compensarea și comasarea riguroasă a rețelelor geodezice deja compensate"*. Litografie, ICB, 1970 b.
Ghiță u, D. *„Geodezie"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
Ghiță u, D. *„Über ein Modell zur Bestimmung von zeitlichen Änderungen in dreidimensionalen geodätischen Netzen begrenzter Ausdehnung"*. În MItG, Nr. 26, 1973 a.
Ghiță u, D. *„Über den Aufbau eines allgemeinen Modells zur Beschreibung von Landhebungen auf Grund von Wiederholungs-Nivellments"*. În ZfV, Nr. 1, 1973 b.
Ghiță u, D. *„Gravimetrie geodezică"*. Litografie, ICB, 1974.
Ghiță u, D., Săvulescu, C., Somârdolea, I. *„Cu privire la unele corecții care se aplică la realizarea rețelei de nivelment de ordin superior a R.S. România"*. Comunicare la sesiunea de comunicări științifice, ICB, 1975.
Ghiță u, D. *„Über eine gemeinsame Auswertung von Pegel- und Nivellementsmessungen zur Bestimmung säkularer Erdkrusten Vertikalbewegungen"*. În MItG, Nr. 43, 1976.
Ghiță u, D. *„Unele metode geodezice pentru determinarea deplasărilor recente ale scoarței terestre"*. SG, tema nr. 2, 1977.
Ghiță u, D. *„Contribuții ale geodeziei la programele de geodinamică"*. SG, tema nr. 21, 1980.
Ghiță u, D. *„Poligonul geodinamic Gruiu—Căldărușani"*. SG, tema nr. 27, 1981.
Ghiță u, D., Wolf, H. *„Relativ — Modelle für die geodätische Bestimmung von Krustenbewegungen im Erdbebengebiet"*. În ZfV, Nr. 4 1983.
Grafarend, E. *„Genauigkeitsmaße geodätischer Netze"*. DGK, A, Nr. 73, 1972.
Grafarend, E. *„Die Genauigkeit eines Punktes im mehrdimensionalen Euklidischen Raum"*. DGK, C, Nr. 153, 1970.
Grafarend, E. *„Optimization of Geodetic Network"*. În Bolletino di Geodesia e Scienze affini", Milano, 1974.
Grafarend, E. *„Second Order Design of Geodetic Nets"*. În ZfV, Nr. 4, pp. 158—168, 1975.
Grafarend, E., Heister, H., Kelm, R., Kropff, H., Schaffrin, B. *„Optimierung geodätischer Messoperationen"*. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1979.
Grafarend, E., Vaníček, P. *„On the Weight Estimation in Leveling"*. În National Oceanic and Atmospheric Administration, Technical Raport NOS 86 NGS 17, 1980.

Großmann, W. *„Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung"*. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, 1976.
Groten, E. *„Geodesy and the Earth's Gravity Field"*. Tom I. Ferd. Dümmler's Verlag, Bonn, 1979.
Groten, E. *„Geodesy and the Earth's Gravity Field"*. Tom II. Ferd. Dümmler's Verlag, Bonn, 1980.
Gruşinski, N. P. *„Teoria figurî zemli"*. Gosudarstvenoe izdatelstvo fizico-matematiceskii literaturî, Moscva, 1963.
Heiskanen, A. W., Moritz, H. *„Physical Geodesy"*. W.H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1967.
Heitz, S. *„Geoidbestimmung durch Interpolation nach interpolierter Quadraten Lotabweichung"*. In DGK, C, Nr. 124, 1968.
Heitz, S. *„On the Astrogeodetic Determination of the Geoid by Least Squares Estimation"*. In BG, Nr. 100, 1971.
Helmert, F. R. *„Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie"*. B.G. Teubner Verlag, Leipzig, 1880 și 1962.
Helmert, F. R. *„Studien über rationelle Vermessungen"*. În Zeitschrift für Mathematik und Physik, Nr. 13, pp. 73—120, 163—186, 1868.
Helmert, F. R. *„Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadraten"*. Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig, 1924.
Hermanovski, A. *„Stricte méthode de compensation des déplacements verticaux de l'écorce terrestre déterminés par les mesurages périodiques de nivellement de précision."* În Das I. Internationale Symposium für rezente Erdkrustenbewegungen, Leipzig, 1962.
Herzog, H. *„Zur Optimierung geodätischer Beobachtungen"*. DGK, C, Nr. 180, 1972.
Hirvonen, R. A. *„The Continental Undulations of the Geoid"*. În PFGI, nr. 19, 1934.
Iacob, C. *„Curs de matematici superioare"*. Editura Tehnică, București, 1957.
Jacobs, E. *„Vertikale Bodenbewegungen im weiteren Bereich des Niederrheinisch-Westfälischen Steinkohlengebietes"*. Teză de doctorat, Bonn, 1965.
Jalbă, N. *„Lucrări actuale în rețeaua de nivelment de stat a Republicii Socialiste România"*. SG, tema nr. 31, 1982.
Jeffreys, H. *„The Earth"*. University Press, Cambridge, 1962.
Jordan, W., Eggert, O., Kneissl, M. *„Handbuch der Vermessungskunde"*. 10 Ausgabe, Band III, Höhenmessung, Tachymetrie. J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1956.
Jordan, W., Eggert, O., Kneissl, M. *„Handbuch der Vermessungskunde"*. 10 Ausgabe, Band IV, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1958.
Jordan, W., Eggert, O., Kneissl, M. *„Handbuch der Vermessungskunde"*. Feld und Landmessung. Band II, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1963.
Jordan, W., Eggert, O., Kneissl, M. *„Handbuch der Vermessungskunde"*. Band V (von Graf, A.), J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1967.
Kelm, R. *„Zur analytischen Optimierung geodätischer Netze: allgemeine Analyse bis zur Entwicklung der Minoren und Graphenmethode"*. DGK, C, Nr. 220, 1976.
Klinger, I. *„Curs de triangulație de ord. IV"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1958.
Koch, K. R. *„Ein allgemeiner Hypothesentest für die Ausgleichungsergebnisse von Wiederholungsmessungen"*. In AVN, Nr. 7, 1976.
Koch, K. R. *„Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen"*. Dümmlers Verlag, Bonn, 1980.
Köhr, J. *„Über die Optimierung von Messungen zur Bestimmung mehrerer Unbekannten"*. În ZfV, Nr. 7, pp. 251—262, 1968.
Krasovski, F. N. *„Izbrannîe socinenia"*. Gheodezizdat, Moscva, 1955.

Krüger, I. *„Über die Ausleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen"*. VdPI, Nr. 18, 1905.
Kukkamäki, T. J. *„Über die nivellitische Refraktion"*. În FGI, Nr. 25, 1938.
Lallemand, C. *„Nivellement de haute précision"*. Paris-Liege, 1912.
Laplace, P. S. *„Mechanique céleste"*. Paris, 1799.
Ledersteger, K. *„Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung)"*. *Handbuch der Vermessungskunde*, Band V, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1969.
Legendre, A. M. *„Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes"*. Paris, 1806.
Legendre, A. M. *„Méthode des moindres carrés, pour trouver le milieu le plus probable entre les résultats de différentes observations"*. În Mem. Inst. Fr. pp. 149–154, Paris, 1810.
Levallois, J. J. *„Géodésie générale"*. Tome I–IV, Editions Eyrolles, Paris, 1969–1971.
Lichte, H. *„Erdmessung"*. Karlsruhe, 1973.
Lörinczi, I. *„Triangulație geodezică"*. Litografie – Academia militară, București, 1959.
Lucht, H. *„Korrelation im Präzisionsnivellment"*. In WAFVUH, Nr. 48, 1972.
Marinescu, D. *„Unele date privind dezvoltarea geodeziei în țara noastră"*. RGOT, Nr. 2, 1966.
Marzahn, K. *„Die Ausgleichung der Pendel- und Gravimetermesungen der europäischen Gravimetereichssystems"*. DGK, C, Nr. 59, 1963.
Meissl, P. *„Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens"*. În ÖZfV, Nr. 50, pp. 159–165, 186–194, 1962.
Meissl, P. *„Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens"*. DGK, A, Nr. 61, 1969.
Mihăilă, N. *„Introducere în programarea liniară"*. Editura Didactică și Pedagogică București, 1964.
Mihăilescu, M. *„Contribuții la elaborarea unui nou procedeu de calcul automatizat al deviației gravimetrice a verticalei"*. Teză de doctorat, Academia militară, București, 1974.
Mittermayer, E. *„Zur Ausgleichung freier Netze"*. În ZfV, Nr. 97, pp. 481–489, 1972.
Molodenski, M. S. *„Osnovnîie voprosî goedeziceskoi gravimetrii"*. În. Tr. ȚNIIGAiK, Nr. 42, 1945.
Molodenski, M. S., Eremeev, V. F., Iurkina, M. I. *„Metodî izuceniia vneșnego gravitationogo polia i figurî Zemli"*. În Tr. ȚNIIGAiK, Nr. 131, 1960.
Monka, F., Torge, W., Weber, G., Wenzel, H. *„Improved Vertical Deflection and Geoid Determination in the North Sea Region"*. WAFVUH, Nr. 94, 1979.
Moritz, H. *„Eine allgemeine Theorie der Verarbeitung von Schweremessungen nach kleinsten Quadraten"*. În DGK, A, Nr. 67, 1970.
Moritz, H. *„Geodetic Reference System 1980"*. În BG, Nr. 3, 1980, a.
Moritz, H. *„Advanced Physical Geodesy"*. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980, b.
Moritz, H. *„Advanced Physical Geodesy"*. În GNLI, Stuttgart, pp. 179–211, 1980.
Niemeier, W. *„Ausgleichung geodätischer Netze"*. În GNLI, Stuttgart, pp. 179–211, 1980.
Ölander, V. R. *„Ausgleichung einer Dreieckskette mit lauter Laplaceschen Punkten"*. In PFGI, Nr. 15, 1927.
Öztürk, E. *„Güte – Kriterien zum Vergleich von geodätischen Netzen"*. Teză de doctorat, Bonn, 1977.
Pelzer, H. *„Einige Aspekte der Genauigkeitsoptimierung in geodätischen Netzen"*. În AVN, pp. 350–361, 1972.
Pelzer, H. *„Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen"*. În GNLI, Stuttgart, pp. 39–111, 1980, a.
Pelzer, H. *„Optimierung von Netzen: Aufwand, Genauigkeit, Zuverlässigkeit"*. În GNLI, Stuttgart, 1980, b.
Pranis-Pranievici, I. J. *„Rukovodstvo po uravnitelnîm vîcisleniam trianguliații"*. Gheodezizdat, Moscva, 1956.

Provorov, K. L. *„O postroenii sploșnih setei trianguliații"*, Gheodezizdat, Moscva, 1957.
Rabinovici, R. N. *„Rukovodstvo po vîșșei gheodezii"*. Gheodezizdat, Moscva, 1961.
Ramsayer, K. *„Über der zulässigen Abstand der Schwerepunkte bei der Bestimmung geopotentieller Koten im Hochgebirge, Mittelgebirge und Flachland"*. În DGK, A, Nr. 44, 1973.
Regöczi, E. *„Geodetic Work in Hungary 1963–1966"*. Budapesta, 1969.
Rotaru, M. *„Contribuții la metodica de măsurare și compensare în stație a unghiurilor orizontale în triangulația geodezică de ordinul I"*. Teză de doctorat, ICB, 1975.
Rotaru, M. *„Considerații privind alegerea datelor geodezice fundamentale pentru compensarea triangulației de stat actuale a Republicii Socialiste România"*. Comunicare la Sesiunea științifică a Direcției topografice militare, 1982.
Rusu, A., Bos, N., Kiss, A., Măolaraș, I., Vătășan, A. *„Cu privire la mărimea coeficientului de refracție atmosferică k și precizia nivelmentului trigonometric la distanțe mari"*. În RGCOT, Nr. 4, 1964.
Șabac, Gh. *„Matematici speciale"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
Schmitt, G. *„Zur Numerik der Gewichtsoptimierung in geodätischen Netzen"*. DGK, C, Nr. 256, 1979.
Schreiber, O. *Über die günstigste Gewichtsverteilung"*. În ZfV, Nr. 18, p. 57, 1889.
Sigl, R. *„Kritische Betrachtung zur Orientierung von geodätischen Hauptnetzen, günstigste Verteilung der Laplaceschen Punkte"*. DGK, C, Nr. 12, 1956.
Sigl, R. *„Einführung in die Potentialtheorie"*. Herbert Wichman Verlag, Karlsruhe, 1973.
Socolescu, M. *„Mésures gravimetriques au pendule"*. În Studii tehnice și economice, seria geofizică, Nr. 2, București, 1950.
Socolescu, M. *„Geofizica"*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
Socolescu, M., Airinei, S., Ciocârdel, R., Popescu, M. *„Fizica și structura scoarței terestre din România"*. Editura Tehnică, București, 1975.
Șerbetçi, M. *„Bestimmung und Berücksichtigung von algebraischen Korrelationen be Gravimetermessungen"*. Teză de doctorat, Bonn, 1968.
Tarczy Hornoch, A., Hristov, V. *„Tabliți dlia ellipsoida Krasovskogo"*. Academiai Kiado, Budapesta, 1959.
Tienstra, J. M. *„An Extension of the Technique of the Method of Least Squares to correlated Observations"*. În BG, Nr. 6, pp. 301–305, 1947.
Tienstra, J. M. *„The Foundation of the Calculus of Observations and the Method of Least Squares"*. În BG, Nr. 10, pp. 289–306, 1948.
Tienstra, J. M. *„Theory of the Adjustement of Normaly Distributed Observations"*. 1956.
Torge, W. *„Geodäsie"*. Sammlung Göschen. Walter de Gruyter, Berlin, 1975.
Torge, W. *„Geodätische Referenzsysteme"*. În GNLI, Stuttgart, pp. 113–140, 1980.
Vening-Meinesz, F. A. *„A Formula expressing the Deflection of the Plumb Line in the Gravity Anomalies and some Formulae for the Gravity Field and the Gravity Potential outside the Geoid"*. În Koninkl. Ned. Akad. Wetenschappen, V. 31 (3), Amsterdam, 1928.
Vignal, J. *„Evaluation de la précision d'une méthode de nivellement"*. În BG, Nr. 1, 1936.
Vignal, J. *„Nivellement de précision"*. Paris, 1965.
Zakatov, P. S. *„Kurs vîșșei gheodezii"*. Nedra, Moscva, 1976.
Zdanovici, V. G. *„Vîșșaia gheodezia"*. Gheodezizdat, Moscva, 1961.
Zetsche, H. *„Elektronische Entfernungsmessung (EDM)"*. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, 1979.
Werkmeister, P. *„Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen"*. În ZfV, Nr. 49, pp. 401–433.
Wolf, H. *„Die Lotabweichungsausgleichung für das Zentraleuropäische Netz"*. În Veröff. Inst. f. Erdm., Heft 6, Bamberg, 1949.
Wolf, H. *„Zur Berechnung rezenter Höhen-Änderungen im Rahmen des europäischen Nivellementsnetzes"*. În Deutsche Beiträge zur Vorlage bei der XIII Generalversammlung der IUGG, München, 1963 a.

W o l f, H. *„Dreidimensionale Geodäsie — Herkunft, Methodik und Zielsetzung"*. În ZfV, Nr. 3, 1963 b.
W o l f, H. *„Die Grundgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung"*. În ZfV, Nr. 6, 1963 c.
W o l f, H. *„Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadraten"*. Dümmlers Verlag, Bonn-Hannover-München, 1968.
W o l f, H. *„Polarität und Optimierung bei freien und eingeschalteten geodätischen Netzen"*. În AVN, Nr. 8, 1970.
W o l f, H. *„Helmerts Lösung zum Problem der freien Netze mit singulärer Normalgleichungsmatrix"*. În ZfV, Nr. 97, pp. 189–192, 1972.
W o l f, H. *„Über die Einführung von Normalhöhen"*. În ZfV, Nr. 1, 1974.
W o l f, H. *„Ausgleichungsrechnung I-Formeln zur praktischen Anwendung"*. Dümmlers Verlag, Bonn, 1975.
W o l f, H. *„Zur Grundlegung der Kollokationsmethode"*. ZfV, Nr. 6, 1977.
W o l f, H. *„Ausgleichungsrechnung II-Aufgaben und Beispiele zur praktischen Anwendung"*. Dümmlers Verlag, Bonn, 1979.
W o l f, H. *„Innere Genauigkeit und Gaußchen Algoritmus"*. În ZfV, Nr. 106, Heft, 5, 1981.
* * * *„Instrucțiuni pentru rețele de sprijin din localități"*. Buletinul CSCAS anul II nr. 22, 1961.
* * * *„Indicator de norme de deviz pentru lucrări geodezice O-1982"*. București, 1982.
* * * *„Instrucțiuni pentru triangulația de ordinul I, II, III, IV"*. București, Ed. MFA, 1962.
* * * *„Instrucțiuni tehnice pentru întocmirea planurilor topografice la scările 1/5 000 și 1/10 000"*. Redacția revistelor agricole, București, 1965.
* * * *„Instrucțiuni pentru nivelmentul de ordinele I, II, III, IV și cu teodolitul*, București, Ed. MFA, 1965.
* * * STAS 3 330-63: *„Semnale pentru puncte geodezice"*.

PRESCURTĂRI UTILIZATE

AVN = Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Stuttgart.
BG = Bulletin géodésique, Paris.
BsIC = Buletin științific al Institutului de Construcții, București.
DGK = Deutsche Geodätische Komission, München.
FGI = Publications of the Finnisch Geodetic Institute, Helsinki.
GNL I = Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung (Herausgegeben von H. Pelzer), Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, 1980.
ICB = Institutul de Construcții București.
MItG = Mitteilungen des Instituts für theoretische Geodäsie, Bonn.
PG = Probleme de geofizică, București.
RGCOT = Revista de geodezie, cadastru și organizarea teritoriului (inclusiv denumirile anterioare), București.
ÖZfV = Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen.
SG = Seminarul de geodezie, organizat în Institutul de Construcții, București.
SSG = Studii și cercetări de geofizică, București.
Tr. ȚNIIGAiK = Trudî Țentralnogo Naucino-Isledovatelscovo Instituta Geodezii Aerosiomki i Kartografii, Moscva.
VdPI = Veröffentlchungen Preussischen Geodätichen Instituts, Potsdam.
ZfV = Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart.
WAFVUH = Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität, Hannover.

CUPRINS

Prefață 3
Geodezie-definiție, obiect, scurtă privire istorică 5

Partea întîi

INTRODUCERE ÎN GEODEZIA FIZICĂ

Capitolul 1. **Elemente de teoria potențialului** 11
1.1. Cîmpul gravității 11
1.1.1. Forța de atracție (gravitația) 11
1.1.2. Forța centrifugă 12
1.1.3. Gravitatea (greutatea) 14
1.2. Potențialul gravității 15
1.2.1. Potențialul de atracție (newtonian) 16
1.2.2. Potențialul forței centrifuge 16
1.3. Potențialul de atracție al unor corpuri simple 18
1.3.1. Stratul sferic de raze R_1 și R_2. Punctul atras este exterior stratului sferic 19
1.3.2. Sfera de rază R. Punctul atras este exterior sferei 19
1.3.3. Punctul atras este situat în interiorul stratului sferic, de raze R_1 și R_2 20
1.3.4. Punctul atras se află situat în interiorul unei sfere de rază R, la o distanță r de centru 21
1.3.5. Punctul atras se află pe sfera de rază R 21
1.4. Ecuațiile *Laplace-Poisson* 21
1.4.1. Laplacianul cîmpului gravitațional 21
1.4.2. Laplacianul cîmpului gravității 22
1.5. Formule integrale. Probleme limită în teoria potențialului 24
1.5.1. Formula integrală *Green-Ostrogradski* 25
1.5.2. Formulele integrale *Green* 25
1.5.3. Definirea problemelor limită ale teoriei potențialului 26
1.6. Funcții armonice sferice. Funcții *Legendre* 27
1.7. Dezvoltarea potențialului gravității în coordonate sferice și rectangulare . . . 28

Capitolul 2. **Suprafețe echipotențiale** 32
2.1. Suprafețe de nivel, geoid, linii de forță 37
2.1.1. Sisteme de coordonate naturale 37
2.1.2. Curbura suprafețelor de nivel 39
2.2. Sferoizi de nivel 40
2.2.1. Sferoidul *Bruns* 42
2.2.2. Teorema *Clairaut* 43
2.2.3. Variația gravității teoretice (normale) pe sferoidul de nivel 44
2.2.4. Sferoidul *Helmert* 45

2.3. Elipsoidul de nivel 46
2.3.1. Parametrii geometrici ai elipsoidului de rotație 47
2.3.2. Sisteme de coordonate convenționale 48
2.3.3. Potențialul gravității normale (al elipsoidului de nivel) 50
2.3.4. Gravitatea normală 52
2.3.5. Variația gravității normale deasupra elipsoidului 54

Capitolul 3. **Anomaliile cîmpului gravității** 56

3.1. Reducerea în aer liber (*Faye*) 56
3.2. Reducerea de strat intermediar 57
3.3. Reducerea de relief 58
3.4. Reducerea de variație diurnă 60
3.5. Anomalia cîmpului gravității în reducerea *Bouguer* 60
3.6. Reducerea izostatică 61
3.7. Efectul indirect. Cogeoid 62
3.8. Reprezentarea grafică a anomaliilor cîmpului gravității 62
3.9. Interpolarea numerică a anomaliilor cîmpului gravității 64
3.9.1. Interpolarea analitică 64
3.9.2. Determinarea funcțiilor de interpolare 65
3.9.3. Metoda colocației — predicției 65

Capitolul 4. **Sisteme de altitudini** 67

4.1. Consecințele neparalelismului suprafețelor de nivel 67
4.2. Sistemul de altitudini dinamice 68
4.2.1. Numere geopotențiale 68
4.2.2. Altitudinea dinamică 69
4.2.3. Corecția dinamică 69
4.3. Sistemul de altitudini ortometrice 70
4.3.1. Altitudinea ortometrică 70
4.3.2. Corecția ortometrică 70
4.3.3. Altitudinea *Helmert* 71
4.3.4. Altitudinea ortometrică sferoidică 72
4.4. Sistemul de altitudini normale 73
4.4.1. Altitudinea normală 73
4.4.2. Calculul diferențelor de altitudini normale 74

Capitolul 5. **Ondulațiile geoidului. Deviațiile verticalei** 76

5.1. Ondulațiile geoidului 76
5.1.1. Formula *Bruns* 76
5.1.2. Formula *Stokes* 78
5.2. Deviațiile verticalei 82
5.2.1. Componentele astronomo-geodezice ale deviației verticalei 82
5.2.2. Componentele gravimetrice ale deviației verticalei 84
5.3. Problema *Molodenski* 87
5.4. Despre metodele practice de determinare a ondulațiilor geoidului și componentele deviației verticalei 88
5.4.1. Utilizarea șabloanelor circulare și a suprafețelor standard 89
5.4.2. Interpolarea ondulațiilor geoidului și deviației verticalei 92
5.4.3. Nivelmentul astronomo-geodezic și nivelmentul astronomo-gravimetric 94

Partea a doua

GEODEZIE ELIPSOIDALĂ 97

Capitolul 6. **Curbe pe suprafața elipsoidului de referință** 98
6.1. Ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație 98
6.2. Liniile de coordonate 101
6.2.1. Raza de curbură a elipsei meridiane 101
6.2.2. Lungimea arcului de meridian 102
6.2.3. Raza de curbură a paralelului 104
6.2.4. Lungimea arcului de paralel 105
6.2.5. Azimutul geodezic al unei curbe situate pe elipsoidul de referință . . . 105
6.2.6. Elementul de arie pe suprafața elipsoidului de referință 107
6.3. Secțiuni normale 108
6.3.1. Raza de curbură a unei secțiuni normale în funcție de azimut 112
6.3.2. Raza medie de curbură (raza medie *Gauss*) 113
6.3.3. Secțiuni normale reciproce 115
6.4. Linia geodezică 117
6.4.1. Definiție, proprietăți 118
6.4.2. Ecuațiile diferențiale și în termeni finiți ale liniei geodezice . . . . .
6.4.3. Ecuațiile parametrice *Puiseaux-Weingarten-Gauss* ale liniei geodezice pe elipsoidul de referință 120
6.4.4. Poziția liniei geodezice în raport cu secțiunea normală directă 122

Capitolul 7. **Rezolvarea problemelor geodezice pe elipsoidul de referință** 123
7.1. Rezolvarea triunghiurilor elipsoidice mici 123
7.1.1. Excesul sferic 123
7.1.2. Rezolvarea triunghiurilor geodezice mici cu metoda *Legendre* 125
7.1.3. Rezolvarea triunghiurilor geodezice mici cu metoda aditamentelor . . 127
7.2. Calculul coordonatelor geodezice B și L pe elipsoidul de referință 128
7.2.1. Rezolvarea problemei geodezice directe prin metoda dezvoltărilor în serie (metoda *Legendre*) 131
7.2.2. Metoda *Gauss* (metoda argumentelor medii) de rezolvare a problemei geodezice directe 133
7.2.3. Rezolvarea problemei geodezice inverse 135

Partea a treia

PROIECTAREA ȘI MATERIALIZAREA ÎN TEREN A REȚELELOR GEODEZICE 141

Capitolul 8. **Structura rețelelor geodezice** 141
8.1. Poziționarea rețelelor geodezice 141
8.1.1. Suprafețe de referință 141
8.1.2. Datele geodezice fundamentale de referință 143
8.1.3. Punctul zero fundamental în rețeaua de nivelment 149
8.1.4. Punctul fundamental în rețeaua gravimetrică 151
8.2. Tipuri de măsurători efectuate în rețelele geodezice 152
8.2.1. Unghiuri și direcții azimutale 152
8.2.2. Lungimi 153
8.2.3. Azimute astronomice 153
8.2.4. Coordonate astronomice 154
8.2.5. Unghiuri zenitale 154

8.2.6. Diferențe de nivel . . . 154
8.2.7. Măsurători gravimetrice . . . 154
8.3. Clasificarea rețelelor geodezice . . . 155
8.3.1. Clasificarea rețelelor geodezice după numărul elementelor fixe din rețea 155
8.3.2. Clasificare după formă . . . 155
8.3.3. Clasificare după destinație . . . 156
8.3.4. Clasificare după numărul de dimensiuni al spațiului în care este amplasată rețeaua geodezică . . . 160

Capitolul 9. **Modele funcțional-stochastice folosite curent la prelucrarea măsurătorilor efectuate în rețelele geodezice de sprijin** 161
9.1. Modelul stochastic . . . 161
9.2. Prelucrarea msurătorilor geodezice prin metoda observațiilor indirecte . . . 165
9.2.1. Modelul funcțional . . . 165
9.2.2. Observații privind formarea modelului funcțional-stochastic . . . 167
9.2.3. Determinarea elementelor compensate . . . 168
9.2.4. Evaluarea preciziei . . . 169
9.3. Prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor condiționate . . 173
9.3.1. Modelul funcțional . . . 173
9.3.2. Determinarea elementelor compensate . . . 174
9.3.3. Evaluarea preciziei după prelucrare . . . 175

Capitolul 10. **Optimizarea rețelelor geodezice** 177
10.1. Noțiuni introductive . . . 177
10.1.1. Optimizarea datelor inițiale (design de ordinul 0) . . . 178
10.1.2. Optimizarea configurației rețelei (design de ordinul 1) . . . 181
10.1.3. Optimizarea programului de măsurători geodezice (design de ordinul 2) 182
10.1.4. Optimizarea observațiilor suplimentare (design de ordinul 3) . . . 182
10.2. Funcții de scop și restricții la optimizarea rețelelor geodezice . . . 182
10.2.1. Indicatori de precizie locală . . . 183
10.2.2. Indicatori de precizie globală . . . 184
10.3. Algoritmi de rezolvare a problemelor de optimizare. Concluzii cu caracter utilitar 186
10.3.1. Descrierea blocurilor . . . 188
10.3.2. Concluzii cu caracter utilitar . . . 189
10.4. Exemple de elemente optime de structură în rețelele de triangulație . . . 191
10.4.1. Eroarea unei laturi într-un lanț de triunghiuri . . . 191
10.4.2. Forma optimă a unui triunghi din rețelele de triangulație . . . 193
10.4.3. Unghiul optim la intersecția simplă înainte . . . 195
10.4.4. Forma optimă a rețelei de dezvoltare a unei baze de triangulație . . . 197

Capitolul 11. **Elaborarea proiectului rețelelor geodezice** 198
11.1. Principii de elaborare a proiectului rețelelor geodezice . . . 199
11.2. Piesele componente ale proiectului rețelei geodezice . . . 201
11.2.1. Documentația . . . 201
11.2.2. Piese desenate . . . 202
11.2.3. Notele de calcul . . . 203
11.2.4. Devizul estimativ . . . 203
11.2.5. Planificarea și organizarea lucrărilor . . . 203
11.2.6. Memoriul justificativ . . . 203
11.3. Determinarea vizibilității între punctele rețelei de triangulație . . . 203
11.4. Proiectul unei rețele geodezice de îndesire . . . 205

Capitolul 12. **Recunoașterea terenului** 208
12.1. Obiectivele recunoașterii terenului . . . 208
12.1.1. Amplasarea punctelor geodezice . . . 208
12.1.2. Stabilirea înălțimii exacte a semnalelor geodezice în punctele de triangulație . . . 209
12.1.3. Reperarea punctelor de triangulație . . . 211
12.1.4. Adoptarea unor măsuri organizatorice . . . 211
12.2. Identificarea (reconstituirea) punctelor de triangulație . . . 212
12.2.1. Identificarea cu ajutorul teodolitului . . . 212
12.2.2. Identificarea cu ajutorul planșetei topografice . . . 213
12.3. Descrierea topografică a punctelor geodezice . . . 213

Capitolul 13. **Materializarea în teren a rețelelor geodezice** 216
13.1. Semnale geodezice . . . 217
13.1.1. Semnele distinctive ale punctelor geodezice . . . 217
13.1.2. Semnale geodezice la sol și pe construcții . . . 217
13.1.3. Caracteristici constructive comune semnalelor geodezice etajate (cu poduri) 219
13.1.4. Semnale geodezice cu pilastrul independent . . . 222
13.1.5. Semnale geodezice cu pilastrul suspendat . . . 226
13.2. Bornarea punctelor geodezice . . . 230
13.3. Operațiuni anexe la materializarea punctelor de triangulație . . . 231
13.3.1. Determinarea înălțimii semnalului geodezic construit . . . 231
13.3.2. Întocmirea foii de centrare . . . 232
13.3.3. Definitivarea descrierii topografice . . . 233
13.3.4. Materializarea reperelor azimutale . . . 233
13.4. Repere și mărci de nivelment . . . 234

Partea a patra

APARATE ȘI METODE DE MĂSURARE UTILIZATE ÎN REȚELELE GEODEZICE 236

Capitolul 14. **Aparate, instrumente și dispozitive utilizate la măsurarea unghiurilor în rețelele geodezice** 236
14.1. Structura teodolitelor . . . 237
14.1.1. Sistemul de axe al teodolitului . . . 238
14.1.2. Luneta teodolitului . . . 239
14.1.3. Cercurile gradate ale teodolitelor . . . 243
14.1.4. Modalități de efectuare a lecturilor pe cercurile gradate ale teodolitului 244
14.1.5. Nivele . . . 251
14.2. Instrumente și dispozitive auxiliare utilizate la efectuarea observațiilor unghiulare . . . 251
14.2.1. Dispozitiv de iluminare electrică . . . 251
14.2.2. Dispozitiv pentru înregistrarea fotografică a gradațiilor . . . 252
14.2.3. Oculare și prisme zenitale . . . 252
14.2.4. Nivela călăreață . . . 253
14.2.5. Plăci pilastru . . . 253
14.2.6. Heliotropul . . . 253
14.2.7. Reflectorul geodezic . . . 254
14.2.8. Dispozitiv de recepționare a luminii infraroșie . . . 254
14.3. Clasificarea teodolitelor folosite în rețelele de triangulație . . . 255
14.3.1. Teodolite de precizie . . . 255
14.3.2. Teodolite de înaltă precizie . . . 255
14.4. Erorile teodolitelor . . . 260
14.4.1. Erori de excentricitate . . . 260
14.4.2. Erorile de poziție ale axelor teodolitului . . . 262

14.4.3. Eroarea de zenit instrumental (eroarea de index) 254
14.4.4. Eroarea de run 265
14.4.5. Eroarea de antrenare a cercului orizontal 266
14.4.6. Erorile de diviziune a cercului orizontal 268

Capitolul 15. **Observații unghiulare azimutale în rețelele geodezice** 272

15.1. Refracția atmosferică terestră 273
15.1.1. Refracția atmosferică terestră verticală 274
15.1.2. Refracția atmosferică laterală 276
15.2. Executarea observațiilor unghiulare azimutale în rețelele geodezice 278
15.3. Metoda seriilor complete 280
15.3.1. Efectuarea observațiilor 280
15.3.2. Compensarea în stație 281
15.4. Măsurarea unghiurilor în toate combinațiile (*metoda Schreiber*) 288
15.4.1. Efectuarea observațiilor 288
15.4.2. Compensarea în stație 291

Capitolul 16. **Aparate, instrumente și dispozitive utilizate în nivelmentul geometric geodezic** 295

16.1. Structura instrumentelor de nivelment 296
16.1.1. Sistemul de axe al instrumentului de nivelment 298
16.1.2. Luneta instrumentului de nivelment 299
16.1.3. Sisteme de compensație a înclinării axei de vizare 301
16.1.4. Efectuarea lecturilor 304
16.2. Instrumente și dispozitive auxiliare 306
16.2.1. Mire de nivelment 306
16.2.2. Suport de miră, broaște de nivelment 307
16.3. Clasificarea instrumentelor actuale de nivelment geometric (nivelelor) 307
16.4. Verificarea și rectificarea instrumentelor de nivelment geometric 308
16.4.1. Verificarea și rectificarea instrumentelor de nivelment de tip rigid, cu șurub de basculare 308
16.4.2. Verificarea instrumentelor de nivelment cu compensator 314

Capitolul 17. **Metode de determinare a diferențelor de nivel în rețelele geodezice** 314

17.1. Nivelmentul geometric geodezic 314
17.1.1. Execuția nivelmentului geometric în rețelele geodezice de stat 315
17.1.2. Surse de erori sistematice în nivelmentul geometric geodezic 218
17.1.3. Erori întîmplătoare în nivelmentul geometric 323
17.1.4. Determinarea ponderilor și toleranțelor în rețelele de nivelment geometric 324
17.2. Nivelmentul trigonometric geodezic 329
17.2.1. Formule uzuale pentru determinarea diferenței de nivel prin nivelment trigonometric 329
17.2.2. Posibilități de calcul aproximativ al coeficientului de refracție k . . . 332
17.2.3. Estimarea aproximativă a ponderilor observațiilor zenitale geodezice . . 332
17.2.4. Efectuarea observațiilor zenitale 334
17.2.5. Determinarea altitudinilor elipsoidice și a deviațiilor verticalei 334

Capitolul 18. **Măsurarea lungimilor în rețelele geodezice** 337

18.1. Generalități privind sistemul metric 337
18.2. Măsurarea bazelor geodezice cu firul invar 339
18.2.1. Descrierea trusei firului invar 339
18.2.2. Efectuarea măsurării cu firul invar 342
18.2.3. Corecțiile firului invar 343

18.2.4. Calculul lungimii bazei 345
18.2.5. Despre etalonarea firelor invar 346
18.3. Măsurarea lungimilor cu aparate electronice 348

Capitolul 19. **Aparate și metode pentru măsurători gravimetrice** 348

19.1. Obiectul determinărilor gravimetrice 348
19.2. Determinări absolute ale accelerației gravității 350
19.2.1. Determinări absolute bazate pe măsurarea perioadei de oscilație . . . 350
19.2.2. Determinări absolute bazate pe căderea liberă, respectiv pe lansarea verticală, în vid, a corpurilor 354
19.3. Determinări relative ale accelerației gravității 356
19.3.1. Determinări relative cu aparate pendulare 356
19.3.2. Principiile de construcție a gravimetrelor 357
19.3.3. Erorile determinărilor cu gravimetrul 363
19.4. Determinarea gradientului orizontal și a mărimilor de curbură ale gravității 364
19.5. Rețele gravimetrice 366

Partea a cincea

PRELUCRAREA OBSERVAȚIILOR EFECTUATE ÎN REȚELELE GEODEZICE 369

Capitolul 20. **Prelucrarea preliminară a observațiilor geodezice** 369

20.1. Coordonate preliminarii 369
20.1.1. Calculul distanțelor și orientărilor între punctele vechi 370
20.1.2. Orientarea stațiilor cu coordonate cunoscute 370
20.1.3. Calculul coordonatelor preliminarii 371
20.2. Reducerea observațiilor geodezice la suprafața de referință 372
20.2.1. Reducerea determinărilor astronomice 373
20.2.2. Reducerea observațiilor azimutale 374
20.2.3. Reducerea distanțelor pe elipsoid 380
20.3. Coordonate și elemente provizorii 381
20.4. Ponderile observațiilor geodezice 384
20.4.1. Determinarea matricei ponderilor 384
20.4.2. Posibilități de calcul al ponderilor 385
20.4.3. Determinarea ponderilor grupelor de măsurători 386
20.4.4. Omogenizarea (standardizarea) corecțiilor 386

Capitolul 21. **Prelucrarea observațiilor din rețelele de triangulație prin metoda observațiilor indirecte** 387

21.1. Sisteme echivalente de ecuații ale corecțiilor 387
21.2. Determinarea variației orientării în funcție de variațiile coordonatelor pla ne x, y 389
21.2.1. Cazul general 389
21.2.2. Cazuri particulare 391
21.3. Determinarea variației azimutului unei curbe pe elipsoid în funcție de variațiile coordonatelor geodezice B, L 391
21.4. Forme ale ecuațiilor corecțiilor 392
21.4.1. Direcții centrate și reduse la planul de proiecție 392
21.4.2. Direcții centrate și reduse pe elipsoid 393
21.4.3. Azimute *Laplace* 393
21.4.4. Distanțe reduse la planul de proiecție 394
21.4.5. Distanțe reduse pe elipsoid 394
21.5. Compensarea grupului de puncte 394
21.5.1. Algoritmul de calcul 395
21.5.2. Particularități în transformarea ecuațiilor corecțiilor direcțiilor măsurate 395

21.5.3. Exemplu 397
21.6. Intersecția multiplă înainte 408
21.7. Intersecția multiplă înapoi 412
22.8. Intersecția multiplă combinată 413
21.9. Compensarea pe grupe 415
21.9.1. Procedeul *Helmert — Pranis Pranievici* 417
21.9.2. Particularități în separarea pe grupe 420

Capitolul 22. **Prelucrarea observațiilor din rețelele de triangulație prin metoda observațiilor condiționate** 421

22.1. Considerațiuni generale 421
22.2. Stabilirea numărului ecuațiilor de condiție 422
22.2.1. Condiții interioare 422
22.2.2. Condiții exterioare 424
22.2.3. Exemplu 425
22.3. Forme ale ecuațiilor de condiție 425
22.3.1. Ecuația de tur de orizont sau de stație 425
22.3.2. Ecuația de figură 426
22.3.3. Ecuația de pol 426
22.3.4. Ecuația de acord pe latură 428
22.3.5. Ecuația de acord pe azimute *Laplace* (elipsoid) sau pe orientări (planul de proiecție) 430
22.3.6. Ecuații de acord pe coordonate 431
22.4. Particularități în calculele de evaluare a preciziei 435
22.4.1. Funcție pentru o latură din rețea 435
22.4.2. Funcție pentru coordonata unui punct din rețea 435
22.5. Exemplu 436
22.6. Compensarea pe grupe 444
22.7. Situații particulare 446
22.7.1. Încadrarea simplă, fără constrîngeri, a unei rețele noi de triangulație într-un sistem de coordonate unitar 446
22.7.2. Constrîngerea rețelelor de triangulație noi pe puncte fixe — izolate . . 447

Capitolul 23. **Prelucrarea observațiilor în rețele de nivelment și gravimetrice** 448

23.1. Prelucrarea măsurătorilor în rețele de nivelment geometric și gravimetrice prin metoda observațiilor indirecte 449
23.1.1. Algoritmul de calcul 449
23.1.2. Exemplu 451
23.1.3. Particularități la prelucrarea observațiilor în rețelele gravimetrice . . . 451
23.2. Prelucrarea măsurătorilor în rețele de nivelment și gravimetrice prin metoda observațiilor condiționate 455
23.2.1. Algoritmul de calcul 455
23.2.2. Exemplu 456
23.3. Prelucrarea observațiilor executate în rețelele de nivelment trigonometric . . . 457
23.3.1. Forme ale modelului de prelucrare 457
23.3.2. Exemplu 462

Capitolul 24. **Unele probleme actuale ale prelucrării observațiilor efectuate în rețelele geodezice** 471

24.1. Prelucrarea observațiilor în rețelele geodezice libere 471
24.1.1. Soluția *Meissl-Bjerhammar-Mittermayer* 475
24.1.2. Soluții *Hansen-Helmert-Wolf* 481
24.1.3. Considerații finale 489
24.2. Prelucrarea observațiilor în rețelele de triangulație-trilateratie 493
24.2.1. Constituirea modelului funcțional-stochastic 494
24.2.2. Exemplu 496
24.3. Prelucrarea observațiilor geodezice repetate 506
24.3.1. Considerații preliminarii 506
24.3.2. Prelucrarea separată, pe perioade de determinări 508
24.3.3. Prelucrarea în bloc a măsurătorilor prin introducerea unor parametri suplimentari 509
24.3.4. Prelucrarea în bloc a măsurătorilor în ipoteza deplasărilor relative . . 511
24.3.5. Verificarea statistică a ipotezelor 512
24.3.6. Exemplificare de prelucrare 513
24.4. Noțiuni de prelucrare a observațiilor în rețelele geodezice tridimensionale . . 514
24.4.1. Sisteme de coordonate utilizate în geodezia tridimensională 515
24.4.2. Formule de bază în geodezia tridimensională 516
24.4.3. Constituirea modelului funcțional-stochastic la prelucrarea observațiilor în rețelele geodezice tridimensionale 517
24.4.4. Posibilități de desfășurare a prelucrării 518
Anexe 521
Bibliografie selectivă 527

Plan editură : 9480
Coli de tipar : 34
Bun de tipar : oct. 1983

Tiparul executat sub comanda nr. 418
la Intreprinderea poligrafică „Filaret",
str. Fabrica de chibrituri, nr. 9—11,
București, Republica Socialistă România